Matematikkompetence skal tænkes ind i den eksisterende gymnasieskole

Kasper Bjering Jensen, IMFUFA,
Roskilde Universitet

Kommentar til artiklen "Modellering versus problemløsning" i MONA, 2009(2)

I artiklen "Modellering versus problemløsning" slår Thomas Højgaard Jensen (THJ) til lyd for det man kan kalde "kompetencefokuserede opgaver" i matematikundervisningen, med særlig vægt på opgaver der fokuserer på "problemløsnings-" og "modelleringskompetence".

THJ betjener sig af de begreber som KOM-rapporten har givet os, til at tale om matematikfagets muligheder og væsen. Begrebsforvirring kan her opstå da rapporten arbejder med *matematisk kompetence* som noget der er udspændt af otte *matematiske kompetencer*. Derfor vil jeg her kalde det første for *almen* matematisk kompetence og det andet for *specifikke* matematiske kompetencer.

Overordnet er jeg svært begejstret for THJ's idéer og begrebsdannelser, men vil alligevel gerne komme med et par kritiske vinkler som tager udgangspunkt i to pointer:

a) Gode matematiske opgaver er af natur ikke fokuseret på en specifik matematisk kompetence.
b) Hvis kompetencetænkningen skal finde anvendelse i den eksisterende virkelighed i gymnasieskolen, må den have mindre gennemførte varianter end THJ's til rådighed.

Pointe a er afstedkommet af det første (men ikke endelige) indtryk jeg fik af THJ's artikel, nemlig at der findes en form for en til en-forbindelse mellem en mængde af opgavetyper (kunne generelt kaldes *situationer*) og mængden af specifikke kompetencer.

Dvs. en modelleringskompetence til modelleringssituationer, problemløsningskompetence til problemsituationer osv. En sådan brug af kompetencebegrebet er i min optik ufrugtbar fordi den i princippet opløser faget i en række adskilte aktionsfelter.

En matematisk opgave er en situation som det kræver et passende udsnit af *almen* matematisk kompetence at handle hensigtsmæssigt i. Udsnittet er udspændt af specifikke matematiske kompetencer – men kun i særligt kunstige situationer af en enkelt specifik kompetence.

Set fra et matematikunderviser-synspunkt er det afgørende at det samlede opgaveudvalg repræsenterer den størst mulige udfoldelse af specifikke kompetencer. Når et aspekt af disse trænes i en situation, trænes det samtidig til anvendelse i andre – også væsensforskellige – situationer.

THJ eksemplificerer de opgaver han kalder "hverken problemløsning eller øvelsesarbejde", med en opgave om den såkaldte "Gompertz-model". THJ kalder opgaven dårlig fordi den kompetencemæssigt er ufokuseret.

Set fra mit synspunkt er den dårlig fordi den netop er fokuseret snævert på omgang med symboler og formalismer – dvs. én specifik kompetence. Til gengæld er THJ's opgaveeksempel "Hvilken transportform er bedst?" fremragende fordi den netop er ufokuseret. Den indfanger potentielt hele kompetencespektret i en samlet arbejdsproces.

Pointe b er afstedkommet af den reaktion jeg fik da jeg (kort) forsøgte at diskutere THJ's idéer med matematik-kollegaer i gymnasieskolen. Der opstår i udgangspunktet to problematikker:

For det første er fagets identitet langtfra entydig. En hel del kollegaer havde således det klare synspunkt at problemstillinger af typen "Hvilken transportform er bedst?" ikke er hjemmehørende i faget. Ud over denne uenighed om fagets identitet mente nogle kollegaer heller ikke at omgang med opgaver af denne type var dækket ind af deres egen matematik-uddannelse.

For det andet mener jeg at THJ's problemer passer dårligt ind i den måde matematikundervisningen stadig organiseres på, nemlig efter overskrifter som "lineære sammenhænge", "eksponentielle sammenhænge", "potenssammenhænge", "trigonometri", "statistik", "rentesregning" osv.

Dette skyldes dels det forhold at de gode problemer typisk kun trækker på få af ovennævnte overskrifter og ofte kun i snævert udsnit, og dels at det ville ødelægge en stor del af pointen hvis de gode problemer blev stillet i en tematisk kontekst fordi et vigtigt element er selvstændigt at kunne trække relevante områder af matematikken ind i arbejdet med situationen.

Ovenstående kan man naturligvis diskutere, efteruddanne og omorganisere sig ud af. Det er dog en temmelig omfattende proces. Derfor vil jeg gerne anbefale at man ud over udvikling af ideale og radikale omdannelser også arbejder kompetenceorienteret med at udvikle undervisningen fra det aktuelt eksisterende udgangspunkt.

I det følgende vil jeg med tre eksempler, hentet fra min egen undervisning af et matematik-C-niveau-hold i det almene gymnasium, forsøge at uddybe ovenstående pointer.

Eksempel 1: Opgavers kompetencebredde

I forbindelse med et forløb i almen studieforberedelse om bæredygtighed og klima stillede jeg følgende opgave: "Hvad er Jordens gennemsnitstemperatur?" Der må her være tale om en modelleringssituation selv om den i forhold til THJ's eksempel – "Hvilken transportform er bedst?" – har et snævrere metodedomæne og stort set er løsningslukket.

Opgaven er en modelleringssituation fordi arbejdet med den kræver en række kvalificerede til- og fravalg af faktorer der spiller ind på Jordens gennemsnitstemperatur, samt at der foretages en passende matematisering af faktorerne. Det kræver i øvrigt indsigt i faget fysik at kunne arbejde med disse, men med kendskab til begreber fra især varmelæren og hjælp fra læreren kan dette gå.

I den mest simple model er der alene tale om to faktorer: indstrålingen af energi fra solen (S) og frastrålingen (F) af varme fra Jorden som gives af Stefan Boltzmanns lov om sortlegemestråling. Matematiseringen bliver således (idet S enten gives eller beregnes på en af flere mulige måder):

$$S = 1{,}2 \cdot 10^{17}\ \mathrm{W}$$

$$F = \sigma \cdot A_{\text{jordoverflade}} \cdot T^4$$

Havde man startet opgaven på dette sted, havde der umiddelbart, set fra en 1. g-elevs optik, været tale om en problemløsningssituation. Det giver derfor mening her at tale om at fortsættelse i modelleringsopgaven påkræver problemløsningskompetence.

Fortsættelsen er simpel idet løsningen findes ved at sætte S lig med F og derpå finde den tilhørende (positive) værdi af T som efter en simpel afkodning bliver svaret på spørgsmålet. Det sidste skridt med at finde T baserer sig igen på andre kompetencer end modellering og problemløsning.

I en mere kompliceret model kan man indføre en atmosfære. Den mest simple model for denne kan være at alt frastrålet, men intet indstrålet varme absorberes og derpå udsendes i to lige store dele (D) hhv. tilbage mod og væk fra Jorden. Problemløsningen bliver da at opstille to ligninger som angiver strålingsbalance for hhv. Jorden som helhed og for atmosfæren isoleret set:

$$S = D \text{ og } F = 2D$$

Altså et simpelt system af to ligninger med to ubekendte. Atmosfære-modellen kan gradvist kompliceres ved at indføre at en andel af den frastrålede varme ikke absorberes, samt at en andel af strålingen fra solen absorberes. Også Jordens emissivitet og albedo kan indføjes osv.

Set fra et kompetenceperspektiv må det handle om aktivering af modelleringskompetence i en situation hvor der skal foretages brugbare afgrænsninger og matematiseringer, og det handler om problemløsningskompetence når der skal navigeres fra givne matematiske omstændigheder af en subjektivt set passende kompleksitet frem til en løsning. Undervejs må man i øvrigt aktivere forskellige aspekter af symbol- og formalismekompetence, repræsentationskompetence, hjælpemiddelkompetence, ræsonnementskompetence mv.

En modelleringssituation kan altså med et passende kompetencebegreb opfattes som krævende ikke blot én, men mange forskellige kompetencer. I næste eksempel vil jeg vise at arbejde med aspekter af modelleringskompetence kan tilføres en typisk standardopgave blot ved få justeringer.

Eksempel 2: Modelleringskompetence i ikke-modelleringssituationer

I en afleveringsopgave gav jeg mine elever nedenstående tabel over antal danskere i forskellige aldersintervaller og spørgsmålet "Hvad er gennemsnitsalderen for danskere?"

	0-9 år	10-19 år	20-29 år	30-39 år	40-49 år	50-59 år	60-69 år	70-79 år	80 år og over
I alt	658.007	693.006	630.818	748.306	813.127	714.629	658.130	368.572	226.856

Opgaven kan umiddelbart opfattes som en øvelse inden for emnet "grupperede observationssæt", men vil dog i praksis nok fremstå som et problem på det aktuelle niveau (1. g).

Umiddelbart synes der at være tale om en forholdsvis lettilgængelig opgave, men eleverne støder på en del udfordringer der må siges at fordre anvendelse af aspekter af modelleringskompetence.

For det første er de opstillede aldersintervaller ikke af matematisk karakter. Det kræver en vis kompetence at foretage korrekt matematisering af intervallerne. Den typiske fejl er at oversætte “0-9 år” til intervallet [0;9] frem for [0;10[osv. Da løsningen bygger på intervallets midterværdi, gør det en betydelig forskel. Dette kan eleverne i en faglig diskussion nemt indse, med stort udbytte.

For det andet kræver intervallet “80 år og over” at eleven selvstændigt foretager en eller anden form for afgrænsning. Selv mine dygtigste elever gik i stå i mødet med denne type situation og måtte hjælpes videre ved at jeg gav dem idéen om selv at lave en passende afgrænsning.

I den typiske model af et aldersinterval antages en jævn fordeling inden for intervallet. Men en sådan antagelse er for intervallet “80 år og over” ret forkert hvis man f.eks. afgrænser ved 108 år (hvilket er oplagt fordi den ældste dansker er 107 år). Intervallet [80;85[kan derfor i et modelleringsperspektiv opfattes som en mere kvalificeret afgrænsning end [80;108[.

Endelig blev der stillet spørgsmålet “Hvor mange danskere er over 100 år?” Her valgte nogle elever at matematisere sidste interval til [80;110[og lade svaret være 226.856 divideret med 3. Det er oplagt et urealistisk (om end matematisk korrekt) svar hvilket en elev med et veludviklet kritik-aspekt af modelleringskompetencen burde kunne indse og kommentere. Denne type overvejelse rejste dog kun en enkelt elev.

Det mest korrekte svar på sidste spørgsmål havde været at det ikke kunne besvares med det foreliggende datagrundlag. En helt rimelig svarmulighed set fra et modelleringskompetence-synspunkt.

Eksempel 3: Problemløsningskompetence i standardopgave

I en afleveringsopgave gav jeg eleverne et tekstafsnit fra hjemmesiden www.hunde-info.dk. Af pladshensyn refereres det her blot at der i teksten optræder den oplysning at voksne hunde vejer fra 1 til 80 kg, samt at en normal voksen hund dagligt har brug for 240 kJ energi pr. kg kropsvægt. Der gives endvidere en potenssammenhæng mellem hundens masse m i kg og daglige energibehov E i kJ:

$$E = 523 \cdot m^{0{,}75}$$

Opsætningen her ligner den fra THJ’s eksempel på en “ufokuseret” – i min optik “overfokuseret” – opgave med “Gompertz-modellen”. Der kan i situationen stilles en række spørgsmål som eleven kan besvare uden dybere overvejelser – dvs. alene ved symbolhåndtering.

Ifølge THJ’s 2. hypotese mødes vi ofte af sådanne opgavetyper, og det er derfor – set i lyset af min pointe b – meget relevant at arbejde med hvordan vi kan udvikle de stillede opgaver alene ved simple justeringer. Jeg stillede i situationen følgende spørgsmål:

a) Beregn det daglige energibehov for den letteste og den tungeste voksne hund.
b) Hundefoder koster ca. 25 øre pr. 100 kJ det leverer til hunden. En vordende hundeejer ønsker maksimalt at bruge 8.000 kr. om året på sin voksne hund. Hvor tung må den højest være?
c) Teksten angiver et energiforbrug for en "normal voksen hund". Hvor tung har artikelforfatteren ifølge den matematiske sammenhæng sat en "normal voksen hund" til at være?

Det første spørgsmål er som opgave af præcis ovennævnte overfokuserede slags – man bør efter min mening ikke droppe dem, blot supplere dem med mere komplekse spørgsmål.

Det andet spørgsmål må således (på 1. g-niveau) betragtes som et problem – mine elever havde i hvert fald store problemer med det. Selve det at kunne overskue koblingen af to matematiske problemstillinger – et stykke købmandsregning og en bestemmelse af en til en y-værdi hørende x-værdi i en potenssammenhæng – må være et centralt aspekt af problemløsningskompetence.

Det tredje spørgsmål rummer et endnu mere kompliceret problem som kræver/træner en større aktionsradius hos eleven idet opgaven kræver en abstrakt formulering og udregning.

Konklusion

På baggrund af ovenstående bliver min konklusion, i form af anbefalinger til hvor den kompetenceorienterede matematikdidaktik/-pædagogik også bør gribe fat, følgende:

- Et af de påtrængende bidrag til matematikundervisere fra kompetencetænkningen er udvikling af redskaber til at kunne identificere de forskellige specifikke matematiske kompetencer i en given matematisk situation (fx i en opgave). Dette må bygge på et kompetencebegreb hvor en matematisk situation typisk påkræver aktivering af flere specifikke kompetencer.
- Hvis kompetencetænkningen ikke skal blive afvist som idealistisk og uimplementerbar, må ovennævnte redskaber vise hvordan man med mere eller mindre omfattende justeringer af den eksisterende praksis kan udvide undervisningens dækningsgrad af specifikke kompetencer. Her er inddragelse af modellerings- og problemløsningskompetence en af de største og væsentligste udfordringer.