Samspillet mellem matematik og de andre fag i gymnasieskolen

Matematikfaget og reformen af de ungdomsgymnasiale uddannelser

Claus Michelsen,
Institut for Matematik og Datalogi, Syddansk Universitet

Steffen M. Iversen,
Roskilde Katedralskole

Abstract *Som en konsekvens af 2005-reformen af de ungdomsgymnasiale uddannelser skal eleverne vælge mellem de såkaldte studieretningsforløb der giver mulighed for at arbejde i en sammenhængende periode på 2 ½ år med retningens fag. Reformens krav om øget samspil mellem fagene lægger op til omfattende ændringer af de gymnasiale uddannelsers matematikundervisning. Erfaringerne med en bevidst inddragelse af matematiske kompetencer i andre fag er begrænsede. Det skyldes bl.a. at der mangler såvel en konceptuel ramme som en didaktisk model for samspillet mellem matematik og andre fag samt konkrete og veldokumenterede eksempler på undervisningsforløb med et for både lærere og elever udbytterigt samspil. I artiklen præsenteres en række positioner vedrørende matematikundervisningen som vi lader spille sammen med en analyse af relevant forskning inden for matematikkens didaktik der mere eller mindre eksplicit inddrager matematikfagets relationer til andre fag. På baggrund heraf udvikles et koncept for matematiks samspil med andre fag bestående af tværfaglige kompetencer som den konceptuelle ramme og en didaktisk model hvor samspillet opfattes som en iterativ bevægelse mellem (1) horisontal sammenkædning af fagene og (2) vertikal strukturering i fagene. Der gives to eksempler hvor fagoverskridende kompetencer og den didaktiske model er anvendt som et redskab til at udvikle undervisningsforløb hvor matematik indgår i et tæt samspil med andre fag: (1) matematik og naturfagene og (2) matematik og filosofi.*

Introduktion

Et af hovedformålene med reformen af de danske ungdomsgymnasiale uddannelser i 2005 er at styrke fagligheden bl.a. gennem et stærkere fagsamspil i de såkaldte studieretningsforløb. Specielt blev vigtigheden af et øget samspil mellem de naturvidenskabelige fag fremhævet med henvisning til at forsøg med særlige naturvidenskabelige klasser og med fagpakker inden for matematik, fysik og kemi har vist at øget samspil på fagenes høje niveauer styrker mulighederne for faglig fordybelse (Undervisningsministeriet, 2003). De faglige rapporter fra Undervisningsministeriet peger på at matematikfaget i det almene gymnasium i dag fremstår fagligt isoleret, og initiativer der kan ændre på dette, er tiltrængte (Niss & Jensen, 2002; Andersen et al., 2003). En effektiv udnyttelse af disse potentialer i matematikundervisningens praksis forudsætter en konceptuel ramme med en tilhørende didaktisk model for samspillet mellem matematik og andre fag samt konkrete og veldokumenterede eksempler på undervisningsforløb med et for både lærere og elever udbytterigt samspil.

Matematikfagets isolation

Kaput (1994) anvender betegnelsen "the island problem" til at beskrive den matematiske formalisme og elevens autentiske erfaring som to disjunkte størrelser. Der er et "gab" mellem "øen" hvor den abstrakte og formalistiske matematik holder til, og "hovedlandet" hvor elevens autentiske erfaringer befinder sig. Det betyder at der i matematikfaget ikke findes en egentlig videnskilde som eleverne kan afbilde på et højere begrebsniveau. Læring af abstrakte matematiske begreber vil derfor blive reduceret til afbildninger mellem forskellige notationssystemer der alle repræsenterer det samme begreb. I NCTM[1]'s *Principles and Standards for School Mathematics* peges der i kapitlet vedrørende matematikundervisningen på 9.-12. skoleår på at *"as students' knowledge of mathematics, their ability to use a wide range of mathematical representations, and their access to sophisticated technology and software increase, the connections they make with other academic disciplines, especially the sciences and social sciences, give them greater mathematical power* (NCTM, 2000, s. 354).

Som et resultat af KOM-projektet udsendte Undervisningsministeriet rapporten *Kompetencer og Matematiklæring*. Rapporten afdækker og identificerer en række problemstillinger relateret til matematikundervisningens begrundelse. I denne kreds af problemstillinger indgår det såkaldte "relevansparadoks" som består i misforholdet mellem matematikkens objektive, om end oftest skjulte, relevans for samfundets virksomhed bredt forstået og den subjektive irrelevans som mange af matematikundervisningens modtagere føler med hensyn til deres egen beskæftigelse med matematik. Rapporten peger med "relevansparadokset" på at der ofte er problemer med at bringe

1 NCTM er den amerikanske matematiklærerorganisation. NCTM udgiver regelmæssigt omfattende publikationer der i matematik-didaktiske kredse omtales som "NCTM Standards". Ud over det ovenfor omtalte dokument har NCTM udgivet *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* i 1989, *Professional Standards for Teaching* i 1991 og *Assesment Standards for School Mathematics* i 1995. Hensigten med publikationerne er at tilbyde en resurse og guide til alle der er involveret i debatten om og beslutninger vedrørende matematikundervisningen fra 0. til 12. skoleår.

matematikfaget i samspil med andre fag. Det er vanskeligt for lærere i andre fag – og for matematiklærere – at se hvad matematik gør godt for i netop deres fag. Og det på trods af at flere og flere fag rummer matematikholdige ingredienser i stadig stigende omfang (Niss & Jensen, 2002).

De traditionelle grænser mellem fagene i gymnasieskolen afspejler langtfra matematikkens rolle i den moderne interdisciplinære videnskabelige virksomhed og anvendeligheden af matematik i praksis. Steen (2005) understreger i rapporten *Math and Bio 2010* at den moderne biologi stiller uddannelsessystemet over for store udfordringer der bl.a. skyldes de studerendes manglende erfaringer med at anvende matematiske kompetencer i biologiske kontekster og fokuseringen på monofaglig undervisning gennem hele uddannelsesforløbet. Med reference til John Dewey peger Lesh & Sriraman (2005) på at forudsætningen for udvikling af matematisk forståelse er at eleverne involveres i læringsaktiviteter hvor de opmuntres til at matematisere virkeligheden ved at udtrykke, teste og revidere deres egne måder at tænke på. Dette gør udviklingen af kraftfulde modeller til et af matematikundervisningens vigtigste mål, og eleverne må allerede tidligt i uddannelsesforløbet involveres i modellering af virkelighedens komplekse systemer.

Fagoverskridende kompetencer som konceptuel ramme for samspillet mellem fag

Traditionelt beskrives fagene i den danske gymnasieskole gennem deres faglige indhold. Undervisningen i matematik og andre fag er bygget op omkring faglig progression og en løbende (hierarkisk) tilegnelse af det pågældende fags metoder og teknikker. En sådan beskrivelse fokuserer i høj grad på fagenes pensa og hvilke operationer eleverne skal være i stand til at udføre i relation til disse.

Matematiske kompetencer

Rapporten *Kompetencer og Matematiklæring* har bl.a. til hensigt at ændre denne reduktion af beskrivelsen af matematisk faglighed i form af elevens konkrete viden om et bestemt stof og færdigheder der knytter sig til dette. Dette gøres ved at definere otte centrale matematiske kompetencer der beskriver hvad det vil sige at mestre faget matematik: tankegangskompetence, problembehandlingskompetence, modelleringskompetence, ræsonnementskompetence, repræsentationskompetence, symbol- og formalismekompetence, kommunikationskompetence samt hjælpemiddelkompetence.

Kompetencebeskrivelsen af matematisk faglighed skal danne basis for en fælles referenceramme for matematikundervisningen på alle niveauer i det danske uddannelsessystem. En matematisk kompetence forstås her i betydningen "ekspertise" og er defineret som *"indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer"* (Niss & Jensen, 2002, s. 43).

Rapporten om matematikfaget har været en spydspids for lignende projekter inden for andre fagområder. I rapporten om de naturfaglige fag *Fremtidens naturfaglige uddannelser* (Andersen et al., 2003) gives der en kompetencebeskrivelse inspireret af KOM-projektet hvor der skelnes mellem fire naturfaglige delkompetencer: empirikompetence, modelleringskompetence, repræsentationskompetence og perspektiveringskompetence.

Selv om det er muligt at formulere kompetencebeskrivelser af andre fag end matematik (endda indeholdende mange af de samme termer), konkluderes det i *Kompetencer og Matematiklæring* at de otte matematiske kompetencer er fagspecifikke og må opfattes som kun hørende til faget matematik (Niss & Jensen, 2002). Selv om det ikke er hensigten, lukker fokuseringen på kompetencerne som hørende udelukkende til faget matematik ned for den brede tilgang til matematisk faglighed som det er målet at etablere. For os fremstår de matematiske kompetencer også som et normativt fagoverskridende didaktisk værktøj, og vi vil i det følgende argumentere for at visse (alle?) matematiske kompetencer kan være det substrat der muliggør en sammenkædning af matematikken og andre fagområder. De er fagoverskridende kompetencer.

Fagoverskridende kompetencer

Dahland anvender udtrykket *sammenfaldende didaktiske opfattelser* (Dahland, 1998, s. 49). Det er et udtryk for at der blandt forskellige fags didaktik kan spores en række analoge opfattelser eller elementer der udgør en didaktisk fællesmængde. For eksempel indeholder matematikkens, fysikkens og biologiens didaktik alle fagspecifikke elementer, men derudover kan der identificeres didaktiske opfattelser der tilhører to af de tre fags didaktik eller alle tre fags didaktik.

Det faktiske indhold af disse fællesmængder afhænger i sidste ende af hvilket perspektiv man anlægger. Michelsen (2001) anvender Dahlands model på kompetencebegrebet til at identificere sammenfaldende didaktiske opfattelser af faget matematik og andre af gymnasieskolens fag. Kompetencer der rækker ud over matematikfaget, kaldes *fagoverskridende kompetencer*. En identifikation af sådanne kompetencer muliggør opstillingen af relevante sammenhænge, kontekster og problemstillinger der kan danne en basis for læringsaktiviteter hvor matematik spiller sammen med andre fag. Med fokus rettet mod identifikationen af relevante fagoverskridende kompetencer undgår man at aktiviteterne tager udgangspunkt i genstandsområder der bygger på et for snævert emneområde eller på simple lingvistiske fællestræk fagene imellem.

Vi vil specielt betragte modelleringskompetencen, repræsentationskompetencen og ræsonnementskompetencen. Modelleringsprocessen er en central komponent i enhver videnskabelig aktivitet, matematisk modellering anvendes i forskellige naturvidenskabelige discipliner og sammenhænge, og modelleringsprocessen fremhæver forbindelsen mellem matematik og naturfagene (Michelsen, 2001, 2005).

Forståelsen af de konceptuelle systemer som en modelleringsproces udgøres af, overskrider de gængse faggrænser mellem fx matematik og naturfagene. I modelleringsprocessen inddrages der ofte informationer fra en stor diversitet af kilder der præsenterer sig selv på forskellig vis. Elevernes behandling af komplekse problemstillinger indeholder en udvikling af en stigende mængde repræsentationsformer og viden om hvordan disse anvendes. Dette kræver et større behov for at kunne introducere, modificere og tilpasse brugbare repræsentationer og højere ordens-tænkning. Repræsentationskompetence er derfor et centralt element af modelleringsprocessen (Lesh & Doerr, 2003; Michelsen, 2005). Andersen et al. (2003) nævner desuden både modelleringskompetencen og repræsentationskompetencen som centrale naturfaglige kompetencer, men vi afstår her fra at argumentere ud fra den lingvistiske lighed de to kompetencerapporter imellem og fokuserer i stedet på de didaktiske begrundelser givet ovenfor.

Iversen (2005) argumenterer for at også ræsonnementskompetencen kan opfattes som en kompetence der går på tværs af den traditionelle inddeling af faggrænser. I alle gymnasieskolens fag spiller evnen til at kunne følge, bedømme og udforme et ræsonnement en vigtig rolle. For eksempel inden for filosofien beskæftiger eleverne sig i høj grad med at bedømme kæder af argumenter fremsat skriftligt eller mundtligt til støtte for en bestemt påstand. I matematikken fokuseres der ofte på argumentation i form af bevisførelse, og filosofiundervisningen koncentrerer sig ligeledes om at afgøre hvilke ræsonnementer der kan udgøre gyldig argumentation i streng logisk forstand. At være i stand til at skelne mellem forskellige former for argumentation hører ligeledes med til elevernes evne til at ræsonnere.

En veludviklet ræsonnementskompetence vil derfor indeholde en evne til at skelne matematikkens former for bevisførelser og argumentation fra andre emneområders ditto. Vi mener at modelleringskompetencen, repræsentationskompetencen og ræsonnementskompetencen er eksempler på kompetencer som både er knyttet til matematik og til fagoverskridende aktiviteter der involverer samspil mellem matematik og andre fag.

En didaktisk model for samspillet mellem matematik og andre fag

Fagoverskridende kompetencer er efter vores opfattelse et lovende bud på en konceptuel ramme for samspillet mellem matematik og andre fag. Men efter hvilken didaktisk model skal samspillet mellem matematik og gymnasiets øvrige fag organiseres? Berlin (2003) giver en oversigt over modeller for samspil mellem matematik og naturfagene. Modellerne er generelt baseret på to antagelser: (i) undervisning i matematik der relateres til naturfagene, støtter elevernes læring ved at tilbyde meningsfulde kontekster hvor eleverne får erfaringer med anvendelsen af abstrakte matematiske begreber, (ii) matematikken tilbyder naturfagene redskaberne til at kvantificere, repræsentere og analysere naturvidenskabens fænomener. Denne form for samspil mellem matematik og naturfagene resulterer ofte i en kontekstuel frem for en konceptuel tilgang.

I den hollandske "Realistic Mathematics Education" (RME)-tilgang understreges betydningen af samspillet mellem kontekstuelle og konceptuelle tilgange til matematikundervisningen. Matematisering beskrives som den centrale aktivitet i matematikundervisningen. Begrebet matematisering anvendes i en bredere betydning end den sædvanlige hvor det betegner en proces hvor en ekstra-matematisk situation beskrives med matematiske termer.

Matematiseringen finder også sted inden for matematik hvor den er matematikerens hovedbeskæftigelse. Målet med matematikerens virksomhed er at finde og løse problemstillinger samt at organisere et stofområde hvor det enten drejer sig om et matematisk område eller stof fra en ekstra-matematisk virkelighed. Matematikundervisningen bør afspejle denne virksomhed. Der skelnes i RME mellem horisontal og vertikal matematisering. *Den horisontale matematisering* er rettet mod at gøre et problemfelt fra elevernes virkelighed tilgængelig for matematisk handling og er således kontekstuel, mens *den vertikale matematisering* handler om matematisering inden for matematikkens konceptuelle systemer. Begge former for matematisering bør indgå med lige stor vægt i matematikundervisningen (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1997).

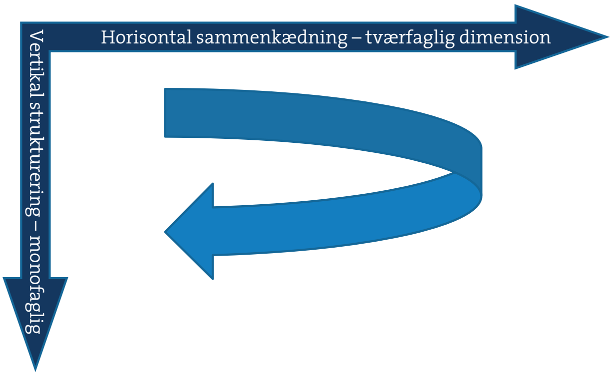
Horisontal sammenkædning af fagene og vertikal strukturering i fagene

RME-tilgangen har inspireret os til at foreslå en didaktisk model for samspil mellem matematik og andre fag hvori der skelnes mellem *horisontal sammenkædning af fagene* og *vertikal strukturering i fagene*. Den grundlæggende idé er at undervisningen tilrettelægges som en vekselvirkning mellem et tæt samspil mellem fagene (horisontal sammenkædning) og en fagspecifik undervisning (vertikal strukturering).

I den horisontale sammenkædning er indhold, problemstillinger og handlemåder fra de indgående fag sammenkædet inden for en velafgrænset kontekst med det formål at engagere eleverne i læringsaktiviteter hvor deres fagoverskridende kompetencer sættes i spil og udvikles. De i den horisontale sammenkædning af eleverne frembragte konstruktioner i form af begreber, idéer og færdigheder forankres efterfølgende begrebsligt i de enkelte fag gennem vertikal strukturering. I modellen er den horisontale sammenkædning kilden til den vertikale strukturering.

Det er ikke tanken at fagene først skal introducere de begreber og idéer som skal indgå i samspillet. Tværtimod er udfordringen at udvikle undervisningssekvenser på tværs af fagene med aktiviteter der indledningsvis engagerer eleverne i ikke-rutine-problemsituationer som fremkalder konstruktion af signifikante konstruktioner der efterfølgende udvides, udforskes og anvendes i andre problemsituationer og slutteligt forankres i hvert af de indgående fags begrebsapparater.

Modellen er grundlæggende iterativ idet den vertikale strukturering efterfølges af en ny horisontal sammenkædning hvor elevernes konstruktioner fra de foregående iterationer bringes i spil (Iversen, 2005; Michelsen, 2005). Antallet af iterationer er afhængigt af en række faktorer, bl.a. det tema som undervisningsforløbet er bygget op omkring.



Figur 1. *Den horisontale sammenkædning i en tværfaglig kontekst er kilden til den vertikale strukturering hvor de konstruerede begreber og idéer forankres i de indgående fags begrebsstruktur.*

Den iterative struktur understøtter den domæneudvidelse som Michelsen (2001) foreslår som en løsning af problemet vedrørende matematiske begrebers domænespecificitet: Elevens opfattelse af et matematisk begrebs indhold og omfang er i høj grad bestemt af de specifikke domæner i hvilke begrebet er blevet eksemplificeret og forankret for netop denne elev (Niss, 1999). Skal eleven have en generel opfattelse af et matematisk begreb og forstå dets rækkevidde, så er det en nødvendighed at eleven får erfaringer med denne rækkevidde gennem undersøgelser af begrebet i forskellige domæner. En udvidelse af de domæner hvori et begreb introduceres for eleverne, fx ved anvendelse af begrebet i forskellige kontekster fra matematik og andre fag, vil give eleverne mulighed for at konstruere et mere fleksibelt og anvendeligt begrebsbillede.

Den her præsenterede didaktiske model kan med fagoverskridende kompetencer som konceptuel ramme anvendes til både at finde velegnede temaer til samspil mellem matematik og andre fag og til at organisere undervisningssekvenser hvor matematik spiller sammen med andre fag. I udviklingen af modellen er der indgået pædagogiske og didaktiske overvejelser vedrørende elevers læring af matematiske begreber. Den didaktiske model afspejler Gravemeijers (1997) opfattelse af den matematiske begrebsdannelse som en proces der indeholder et skift i opfattelse af begrebet fra en "model af" til en "model for". Udgangspunkt for denne proces er en kontekstsituation der er en situation der af eleverne opfattes som realistisk. Indledningsvis vil eleverne matematisere denne situation og udvikle strategier der er knyttet til kontekstsituationen. Senere kan visse aspekter af kontekstsituationen få en mere generel karakter hvilket betyder at konteksten i en vis udstrækning kan få karakter af en model og som sådan kan give støtte ved løsning af andre, men lignende problemstillinger. Modellen vil eventuelt kunne give eleverne indsigt i en mere generel og formalistisk matematisk struktur. Med henblik at fuldføre "brobygningen" fra kontekstsituationen til den formalistiske struktur må modellen ændre karakter fra en "model af" den konkrete situation til en "model for" den abstrakte matematiske begrebsstruktur.

To eksempler på fagsamspil

Vi vil i det følgende give to eksempler hvor fagoverskridende kompetencer og den didaktiske model er anvendt som et redskab til at udvikle undervisningsforløb hvor matematik indgår i et tæt samspil med andre fag. Vi er opmærksomme på at en identifikation af tværfaglige kompetencer forudsætter en kompetencekulegravning i de involverede fag. En sådan kulegravning findes i naturfagene, og vi vil derfor i det ene eksempel fokusere på matematiks samspil med naturfag. De fleste fag vil nok anse ræsonnementskompetencen for at være at være central. Men en sammenligning af kompetencen på tværs af fag er selvfølgelig afhængig af hvilke slags ræsonnementer der konkret er på spil i de enkelte fag. Vi har som det andet konkrete eksempel valgt et forløb med matematik og filosofi fordi argumentation og bevisførelse spiller en central rolle i begge i fag.

Matematik og naturfagene – modellering

Naturfagene er gennemgribende matematiseret, og matematiske metoder er dybt indvævet i naturfagenes teorier og modeller. I Undervisningsministeriets faglige rapport om naturfagene understreges det at matematikfaget har meget at tilbyde de mere abstrakte og formelle områder i naturfagene (Andersen et al., 2003). Osborne (2002) peger på at det i naturfagsundervisningen ofte accentueres at mange fænomener og deres interaktionsmønstre bedst beskrives i et matematisk sprog, og at denne matematisering fungerer som brobygger mellem elevernes verbale sprog og den videnskabelige opfattelse vi ønsker eleverne skal tilegne sig. I en undersøgelse af gymnasieelevers opfattelse af fysikundervisningen konkluderes det bl.a. at et godt fysikfag efter elevernes opfattelse er et fag der integrerer matematik og fysik, men afbalanceret efter elevernes forudsætninger (Angell & Paulsen, 2003).

I en matematikundervisning centreret omkring modeller, modelleringsaktiviteter og modelbaserede ræsonnementer vil der naturligt blive inddraget aspekter som findes uden for matematikfagets område. Dette aspekt af samspillet mellem matematik og andre fag har imidlertid kun i begrænset omfang været genstand for forskning i matematikkens didaktik – og andre fags didaktik (Blum & Niss, 1988; Blomhøj, 2003). Michelsen (2001, 2004) beskriver et integreret forløb i matematik og fysik centreret om radioaktive henfaldsprocesser og eksponentielle vækstfunktioner.

Aktiviteterne i det integrerede forløb tager udgangspunkt i kontekstsituationer. En kontekstsituation skal indbyde eleverne til at matematisere og udvikle strategier. Senere kan visse aspekter af kontekstsituationen få en mere generel karakter hvilket betyder at konteksten i en vis udstrækning kan få karakter af en model og som sådan kan give støtte ved løsning af andre, beslægtede problemstillinger. Modellen vil eventuelt kunne give eleverne indsigt i en mere generel og formalistisk matematisk struktur.

Den grundlæggende idé i forløbet om radioaktive henfaldsprocesser er at eleverne møder en række kontekstsituationer fortrinsvis fra fysik som ved hjælp af matematiske modeller konstrueret af eleverne kan undersøges og beskrives under varierende betingelser. Disse kontekstsituationer skal gøre det muligt for eleverne at udforske variabel- og funktionsbegrebet og efterfølgende forankre deres erfaringer i en matematisk begrebsstruktur.

Forløbet er afprøvet flere gange i 1. g.-klasser og består af seks temaer som naturligt kan opdeles i tre dele:

- Eksponentielle vækstmodeller
- Matematiske modeller og fysiske eksperimenter
- Funktionsbegrebet.

Første del består af temaerne *Radioaktivitet* og *Smittespredning*, hvor eksponentielle vækstmodeller introduceres. Temaerne *Matematiske modeller* og *Eksperimenter* udgør anden del, hvor resultaterne af den hidtidige virksomhed sammenfattes samtidig med at den eksponentielle vækstfunktion udvides gennem udforskning af transformationer af eksponentielle vækstfunktioner. Dette gøres bl.a. ved at behandle eksperimentelle situationer i fysik som matematisk situerede. Fx resulterer udforskningen af en afkølet væskes opvarmning til stuetemperatur i funktionsklassen $y = b(1 - a)^x$, og $y = ba^x + c$ er resultatet af elevernes undersøgelse af en opvarmet væskes afkøling til stuetemperatur.

Figur 2. *En afkølet væske opvarmes til stuetemperatur. Data fra fysikeksperimentet anvendes efterfølgende til at introducere funktionsklassen* $y = b(1 - a)^x$.

Denne type af funktionsklasser introduceres normalt ikke så tidligt i matematikundervisning, men den horisontale sammenkædning gør det muligt i en sammenhængende undervisningssekvens at bringe eleverne i kontakt med elementer af matematikken som ellers er relativt separerede i gymnasiets matematikundervisning. Sidste del af forløbet består af temaerne *Funktioner* og *Modellering af radioaktiv henfaldskæde*. Her er der fokus på generelle egenskaber ved variabel- og funktionsbegrebet samtidig med at elevernes modelleringskompetence udfordres i forbindelse med opstilling af en større matematisk model for en radioaktiv henfaldskæde hvor et radioaktivt nuklid henfalder til et nuklid der er radioaktivt og henfalder til et stabilt nuklid.

Forløbet følger den didaktiske model idet hver af de tre dele indledes med at eleverne tilegner sig praktisk og konkret viden i forskellige kontekstsituationer vedrørende radioaktivitet og andre fænomener der kan modelleres med eksponentielle vækstfunktioner. Elevernes modellering af fysiske fænomener giver mening til de matematiske begreber variabel og funktion og til begrebernes forskellige repræsentationsformer. Herefter orienteres forløbets aktiviteter mod mere generelle og strukturelle aspekter af eksponentielle vækstfunktioner med henblik på en forankring af disse i et matematisk begrebsapparat.

Analysen af datamateriale indsamlet i forbindelse med afprøvning af forløbet har et interessant resultat i relation til domæneudvidelsen: De af eleverne konstruerede modeller har såvel konkret som abstrakt status. I forbindelse med modelleringsaktiviteterne refererer eleverne skiftevis til de konkrete situationer fra fysik som er blevet modelleret, og til rent matematiske overvejelser. Eleverne skifter fleksibelt mellem en matematisk og en fysisk reference og inddrager erfaringer fra ekstra-matematiske situationer når den rene matematiske beskrivelse ikke rækker. Fx har en gruppe elever opstillet en model for absorption af lys i vand. I forbindelse med testen af modellen opstår der et problem. Det skyldes at eleverne har den opfattelse at et tal opløftet til 0. potens giver 0. Først da en elev bliver opmærksom på at lysintensiteten har maksimum ved en vandhøjde på 0, bliver problemet løst. Eleverne indser at dette kræver at et tal opløftet til 0. potens giver 1, og efterprøver efterfølgende dette på lommeregneren. Eleverne opfatter således på en gang de konstruerede modeller som noget der er knyttet til løsning af konkrete problemstillinger, og som matematiske objekter der kan studeres uafhængigt af situationsspecifikke forestillinger (Michelsen 2004).

Matematik og filosofi – ræsonnement

Vi karakteriserede tidligere ræsonnementskompetencen som en fagoverskridende kompetence med potentiale til at fungere som det substrat der kan facilitere en bæredygtig sammenkædning af faget matematik med andre fag som fx filosofi. Matematiske ræsonnementer kan antage mange forskellige former, men er i deres klareste form udtrykt gennem beviser og bevisførelse.

Hanna (1991) argumenterer dog for at matematiske beviser i høj grad anerkendes på samme vilkår som argumenter fra andre vidensområder, hvilket åbner op for en relevant horisontal sammenkædning. Den sociale proces der ligger bag et bevis, opleves sjældent af eleverne, med det resultat at de ofte ikke indser vigtigheden af beviset som en form for argumentation, men i stedet opfatter det som en fastlåst proces der ikke bidrager med ny relevant indsigt.

Niss (1999) konkluderer at afdækningen af elevers fremmedgørelse over for bevis og bevisførelse inden for matematikfaget udgør et af de store forskningsresultater inden for matematikkens didaktik.

Iversen (2005) beskriver hvordan et tværfagligt forløb mellem fagene matematik og filosofi med udgangspunkt i ræsonnementskompetencen kan tage udgangspunkt i genstandsområdet *argumentation og bevisførelse*. Det konkrete arbejde involverer specifikke eksempler på simpel bevisførelse inden for begge fag. Eksempler på sådanne kunne være forskellige udgaver af beviset for Pythagoras' sætning eller beviset for at vinkelsummen i en (euklidisk) trekant er 2π. Den filosofiske bevisførelse tager udgangspunkt i forskellige gudsbeviser, fx Anselm af Canterburys ontologiske gudsbevis og Thomas Aquinas' fem veje til (beviser for) gud (se fx Koch, 1997). Disse filosofiske beviser har matematikkens metode som forbillede og forsøger at kopiere den deduktive metode. Herved illustreres matematikkens særlige skær af sikker viden gennem deduktion og en anvendelse af matematikkens metode på et område hvor denne metode ikke slår til.

De involverede fag behandler eksemplerne fra de forskellige fagområder, og disse sammenlignes og karakteriseres, fx med udgangspunkt i en mere generel analysemodel af argumentation som kan anvendes i elevens videre faglige arbejde. Arbejdet med at identificere strukturen i de forskellige former for bevisførelse skal efterfølgende danne basis for debat og analyse blandt eleverne og kan føre til opstillingen af læringsmiljøer hvor eleverne selv har mulighed for at argumentere for (eller forsøge at bevise) både matematiske og filosofiske udsagn og påstande.

Aktiviteterne skal for eleverne forsøge at belyse problemstillinger som: Hvordan argumenterer man inden for de forskellige fagområder? Hvad konstituerer et matematisk/filosofisk bevis/argument? Hvilken rolle spiller beviser og bevisførelse inden for hhv. matematikken og filosofien? Kan alting bevises? Er matematiske beviser nødvendigvis sande og endegyldige? Er filosofiske?

Ved at opstille fagoverskridende læringsmiljøer som skitseret ovenfor tilbydes eleverne en relevant kontekst for refleksionen og mulighed for at engagere sig direkte med strukturen i og funktionen af matematisk og filosofisk argumentation. Vi forsøger på den måde på en gang at imødekomme de krav som den i denne artikel præsenterede didaktiske model stiller til fagoverskridende aktiviteter der involverer matematik, samtidig med at tidligere matematikdidaktiske overvejelser inden for det specifikke område *argumentation, bevis og bevisførelse* medtænkes.

Med oprettelsen af læringsmiljøer og gennemførelsen af aktiviteter hvor eleverne på første hånd kan opleve hvad der er skal til for at overbevise andre med hensyn til rigtigheden af en (matematisk) påstand, bliver bevis og bevisførelse redskaber med personlig værdi for den enkelte elev (Alibert & Thomas, 1991). Ved at udvide konteksten eller domænet hvori arbejdet med beviser og bevisførelse foregår, søges en vertikal strukturering af de indgående begreber. Hazzan & Zazkis (2005) understreger vigtigheden af at elever på den måde opbygger viden om konkrete matematiske metaobjekter som beviset. Arbejdet danner grobund for udviklingen af elevernes forståelse for, produktion og værdsættelse af matematiske beviser (Harel & Sowder, 2003) og åbner dermed for en videre ekspansion af de indgående begreber i nye relevante faglige kontekster.

Konklusion

Erfaringerne med en bevidst inddragelse af matematiske kompetencer i andre fag er begrænsede. Det skyldes bl.a. at der mangler såvel en konceptuel ramme som en didaktisk model for samspillet mellem matematik og andre fag. Vi har i denne artikel søgt at råde bod på denne mangel ved at præsentere fagoverskridende kompetencer som konceptuel ramme og en didaktisk model bestående af en horisontal sammenkædning af fagene og en vertikal strukturering i fagene.

En identifikation og beskrivelse af fagoverskridende kompetencer på tværs af matematik og andre fag er efter vores opfattelse et lovende bud på et fundament for den manglende konceptuelle ramme. KOM-rapportens otte kompetencer kan forstås i en ren matematisk sammenhæng, men vi anfører samtidig at kompetencetilgangen har et fagoverskridende didaktisk potentiale der rækker ud over den matematiske faglighed. Påstanden om at nogle af – måske alle – de beskrevne kompetencer kan opfattes som fagoverskridende, er derfor ikke et udtryk for at vi ønsker at skille kompetencerne fra konkret matematisk indhold, men indeholder i stedet for en påstand om at den matematiske virksomhed ikke altid lader sig reducere til forhold af rent matematisk karakter. Vi er på den anden side bevidste om at ikke alle gymnasiematematikkens væsentlige begreber nødvendigvis skal have en oprindelse og fortolkning i ekstra-matematiske kontekster. Vi henviser i den forbindelse til den i artiklen omtalte RME-tilgang hvor udgangspunktet i den horisontale matematisering kan være en ren matematisk kontekst (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1997).

Den her præsenterede didaktiske model kan med fagoverskridende kompetencer som konceptuel ramme anvendes til både at finde velegnede temaer til samspil mellem matematik og andre fag og til at organisere undervisningssekvenser hvor matematik spiller sammen med andre fag. Vi er opmærksomme på at denne artikel på ingen måde giver en udtømmende beskrivelse af fagoverskridende kompetencer og peger som en naturlig opfølgning på følgende opgaver:

- Hvordan defineres fagoverskridende kompetencer i relation til samspillet mellem matematik og andre fag?
- Hvordan skal et læringsforløb tilrettelægges med henblik på at give eleverne de erfaringer der er nødvendige for at udvikle fagoverskridende kompetencer?

Referencer

Alibert, D. & Thomas, M. (1991). Research on Mathematical proof. I: D. Tall (red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 215-230). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Andersen, N.O. et al. (2003). *Fremtidens naturfaglige uddannelser*. København: Undervisningsministeriet.

Angell, C. & Paulsen, A.C. (2003). *"Elevernes stemmer" Fysikfaget, undervisningen og lærerroller, som eleverne opfatter det i det almene gymnasium i Danmark*. IMFUFA Roskilde Universitetscenter, Roskilde.

Berlin, D.F. (2003). Integrated Mathematics: From Models to Practice. I: McGraw (red.), *Integrated Mathematics. Choices and Challenges* (s. 43-58). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Blomhøj, M. (2003). Modellering som undervisningsform. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (s. 51-72). København: L&R Uddannelse.

Blum, W. & Niss, M. (1988). Mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects. *Written version of a Survey Lecture given jointly at the Sixth International Congress on Mathematical Education,* Budapest, 1988.

Dahland, G. (1998). *Matematikundervisning i 1990-talets gymnasieskola. Ett studium av hur didaktisk tradition har påverkats av informationsteknologins verktyg.* Göteborg: Institutionen för pedagogik, Göteborgs universitet.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. I: P. Bryant & T. Nunez (red.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (s. 315-345). Hove: Psychology Press.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. I: D. Tall (red.), *Advanced Mathematical Thinking* (s. 54-64). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. & Sowder, L. (2003). Case Studies of Mathematics Majors' Proof Understanding, Production and Appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 3(2)*, s. 251-267.

Hazzan, O. & Zazkis, R. (2005). Reducing Abstraction: The Case of School mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 58(1)*, s. 101-119.

Iversen, S.M. (2005). Building a Didactical Model of Interdisciplinary Activities Involving Mathematics. I: A. Beckmann, C. Michelsen & B. Sriraman (red.), *Proceedings of The First International Symposium of Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences* (s. 142-152). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Kaput, J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. I: Biehler, Rolf et al. (red.), *Mathematics didactics as a scientific discipline* (s. 379-397). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Koch, C.H. (1997). *Den europæiske filosofis historie – fra reformationen til oplysningstiden*. København: Nyt Nordisk Forlag.

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning, and Teaching.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Sriraman, B. (2005). John Dewey revisited – Pragmatism and the models-modeling perspective on mathematical learning. I: A. Beckmann, C. Michelsen & B. Sriraman (red.), *Proceedings of The First International Symposium of Mathematics and its Connection to the Arts and Sciences* (s. 7-31). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

Michelsen, C. (2001). *Begrebsdannelse ved domæneudvidelse – Elevers tilegnelse af funktionsbegrebet i et integreret undervisningsforløb mellem matematik og fysik*. Ph.d.-afhandling. Syddansk Universitet.

Michelsen, C. (2005). Expanding the domain: Variables and functions in an interdisciplinary context between mathematics and physics. I: A. Beckmann, C. Michelsen & B. Sriraman (red.), *Proceedings of The First International Symposium of Mathematics and its Connection to the Arts and Sciences* (s. 201-214). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 40(1)*, s. 1-24.

Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.

Osborne, J. (2002). Science Without Literacy: a ship without a sail? *Cambridge Journal of Education, 32(2)*, s. 203-218.

Steen, L.A. (red.). (2005). *Math & Bio. Linking Undergraduate Disciplines*. The Mathematical Association of America.

Undervisningsministeriet. (2003). *Historisk gymnasiereform på plads*. Pressemeddelelse den 28. maj 2003.

Abstract

In August 2005 a structural reform was introduced in upper secondary education in Denmark. The reform implies that students choose among subject packages. An important feature of each package is that the participating subjects form a coherent program. Issues related to the interplay of mathematics and other subjects are complex and must take into account that didactical problems with the various topics have more consequences than the respective curricula might suggest. What is needed, is a conceptual frame and a didactical model for integrating productive ideas from a variety of theoretical and practical perspectives on the relations between mathematics and other subjects.

In the paper a discussion of pedagogical and didactical problems concerning the interplay between mathematics and other subjects is crystallized into a concept for interdisciplinary instruction. The concept includes interdisciplinary competences as the theoretical frame and a didactical model, where interdisciplinary instruction in mathematics and other subjects is considered as an iterative movement between two dimensions, (1) *The horizontal linking of the subjects*: Situations from other subjects are embedded in contexts which are mathematized by the students, (2) *The vertical structuring in the subjects*: The conceptual anchoring of the students' constructs from the horizontal linking in the systematic and framework of the involved subjects. Two examples of the use of the framework for interdisciplinary activities involving mathematics are presented: (1) Mathematics and science and (2) mathematics and philosophy.