Modellering versus problemløsning – om kompetencebeskrivelser som kommunikationsværktøj

Tomas Højgaard Jensen,
Institut for Didaktik, Danmarks
Pædagogiske Universitetsskole,
Aarhus Universitet

Abstract *I denne artikel argumenterer jeg for det hensigtsmæssige i at arbejde med (matematisk) modelleringskompetence og (matematisk) problemløsningskompetence som to væsensforskellige læringsmål fordi en sådan skelnen kan bruges som kommunikationsværktøj når der skal etableres en dagsorden i og omkring klasserummet i almindelighed, og når der skal udvikles og/eller vælges gode elevudfordringer i særdeleshed. Først karakteriserer jeg de to kompetencer. Derefter fremhæver jeg deres forskellige kerner, både abstrakt og mere konkret ved at analysere formuleringen af forskellige eksemplarisk valgte opgavetyper. Afslutningsvis omtaler jeg kort nogle af mine egne erfaringer med at bruge den fremlagte form for analyse i konkrete udviklingsrettede projekter og lægger op til videre undersøgelse, udvikling og debat ved at formulere to hypoteser om hvilke opgavetyper der dominerer den danske matematikundervisning, og hvorfor.*

Introduktion og konklusioner

Her er tre opgaver:

1. Hvilken transportform er bedst?
2. Hvordan afhænger den skat man betaler, af indkomstskatte-procenten og moms-procenten?
3. I den såkaldte Gompertz-model for en bestemt population af kyllinger kan sammenhængen mellem en kyllings vægt M (målt i kg) og kyllingens alder t (målt i døgn efter udklækning) beskrives ved

$\ln(M) = 1{,}6524 - 4{,}612 \cdot e^{-0{,}0423t}$.

a) Benyt modellen til at bestemme vægten af en kylling der er 30 døgn gammel, og bestem M som funktion af t.

I denne artikel, som er en udvidet og redigeret udgave af Jensen (i trykken), udfolder og eksemplificerer jeg følgende konklusioner:

- Refleksioner blandt og kommunikation mellem lærere og elever om kernen i forskellige matematiske kompetencer kan potentielt fremme mange ønskværdige typer arbejdsprocesser i matematikundervisningen.

  I den forbindelse er det frugtbart at arbejde med matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence som to kompetencer der i deres udøvelse ofte overlapper hinanden, men hvis læringsmæssige kerner er væsensforskellige.
- En del af potentialet ved at gøre sig de to kerners forskellighed klart består i at det kan fokusere måden lærere inviterer deres elever til at udvikle hver af de to kompetencer på, fx gennem formulering og/eller udvælgelse af skriftlige opgaver.

  Som eksempler herpå kan den første og den anden af de tre opgaver ovenfor bruges som invitation til at udvikle henholdsvis matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence, mens den tredje som kontrast er en kompetencemæssigt ufokuseret opgave som gør mere skade end gavn i forhold til at støtte udviklingen af disse to kompetencer.

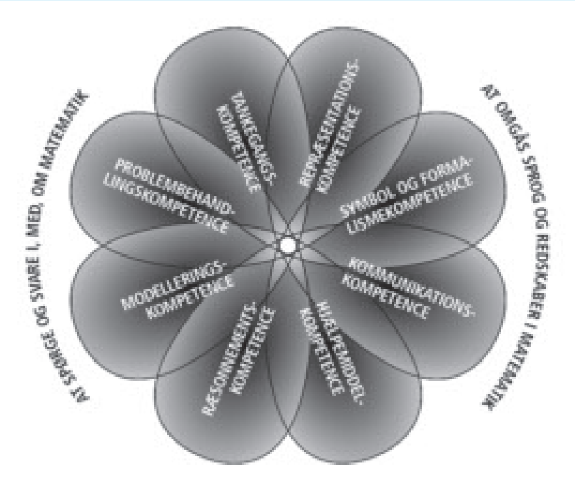
Et KOMpetenceperspektiv

Mit matematikdidaktiske forsknings- og udviklingsarbejde har i efterhånden lang tid haft en bestemt analytisk toning som rød tråd. Toningen kommer af mit engagement i udviklingen af en generel idé: at bruge et sæt af faglige komptencebeskrivelser som perspektiv på hvad det vil sige at mestre et fag, og i forlængelse heraf undersøge hvor, hvornår og hvordan et sådant kompetenceperspektiv på faglighed kan og bør bruges til at udvikle uddannelse og undervisning relateret til det pågældende fag. Afsættet var min deltagelse i det såkaldte KOM-projekt som handlede om at udfolde denne idé med eksplicit afsæt i en analyse af matematik som undervisningsfag.

KOM-projektet

Projektet "Kompetencer og matematiklæring" – her og mange andre steder refereret til som KOM-projektet – foregik i årene 2000-2002 under ledelse af Mogens Niss fra Roskilde Universitetscenter med mig som akademisk sekretær, omrejsende "kommunikationsminister" og medforfatter på den afsluttende rapport (Niss & Jensen, 2002). Begrebsanalytisk handlede KOM-projektet om at bevæge sig

- fra betoning af begrebet *kompetence*, som jeg – med en formulering der ikke ligger langt fra ordvalget i KOM-rapporten – bruger som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til at handle på en måde der lever op til udfordringerne i en given situation (Jensen, 2007a, s. 126; Jørgensen, 1999)
- over fokus på begrebet *en matematisk kompetence*, forstået som nogens indsigtsfulde parathed til at handle på en måde der lever op til *en bestemt slags matematiske udfordringer* i en given situation
- til konkret at identificere, karakterisere og eksemplificere *et sæt af matematiske kompetencer* som der kan argumenteres for er uafhængige dimensioner i en udspænding af hvad det vil sige at mestre matematik, jf. visualiseringen af anstrengelserne i figur 1.



Figur 1. En visuel repræsentation – "KOM-blomsten" – af de otte matematiske kompetencer som er omdrejningspunktet for det perspektiv på matematikundervisning som fremlægges i KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002, s. 45).

Et sæt af faglige kompetencebeskrivelser som dem fremlagt i KOM-rapporten (jf. figur 1) kan potentielt fungere som omdrejningspunkt for planlægning, tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af fagligt orienteret undervisning fordi sådanne beskrivelser kan gennemføres så de byder sig til som sproglig ramme for en fokuseret diskussion af målene med undervisningen (Blomhøj & Jensen, 2007a). Der er efterhånden gennemført mange udviklingsprojekter, bl.a. med fokus på matematik, som viser det.

Jeg har selv deltaget i adskillige sådanne projekter hvor potentialet ved at arbejde med matematikfaglige kompetencebeskrivelser blev forsøgt udnyttet. Det vender jeg tilbage til senere ved at omtale mine erfaringer fra to afsluttede projekter. Nu skal det handle om den del af KOMpetenceperspektivet der er i fokus i denne artikel: opfattelsen af matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence som to ofte overlappende, men essentielt helt forskellige dimensioner af matematisk kompetence.

Matematisk modelleringskompetence

Kort og unuanceret handler denne kompetence om at kunne håndtere matematikbeskrivelser af noget der i udgangspunktet ikke er matematisk.

Mere præcist bruger jeg *matematisk modelleringskompetence* som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at gennemføre alle dele af en matematisk modelleringsproces og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende (Jensen, 2007a, s. 126).

Med betydeligt flere ord og nuancer beskriver vi det således i KOM-rapporten:

> Denne kompetence består på den ene side i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne *"afmatematisere"* (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv.
>
> Aktiv modelbygning indeholder en række forskellige elementer. Først at kunne *strukturere* det felt eller den situation der skal modelleres. Dernæst at kunne gennemføre en *matematisering* heraf, dvs. en oversættelse af objekter, relationer, problemstillinger m.v. til et område af matematikken, resulterende i en matematisk model. At kunne *behandle* den opståede model, herunder løse de matematiske problemer den måtte give anledning til, samt at kunne *validere* den færdige model, dvs. bedømme dens holdbarhed både internt (i forhold til modellens matematiske egenskaber) og eksternt (dvs. i forhold til det felt og

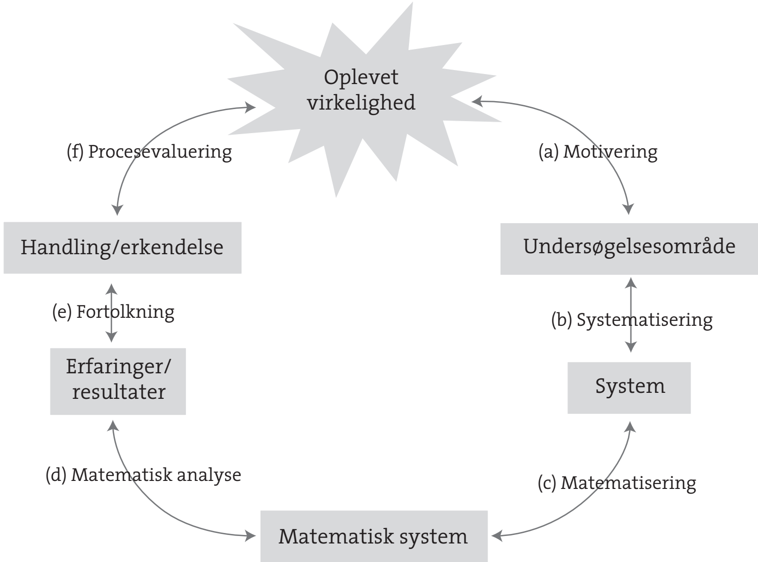
> den situation modellen omhandler). Der indgår tillige at kunne *analysere modellen kritisk*, både i forhold til dens egen brugbarhed og relevans og i forhold til mulige alternative modeller, og at kunne *kommunikere* med andre om modellen og dens resultater. Endelig indgår det i aktiv modelbygning at have *overblik* over og kunne *styre* den samlede modelleringsproces. (Niss & Jensen, 2002, s. 52)

Der er to karakteristika ved disse beskrivelser som er værd at bide mærke i. Det ene er at kompetencen – i lighed med alle sine "søskende" i KOM-rapporten – både har en *undersøgende* side hvor forståelse og kritisk bedømmelse af allerede udførte processer er i fokus, og en *produktiv* side hvor fokus er på selv at kunne gennemføre den type processer som kompetencen stiller skarpt på, in casu matematisk modellering (jf. Niss & Jensen, 2002, s. 63 f.; Jensen, 2007a, s. 126).

Det andet er at disse og andre kompetencebeskrivelser først for alvor får fylde og substans når man – som i anden del af citatet ovenfor – kaster sig ud i at beskrive sin forståelse af det eller de begreb(er) som rent sprogligt udgør stammen i navngivningen og karakteristikken af kompetencen. Hvis man forpligter enhver kommunikation om kompetencers indhold på en sådan begrebsafklaring, fastholdes kompetenceorientering som noget konstruktivt debatskabende. Analyser som dem i KOM-rapporten skal ikke læses som en religiøs besværgelse af nogle kanoniske begreber som blot har ventet på en endegyldig analytisk afklaring og efterfølgende læren udenad (Jensen, 2007a, s. 127).

Den matematiske modelleringsproces

Jeg "skylder" i forlængelse af ovenstående en beskrivelse af hvad jeg mener når jeg i kompetencekarakteristikken ovenfor taler om "en matematisk modelleringsproces". For mig betegner det – helt i tråd med beskrivelsen fra KOM-rapporten gengivet ovenfor – en kompleks og ofte meget lidt strømlinet proces der involverer mange forskelligartede tankemåder og former for handlinger. Jeg har i mange sammenhænge haft glæde af at arbejde med en model der beskriver processen ved hjælp af seks delprocesser, jf. visualiseringen heraf i figur 2. Ud over at fremstille de forskellige delprocesser på en måde der forhåbentlig hjælper med at bevare overblikket, har jeg her også forsøgt at "standse op" efter hver aktivitet og vurdere hvilket niveau i modelkonstruktionen man som modellør befinder sig på.



Figur 2. *En visuel repræsentation af en model af den matematiske modelleringsproces (Blomhøj & Jensen, 2007a, s. 48; Jensen, 2007a, s. 114).*

Modellen, og alle de begreber der indgår, er grundigt diskuteret og kommenteret i Jensen (2007a, s. 107 ff.). I artiklen her supplerer jeg med et eksempel, men først efter også at have bragt matematisk problemløsningskompetence i spil så jeg kan bruge eksemplet som led i at diskutere de to kompetencers forskellige kerner.

Matematisk problemløsningskompetence

Kort og unuanceret handler denne kompetence om at kunne håndtere en situation hvor man for at komme videre skal finde på et eller andet der ikke lige springer i øjnene (Jensen, 2007a, s. 120).

Mere præcist bruger jeg *matematisk problemløsningskompetence* som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at løse såvel rene som anvendelsesorienterede matematiske problemer og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende (Jensen, 2007a, s. 126).

I KOM-rapporten kombineres denne kompetence med det at kunne opstille matematiske problemer. Det betegnes matematisk problembehandlingskompetence og karakteriseres bl.a. med følgende ord:

> Denne kompetence består dels i at kunne opstille, dvs. detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer, "rene" såvel som "anvendte", "åbne"

> såvel som "lukkede", dels i at kunne løse sådanne matematiske problemer i færdigformuleret form, egnes såvel som andres, og, om fornødent eller ønskeligt, på forskellige måder.
>
> [...] Et (formuleret) matematisk problem er en særlig type matematisk spørgsmål, nemlig ét hvor en matematisk undersøgelse er nødvendig for besvarelsen. Sådan set kunne også spørgsmål, som kan besvares alene ved hjælp af (få) specifikke rutineoperationer, falde ind under begrebet "problem". Sådanne spørgsmål, som for den der skal løse dem, kan besvares ved aktivering af rutinefærdigheder, henregner vi imidlertid ikke under matematiske problemer i denne forbindelse. Derved bliver begrebet "matematisk problem" ikke absolut, men relativt til den person som stilles over for det. Det, som for én person kan være en rutineopgave, kan for en anden være et problem, og omvendt. (Niss & Jensen, 2002, s. 49-50).

Det centrale begreb at få hold på i forbindelse med disse kompetencer er "problem". Det er et af de begreber som jeg oplever størst usikkerhed og uafklarethed omkring når jeg holder kurser med faglige kompetencebeskrivelser som omdrejningspunkt for forskellige grupper af matematiklærere. Nogle taler om problemløsning når man regner opgaver, andre taler om opgaveregning når man løser et problem stillet af opgaven. Som supplement til KOM-citatet ovenfor om begrebet "problem" vil jeg derfor præcisere min forståelse heraf (jf. Jensen, 2007a, s. 120 ff., som resten af dette og begyndelsen af næste afsnit er redigerede uddrag af).

Opgave, øvelse og problem

"Opgave" bruger jeg bredt som betegnelse for en eksplicit formuleret udfordring, til forskel fra udfordringer som ikke er eksplicit formulerede, og som derfor kun er en udfordring i kraft af nogens læsning af situationen. En opgave har således en *objektiv* karakter, forstået således at hvorvidt der er tale om en opgave eller ej, ikke er afhængigt af hvem der stiller den eller modtager den.

Ved et "problem" forstår jeg en situation der involverer en række metodeåbne spørgsmål der udfordrer en eller anden intellektuelt som ikke umiddelbart er i besiddelse af direkte metoder/procedurer/algoritmer der er tilstrækkelige til at besvare spørgsmålene (jf. Blum & Niss, 1991, s. 37). Et problem har således en *subjektiv* karakter i kraft af karakteristikkens understregning af at det drejer sig om noget der *"udfordrer en eller anden"*. Derfor medfører eksistensen af et problem også eksistensen af en eller flere personer som det er et problem for.

En opgave kan for eksempel være "Slå græsset" eller "Find rødderne i andengradsligningen $2x^2+2x-4=0$". At skulle udføre et sådant stykke arbejde kan selvfølgelig sagtens give anledning til forskellige problemer. For eksempel kan græsslåmaskinen være gået i stykker, man kan have mistet sin formelsamling, eller man kan være på et for lavt uddannelses- eller erfaringsniveau (for et 8-årigt barn giver begge opgaver sandsynligvis anledning til problemer). Man kan altså stille alle en opgave, men ikke vide sig sikker på for hvem det er et problem.

For at kunne skelne klart mellem begreberne taler jeg om en "øvelse" hvis det med rimelighed kan antages at en opgave ikke er eller vil føre til et problem for modtageren. I de tilfælde hvor løsningen af opgaven giver anledning til et problem for modtageren, vil jeg benytte termen "problem" i stedet for opgave. Opgave bliver derfor foreningsmængden af begreberne øvelse og problem, og jeg benytter termen opgave når modtagerens formåen ikke kan afgøres, eller når opgavetypiseringen i øvelser og problemer ikke er i fokus.

Matematisk problemløsning

"Problemløsning" betegner simpelthen den proces hvorigennem man forsøger at løse et problem. Det helt centrale ved denne proces er at den – som "komplementærmængden" til arbejde med øvelser – er karakteriseret ved nødvendigheden af bevidste eller ubevidste *metodemæssige overvejelser*. I min ph.d.-afhandling (Jensen, 2007a, kap. 10) er der en længere diskussion af hvad sådanne overvejelser nærmere kan siges at bestå i, og hvilke udfordringer det i øvrigt kan give at skulle gennemføre en problemløsningsproces. Her skal jeg kun bruge påpegningen vedrørende det metodemæssige til en begrebsmæssig præcisering:

Jeg synes kun det er meningsfuldt at tale om "matematisk problemløsning" hvis det definerende ved processen – de metodemæssige overvejelser – involverer visse matematiske begreber, metoder og resultater. Det er med andre ord ikke matematisk problemløsning hvis matematikken først kommer på banen på det tidspunkt i processen hvor det i givet fald er lykkedes en at reducere problemet til en rutinemæssig øvelse.

En vigtig undervisningsmæssig konsekvens heraf er at man ikke kan nøjes med en simpel iagttagelse af om der optræder matematik i besvarelsen af en opgave, for at kunne afgøre om der har været tale om matematisk problemløsning. Man er nødt til at gå dybere ned i besvarelsen og arbejdsprocessen bag den for at afgøre karakteren af den måde matematik er brugt på.

De to kompetencers forskellige kerner

I en matematikundervisningspraksis er det nemt at forestille sig betydelige overlap mellem situationer der udfordrer henholdsvis matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence. Gennemførelsen af en matematisk modelleringsproces vil ofte indebære løsningen af et eller flere matematiske problemer, ikke mindst i forbindelse med matematiseringen og den matematiske analyse (fase c og d i figur 2), og alle anvendelsesorienterede matematiske problemer er del af en matematisk modelleringsproces som modtageren af problemet eventuelt blot føres ind i på et stadie hvor dele af processen er gennemført (Jensen, 2007a, s. 106 ff.).

"Kernen" i de to kompetencer er imidlertid forskellig, hvilket jeg nu vil udfolde nærmere ved at diskutere karakteren af hver type udfordring og relevansen af forskellige typer opgaver i den forbindelse.

Problemløsning og følelsen af fastlåsthed

Matematisk problemløsningskompetence handler om at håndtere en personlig oplevelse, hvis væsentligste karakteristika er *frustration* over at være kognitivt fastlåst – man ved ikke hvordan man skal få "hul på bylden" (jf. Blomhøj & Jensen, 2003, s. 127).

Som eksempel vil jeg stille dig som læser følgende opgave, lånt fra Schoenfeld (1985) som er en matematikdidaktisk klassiker og pionerudgivelse om matematisk problemløsning:

> En vilkårlig trekant kan deles i to dele ved hjælp af et linjestykke parallelt med den ene side i trekanten. Hvordan skal linjestykket placeres så de to dele af trekanten bliver lige store?

Som læser af denne artikel er du sandsynligvis en der beskæftiger sig professionelt med matematikholdig undervisning, så jeg vil tro denne opgave opleves som et matematisk problem og derfor inviterer til matematisk problemløsning fordi du

- i den konkrete situation godt *forstår opgaven* og har et klart billede af hvad udfordringen går ud på
- godt kan se at der må eksistere en rimelig klart identificerbar *løsning*
- ikke umiddelbart ved hvordan man skal nå frem til den.

Modellering og håndteringen af åbenhed

Matematisk modelleringskompetence handler om en arbejdsproces hvis væsentligste karakteristika er behovet for forskellige former for *afgrænsning og præcisering* for at leve op til det definerende ved processen: at gøre en ekstra-matematisk udfordring tilgængelig for matematisk repræsentation og bearbejdning. Afgrænsningsbehovet opstår ikke mindst i de indledende "ydre" dele af modelleringsprocessen hvor der er rigtig meget andet end matematik i spil. Det svarer til de delprocesser der på figur 2 betegnes motivering og systematisering.

På grund af den "underbestemte" karakter af disse meget åbne dele af modelleringsprocessen kan hovedudfordringen ofte beskrives som *"handlingslammelse grundet de mange forskellige veje man kan gå og fraværet af et udleveret kompas at navigere med"* (jf. Blomhøj & Jensen, 2003, s. 127). Man skal håndtere de mange tilsyneladende lige meningsfulde valg der skal træffes før matematiske begreber og teknikker kan være til nogen nytte, kombineret med manglen på en veldefineret strategi for hvordan man træffer disse valg. Set gennem en didaktisk "kompetencelinse" er matematisk modellering primært interessant som læringsaktivitet hvis processen indebærer et sådant forsøg på håndtering af åbenhed (jf. Niss & Jensen, 2002, s. 52-53).

Et illustrerende, udfoldet eksempel

Lad mig illustrere det didaktiske potentiale ved at arbejde med matematisk modelleringskompetence ved at komme med det tidligere lovede eksempel. Det har form af en konstrueret episode (Blomhøj, 2006; Blomhøj & Jensen, 2007b) hvor nogle elever på demonstrativt eksplicit vis arbejder med de "ydre" dele af en matematisk modelleringsproces som den er beskrevet i figur 2. Afsættet er den første opgave fra denne artikels indledning:

Hvilken transportform er bedst?

Hvis vi lader de to 9.-klasses-elever Adam og Berit udøve deres veludviklede matematiske modelleringskompetence med afsæt i denne opgave, kan det eksempelvis se sådan ud:

> A: Blandt lærerens forskellige oplæg til vores modelleringsprojekt synes jeg vi skal lade os inspirere af det om *transportformer*. Jeg har selv indimellem overvejet hvilken der er den bedste at bruge. Skal vi ikke undersøge det ved hjælp af matematisk modellering?
> B: Det kan man da ikke undersøge sådan uden videre – det afhænger af hvad man mener med "transportform" og "bedst".
> A: Jeg tænker på situationen hvor jeg skal til skole: Jeg kan vælge mellem at gå, cykle, tage bussen eller få et lift af min mor, så kan vi ikke sammenligne de fire transportformer?
> B: Jo, okay, men det er stadig for svævende at spørge om hvad der er "bedst": Bilen er nok hurtigst og mest komfortabel, mens man i bussen møder flest nye og spændende mennesker. På cyklen får man til gengæld mest motion og frisk luft, mens man ved at gå nok opfører sig mest miljørigtigt.
> A: Det med miljøet er noget af det jeg tænker på når jeg overvejer hvilken transportform jeg skal vælge. Jeg plejer at tage bussen – hvorfor tror du at det er mest miljørigtigt at gå?
> B: Det ved jeg heller ikke om jeg tror – det var bare et eksempel! Men det kan vi jo vælge at undersøge: "Hvad er den mest miljørigtige transportform?"
> A: Nej, det duer ikke; "miljørigtig" er lige så upræcist og individuelt som "bedst". Men vi kan kigge på energiforbruget ...

(Adam og Berit vælger at analysere energiforbruget forbundet med forskellige konstruerede, men for dem virkelighedsnære scenarier med fokus på hver sin transportform. Energiforbruget i forbindelse med bilmuligheden volder lidt vanskeligheder fordi det afhænger af om bilen skal køre turen alligevel. Hvis det er tilfældet, er det oplagt at der ikke er noget ekstra energiforbrug. Hvis det ikke er tilfældet, afgrænses systemet til kun at handle om benzinforbruget. De har også vanskeligt ved at matematisere busscenariet på grund af på- og afstigningsproblematikker og ender med simpelthen i første omgang ikke at medtage denne mulighed i modellen. Herefter følger en god gang matematisk analyse af det producerede datamateriale og fremkomsten af nogle modelresultater som nu skal fortolkes inden den samlede modelleringsproces evalueres).

B: Selv om cykling ifølge vores modelberegninger med fokus på energiforbrug er den bedste transportform, vil jeg stadig som regel vælge at tage bussen til skole. Jeg har mindst 10 kilometer hver vej, så jeg bliver træt bare ved tanken om at cykle, hvorimod bussen er et sted jeg sidder og slapper af.
A: Det kan jeg godt forstå. Jeg har kun godt og vel én kilometer til skole, så for mig er alene ventetiden ved busstoppestedet lang nok til at det er hurtigere at cykle. Jeg ville ikke engang tage bussen selv om den ingen energi brugte, så vores modellering er et utilstrækkeligt grundlag for at vælge transportform.
B: Når vi begge to er så optagede af hvor lang tid turen tager, skulle vi måske forsøge at opstille en model hvor vi afgrænser os til at se på transporttiden som kriterium for hvilken transportform der er bedst. Når jeg tænker på os to, vil jeg tro at svaret bliver noget med en funktion af hvor langt man skal transporteres.
A: Ender den model ikke uundgåeligt med at have samme ulempe som før: Transporttiden alene er da også et urealistisk simpelt grundlag for at vælge transportform.
B: Ja, selvfølgelig, men sidst fik vi da lavet en god sammenligning ved at antage at energiforbruget er det eneste der betyder noget, selv om det selvfølgelig er urealistisk. Det kan vi vel gøre igen og så bagefter diskutere hvordan man i praksis kan kombinere de to modeller.
A: Jeg synes hellere vi skal prøve at modellere en situation hvor både energiforbruget og transporttiden fra starten af indgår i det system vi vælger at sætte fokus på. Det virker meget mere realistisk.
B: Ja, det synes jeg også, men jeg tror også det bliver mere uoverskueligt og derfor en dårligere hjælp til at få overblik over problemstillingen, og jeg er heller ikke sikker på at vi kan finde ud at jonglere med den matematik der skal til for at matematisere det system du snakker om. Men begge dele kan jo komme an på en prøve …

Her lukker jeg ned for episodekonstruktionen – Adam og Berit har gjort tilstrækkeligt til at jeg på baggrund af deres arbejde kan fremdrage tre pointer. Den første handler om selve dialogen ovenfor: Det at arbejde med sådanne episoder i almindelighed og det at tumle med selve konstruktionen af dem i særdeleshed har et stort potentiale i forhold til det at arbejde med faglige kompetencebeskrivelser som didaktisk kommunikationsværktøj. Jeg har sammen med gode kollegaer brugt denne tilgang i forskellige sammenhænge, og erfaringerne herfra peger især på to kilder til dette potentiale. Den ene er at man med en episodisk tilgang får fokuseret på det som kompetencebeskrivelser per natur handler om: Nogle der bredt forstået handler – snakker sammen og/eller på anden måde udviser aktivitet – i forhold til nogle udfordringer i en konkret situation. Den anden er at man får etableret en konkret forbindelse mellem nogle ikke altid lige let tilgængelige læringsmål og en konkret klasserumspraksis, og det virker altid forpligtende og dermed udviklende på den relationelle forståelse (Skemp, 1978) af begge dele.

Den anden pointe er at transportopgaven i min optik som kompetenceorienteret matematiklærer har potentiale som invitation til at arbejde med alle dele af en matematisk modelleringsproces og dermed potentiale til at udvikle de involveredes matematiske modelleringskompetence med fuld dækningsgrad (Niss & Jensen, 2002, s. 64-66; Jensen, 2007b). Det skyldes at det med afsæt i denne opgave forekommer mig naturligt og ikke-tænkt at se en proces som den konstruerede for mit indre blik. I tekstboksen har jeg anført nogle flere eksempler på opgaver som jeg har erfaring for har dette potentiale. Her er der frit slag for egen afprøvning af eksemplerne med afsæt i konstruktion af nye episoder fra klasserummet. Eksemplerne er kategoriseret med tanke på undervisningens tilrettelæggelse (jf. Jensen, 2007a, s. 196): Den ene kategori er tænkt som oplæg til undersøgelser som kan bruges som inspiration ved etableringen af et projektarbejde, og den anden kategori som oplæg til korterevarende opgaveløsning som kan fungere inden for rammerne af en undervisningslektion eller to.

Den tredje pointe er at hverken opgave 2 eller 3 fra artiklens indledning har dette potentiale til at udvikle opgavemodtagernes matematiske modelleringskompetence med fuld dækningsgrad. Det er blandt andet begrundet i at det kræver mere end almindelig god fantasi at se en modelleringsproces som den er beskrevet ovenfor, for sit indre blik med afsæt i disse opgaver. Det vil reelt kræve omformulering af opgaverne i en grad så der er tale om nye opgaver med et anderledes fokus og læringsmæssigt sigte.

Eksempler på opgaver der er udviklet til og brugt på 9. klassetrin (Jensen et al., s. 14 ff. og 168 ff.) og gymnasialt niveau (Jensen, 2007a, appendiks C og E) med det eksplicit udtrykte mål at støtte udviklingen af elevernes matematiske modelleringskompetence.

Invitationer til at udvikle matematisk modelleringskompetence
– længere varighed (2-4 uger):

1. Hvilken transportform er bedst?
2. Kan man motionere sig slank?
3. Hvordan kan man navigere?
4. Hvor mange vindmøller skal der bygges i Danmark?
5. Hvad er den bedste form på en konservesdåse?

Invitationer til at udvikle matematisk modelleringskompetence
– kortere varighed (inden for 1-2 lektioner):

6. Hvor meget stof skal man bruge til at lave en borddug?
7. Tegn en skitse af et hus på 135 m^2.
8. Hvor langt væk er horisonten?
9. Hvor langt fremme ad vejen skal der være fri bane for at man sikkert kan overhale?
10. Hvor lange brædder kan man få rundt om et hjørne?

Invitationer til at udvikle matematiseringskompetence
– kortere varighed (inden for 1-2 lektioner):

11. Hvordan afhænger den skat man betaler, af indkomstskatte-procenten og momsprocenten?
12. Under udsalg får man ofte rabat som en procentdel af varens normale pris. Er det smartest at bede om at få rabatten trukket fra før eller efter at momsen lægges til prisen?
13. Hvor mellem tre lige store byer skal områdets eneste gymnasium ligge?
14. Hovedet på et snapsglas har form som en omvendt kegle. Hvor højt skal snapsglasset være skænket for at være halvt fyldt?
15. En indhegning skal laves så den har form som et rektangel med en halvcirkel i den ene ende. Hvor stort et stykke jord kan man indhegne med et givet antal meter hegn til rådighed?

Matematiseringskompetence

Opgave 2 fra indledningen – hvordan afhænger den skat man betaler, af indkomstskatte-procenten og moms-procenten? – er konstrueret som en invitation til at arbejde med matematisering, matematisk analyse og fortolkning, svarende til faserne c til e i en matematisk modelleringsproces (jf. figur 2). Motiveringen og systematiseringen af udfordringen er der allerede taget hånd om gennem formuleringen af opgaven, og tilbøjeligheden til at evaluere modelleringsprocessen i sin helhed (fase f i figur 2) kommer i vid udstrækning af selv at have arbejdet med de indledende afgrænsende dele af processen (jf. Jensen, 2007a, s. 147-149). Opgaver af denne type kan som nævnt ikke bruges til at udfordre matematisk modelleringskompetence med fuld dækningsgrad, men de kan med den rette formulering og orkestrering udfordre en læringsmæssigt ofte helt afgørende del heraf: anvendelsesorienteret matematisk problemløsning med fokus på matematisering (ibid., s. 195-197).

Denne kombination vil jeg betegne *matematiseringskompetence*, som jeg i forlængelse af min generelle kompetencedefinition (jf. tekstboksen om KOM-projektet) mere formelt vil karakterisere som nogens indsigtsfulde parathed til at løse problemer som opleves som sådan fordi de inviterer til matematisering. I tekstboksen er der nogle flere eksempler på opgaver som jeg har erfaring for kan bruges til at udfordre denne kompetence på 9.-klasses-niveau og på de gymnasiale uddannelser.

Udspænding af kompetencerne

Figur 3 er et bud på en sammenlignende didaktisk udspænding af matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence, med afsæt i de begrebsdannelser og -forståelser jeg har fremlagt i denne artikel. Hver opgave i skemaet er udvalgt med henblik på at være eksemplarisk for den kategori den repræsenterer. Som det fremgår af overlappet med boksen med faktisk anvendte opgaveeksempler, er de fire opgaver øverst til venstre i skemaet udviklet og anvendt i konkrete projektsammenhænge.

Det ville være givende at gennemføre en sammenstilling som den i figur 3, baseret på en række konstruerede episoder. Når jeg ikke har gjort det her, skyldes det dels pladshensyn, dels at jeg har erfaret at der er en formidlingsmæssig pointe ved samlede ensides-fremstillinger som kan stå og "blinke" som en implicit udfordring til videre kollektiv udfoldning i forskellige undervisningssammenhænge.

Invitationer til ...	**Matematisk problemløsning**	**Matematisk øvelsesarbejde**	**Hverken problemløsning eller øvelsesarbejde**
Matematisk modellering	Hvilken transportform er bedst?	Hvor meget stof skal man bruge til at lave en borddug?	Irrelevant kategori.
Autentisk matematisering	Hvordan afhænger den skat man betaler, af indkomstskatte-procenten og moms-procenten?	Tegn en skitse af et hus på 135 m^2.	Irrelevant kategori.
Pseudo-ekstra-matematisk orientering	Et par sko med snørebånd koster 110 kr. Skoene koster 100 kr. mere end snørebåndene. Hvad koster snørebåndene?	Anna og Bob tjener 20 % af indtægten ved at sælge is. Hvor meget tjener de hvis indtægten er a) 100 kr.? b) 500 kr.? c) …	I den såkaldte Gompertz-model for en bestemt population af kyllinger kan sammenhængen mellem en kyllings vægt M (målt i kg) og kyllingens alder t (målt i døgn efter udklækning) beskrives ved $\ln(M)=1{,}6524-4{,}612\cdot e^{-0{,}0423t}$. a) Benyt modellen til at bestemme vægten af en kylling der er 30 døgn gammel, og bestem M som funktion af t.
Ingen ekstra-matematisk orientering	En bestemt terning har et rumfang der er k gange større end rumfanget af en anden given terning. Hvad er forholdet mellem overfladearealerne på de to terninger?	En funktion f er givet ved $f(x)=x^3-3x^2+4$ Bestem $f'(x)$, og bestem monotoniforholdene for f.	To funktioner f og g er givet ved $f(x)=x^2-x+2$ $g(x)=-x^2+5x-\frac{5}{2}$ a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2,f(2))$. Det oplyses at graferne for f og g har netop ét fælles punkt, Q. b) Bestem koordinatsættet til Q.

Figur 3. *Eksempler på opgaver der kan bruges til en didaktisk udspænding af matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence.*

Erfaringer og arbejdshypoteser

Min forståelse af og tilgang til matematisk problemløsningskompetence og – ikke mindst – matematisk modelleringskompetence er formet af mine erfaringer fra deltagelse i adskillige projekter som har haft disse kompetencer som mere eller mindre centrale elementer:

KOM-projektet med fokus på begrebsafklaring som grundlag for en samlet kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed (Niss & Jensen, 2002).

Allerød-forsøget med fokus på potentialer ved og hindringer for at gøre udvikling af matematisk modelleringskompetence til omdrejningspunkt for matematikundervisningen gennem to år i en forsøgsklasse på Allerød Gymnasium (Jensen, 2007a).

Strukturering af lærebogssystemet Matematrix under inddragelse af hele begrebsforståelsen fremlagt her: systematisk opdeling i oplæg til problemløsning og øvelsesregning og systematisk arbejde med de tre modelleringsrettede opgavetyper fra tekstboksen (se fx Jensen et al., 2002).

LEKS-projektet, hvor min del havde fokus på observationer af to 9.-klasser og deres respektive matematiklæreres arbejde med udvalgte anvendelsesorienterede PISA-opgaver og overhalingsopgaven fra tekstboksen (afventer slutrapportering – se www.dpu.dk/leks).

DQME II-projektet, hvor min del har fokus på observationer af en gymnasielærers særligt tilrettelagte forløb med sigte på udvikling af elevernes matematiske modelleringskompetence (igangværende – se www.dqime.uni-dortmund.de).

KOMPIS-projektet, hvor min del kommer til at have fokus på en modificeret gentagelse af Allerød-forsøget i en 8.-9.-klasse i Slagelse Kommune (under opstart – se www.kompis.dk).

Ærindet med denne artikel er ikke at rapportere i detaljer om disse erfaringer, så jeg vil nøjes med en enkelt observation som går på tværs af alle de nævnte projekter, og som jeg endnu ikke har mødt undtagelser fra: At forsøge helhjertet at støtte nogens udvikling af faglige kompetencer i almindelighed og matematisk modelleringskompetence i særdeleshed er for alle involverede parter en både meget meningsfuld og meget kompleks og krævende udfordring.

Ethvert forsøg på at møde en sådan udfordring vil derfor indebære en afvejning af entusiasme – drevet af oplevelsen af meningsfuldhed – og apati – drevet af oplevelsen af både tidsmæssig og mental ressourcemangel. Det er både forventeligt og i overensstemmelse med mine erfaringer at forskellige former for støtte og opmuntring til at gennemføre kompetenceorienteret undervisning vil skubbe denne afvejning i retning af entusiasme og væk fra apati. Tilsvarende vil det modsatte forventeligt være tilfældet hvis den enkelte aktør oplever en mangel på støtte og opmuntring.

Jeg har ikke forsøgt at gå systematisk til værks i forhold til at vurdere matematikundervisningens "helbredstilstand" i forhold til denne afvejning, men jeg har to ikke alt for optimistiske hypoteser om brugen af de forskellige opgavetyper i figur 3 som jeg håber kan bidrage til fremadrettet debat og udvikling.

Den ene hypotese er at invitationer til matematisk modellering alt for ofte erstattes af invitationer til matematisering – fordi matematiseringsopgaver er nemmere at formulere og orkestrere som lærer, nemmere at forstå og arbejde med som elev og nemmere at arbejde med i eksamenssammenhæng som lærer og "system". Dette kombineret med at der ikke ydes nogen form for systematisk støtte til at bevæge sig i den modsatte retning – hvad eksamensopgaver angår snarere tværtimod.

Den anden hypotese er at invitationer til matematisering af de samme grunde alt for ofte erstattes af pseudo-ekstra-matematisk orienterede opgaver som hverken er fokuserede oplæg til matematisk problemløsning eller til matematisk øvelsesarbejde.

Den tredje opgave fra introduktionen er et eksempel på en sådan type opgave, jf. samme opgaves placering i figur 3. Den fungerer også som en god illustration af den tendens jeg forsøger at skitsere med de to hypoteser, i og med at den som én blandt mange af sin slags er et eksempel på den mest udbredte opgavetype i et aktuelt opgavesæt (maj 2008) til den skriftlige eksamen på det almene gymnasiums højeste niveau i matematik.

Hvad kunne alternativet til denne type eksamensopgaver være? Det er en uhyre relevant og udfordrende problemstilling som fortjener sin egen selvstændige analyse og diskussion. Her vil jeg nøjes med at anføre et enkelt konkret bud fra Allerød-forsøget: I tekstboksen med opgaveeksempler stammer nummer 9, 10, 11, 13, 15, 16 og 17 fra den skriftlige årsprøve, terminsprøve og afsluttende skriftlige studentereksamen (jf. Jensen, 2007a, appendiks E). Der er masser af udfordringer gemt i at finde måder at bedømme elevernes arbejde med opgaver som disse på (ibid., s. 230 ff.), men tænk engang: Hvor meget mere kraftfuldt et signal om at tage kompetenceorienteringen alvorligt ville det ikke være hvis opgaver i stil med disse slog tonen an i centralt stillede skriftlige eksamener i matematik?

Referencer

Blomhøj, M. (2006). Konstruktion af episoder som forskningsmetode – læringsmuligheder i IT-støttet matematikundervisning. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes? – om matematiklæring* (s. 228-254). København: Malling Beck.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*, s. 123-139.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007a). What's all the fuss about competencies?

Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. I: W. Blum et al. (red.), *Modelling and applications in mathematics education – The 14th ICMI-study* (s. 45-56). New York: Springer.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007b). SOS-projektet - didaktisk modellering af et sammenhængsproblem. *MONA, 2007(3)*, s. 25-53.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, s. 37-68.

Haines, C. & Galbraith, P. & Blum, W. & Khan, S. (red.) (2007). *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics (ICTMA 12)*. Chichester, UK: Horwood.

Jensen, T.H., Larsen, L.H., Pedersen, B.B. & Sonne, H. (2002). *Matematrix 9*. København: Alinea.

Jensen, T.H. (2007a*). Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt – hvorfor ikke?* IMFUFA-tekst, nr. 458. Roskilde: Roskilde Universitetscenter. Ph.d.-afhandling. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Jensen, T.H. (2007b). Assessing mathematical modelling competency. I: Haines, C. et al., *2007* (s. 141-148).

Jensen, T.H. (i trykken). Communicating the Name of the Game in Mathematics Education: The Different Foci of Mathematical Modelling Competency and Mathematical Problem Solving Competency. I: R. Lesh et al. (red.), *Mathematical Modelling (ICTMA 13): Education and the Design Sciences* (foreløbig titel). Chichester, UK: Horwood.

Jørgensen, P.S. (1999). Hvad er kompetence? – Og hvorfor er det nødvendigt med et nyt begreb? *Uddannelse, 9*, s. 4-13.

Niss, M. & Jensen, T.H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, nr. 18. København: Undervisningsministeriet.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London, UK: Academic Press.

Skemp, R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Arithmetic Teacher, 26 (3)*, s. 9-15.

Abstract

In this paper I argue in favour of making a clear distinction between mathematical modelling competency and mathematical problem solving competency. Such a distinction has proven useful when working with competency descriptions as a communicative tool in mathematics education in general and when analysing the formulation of tasks in particular. The two competencies are characterised and their different foci are highlighted. This is exemplified by the formulation of different kinds of tasks, and two hypotheses are offered for further debate and investigation concerning the kinds of tasks that dominate in mathematics education and why.