Et mysterium om tal – og japanske lektionsstudier

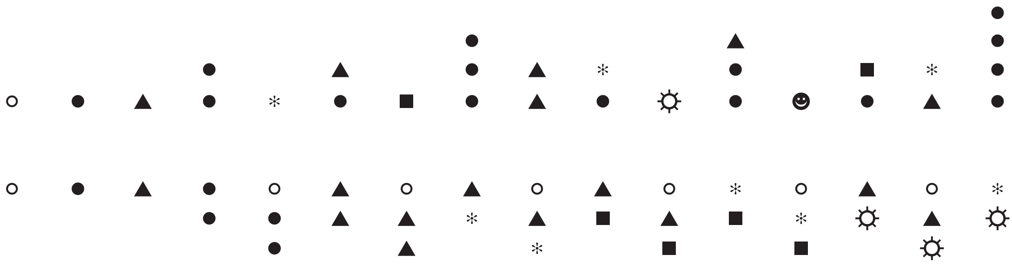
Carl Winsløw, Inst. for Naturfagenes Didaktik (IND), Københavns Universitet

Abstract *Artiklen sigter på at give et lille indblik i japansk matematik-undervisningskultur og tager – som en typisk japansk matematiktime – udgangspunkt i et konkret eksempel som derefter udfoldes med henblik på at afdække mere principielle forhold. Ift. japansk matematikundervisning drejer det sig dels om hvordan matematiktimen opbygges (lektionsstruktur), dels om hvordan den planlægges (ofte i lærerteam). Begge dele har i de senere år givet anledning til stor opmærksomhed i Vesten: Når man iagttager japansk matematikundervisning, ser man mange af de "konstruktivistiske" idéer realiseret som det er så svært at gennemføre i Vesten. Og når man spørger hvordan lærerne gør, støder man på et andet højt udviklet stykke undervisningskultur: de såkaldte "lektionsstudier" som (med diverse tilpasninger) i de senere år er blevet meget populære i USA.*

Tidligere publiceret i: M. Lysberg (red.), *Tall og tallforståelse – fra telleremser til algebra*, s. 49-57. Trondheim: Matematikksenteret, 2008. Genoptrykkes her med tilladelse (og få ændringer).

1. Appetitvækker: Et mysterium om tal

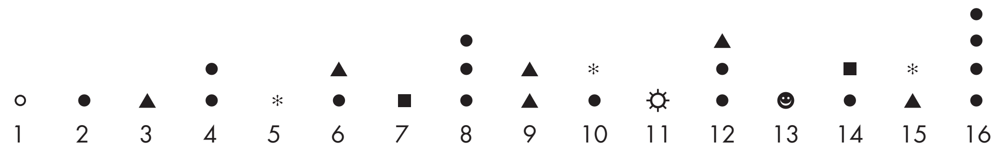
Ude på den jyske hede finder raske motionsløbere en dag et forladt rumskib fra en fremmed planet. På rumskibets sider er indgraveret to mystiske budskaber som ingen rigtig kan forstå. De ser ud som på figur 1.



Figur 1. *Symbolstrenge fra det ydre rum.*

Selv om det ser mystisk ud, virker det som om der er en slags system i de to symbolrækker; fx indeholder den første række symbolet • i hver anden række. Kunne det have noget at gøre med tal?

Faktisk er det jo en næsten "instinktiv" reaktion hos os at nummerere ting, og det virker som om der er tale om en række sammensatte tegn i hver række. Nummererer man den første række (som på figur 2), så er der måske flere ting der springer i øjnene, i det mindste hvis øjnene er lidt matematiktrænede.



Figur 2. *Første symbolrække nummereret.*

Fx kunne man lægge mærke til at "søjlerne" med kun ét symbol er nummereret 1, 2, 3, 5, 7, 11 og 13 – altså netop de tal som ikke har ægte divisorer. Med andre ord er de "primtal", bortset fra tallet 1, men det er mere en praktisk konvention at det normalt ikke regnes som primtal. Man kunne også lægge mærke til at de øvrige søjler alle er sammensat af symbolerne fra disse specielle søjler; fx er søjle 4 sammensat af to gange • (symbolet som står alene i søjle 2). Og som allerede nævnt genfinder vi symbolet • i hver anden søjle, svarende til *de lige tal*. De lige tal er jo netop de tal som 2 går op i; når der så i 4. søjle står •• (på højkant), og i 8. søjle •••, så kunne det jo læses som hhv. $2 \cdot 2$ og $2 \cdot 2 \cdot 2$. Hypotesen bekræftes af de øvrige søjler. Fx finder vi i søjle 14 symbolerne for 2 og 7, som altså kan læses $2 \cdot 7$. Forstået som matematisk meddelelse udsiger symbolrækken dermed at tallene – i det mindste fra 1 til 16 – enten ingen ægte divisorer har eller også kan skrives som produkt af de foregående tal (uden ægte divisorer). De ekstraterrestriske forfattere af meddelelsen er med stor sandsynlighed matematikere! Og de har formuleret deres version af følgende sætning der udsiger noget helt grundlæggende om tallenes anatomi:

Aritmetikkens fundamentalsætning: Ethvert naturligt tal kan på entydig måde skrives som et produkt af primtal. (Entydigheden gælder faktorerne i produktet, ikke deres orden).

Dette nydelige talteoretiske resultat er meget vigtigt og bruges i mange sammenhænge. Fx i forbindelse med *kodning*, der normalt bygger på at det for store tal kan være særdeles vanskeligt at *finde* primtalsfaktorerne selv om man altså ved at de findes og er entydigt bestemt.

På samme måde kan man analysere den anden række af symboler og nå frem til et andet resultat om primtal der dog er lidt anderledes eftersom intet bevis kendes. Det overlades til læseren at formulere resultatet (svarende til anden symbolrække) og undersøge den historiske baggrund for den jordiske udgave! Advarsel: Nogle elementer af svaret er givet i sidste afsnit i denne artikel.

2. En japansk superlektion

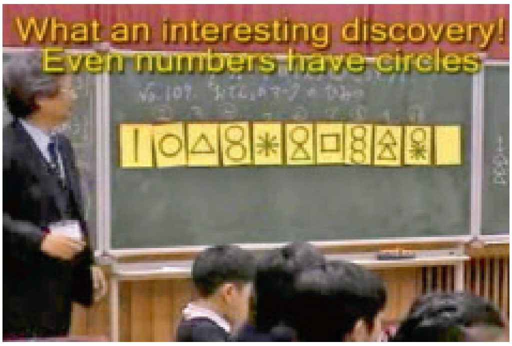
Man kan måske spørge hvilken interesse nogen kan have i at stille så mærkelig en opgave som den vi har diskuteret ovenfor. Hvorfor "gemme" et matematisk resultat i mystiske symboler under påskud af at de er afsat af rumvæsener? Hvorfor ikke gå lige til sagen: sætning og bevis (hvis beviset altså findes)? Disse spørgsmål er på en grundlæggende måde didaktiske, for de drejer sig om *hvordan* et stykke matematik præsenteres, og det må selvfølgelig afhænge af *hvem det præsenteres for*. At matematik selv på en fundamental måde er et didaktisk fag, kan man se allerede i tidlige læreværker som Euklids *Elementer* (der faktisk indeholder en teori om primtal): En "god" matematisk præsentation er en der er udformet med stor sans for detaljen og klarheden med henblik på at interessere og overbevise en bestemt målgruppe. Nu er der selvfølgelig fremstillinger af talteori der som foreslået går direkte til sætningen og dens bevis – *Euklids Elementer* eller moderne lærebøger i talteori, kunne være eksempler på en sådan tilgang. Men de henvender sig jo også til en særlig målgruppe: andre matematikere, eller matematikstuderende. Løsningen på problemet om en "passende" tilgang kunne tage sig anderledes ud hvis målgruppen fx var børn i 4. klasse der for første gang skal præsenteres for idéen om "primtal" og "sammensatte tal".

Idéen til ovenstående opgave – i det mindste den del der vedrører den første symbolrække ("aritmetikkens fundamentalsætning" som vi lidt pompøst fortolkede den) – kommer fra en matematik-lektion konstrueret af et lærerteam under ledelse af den japanske matematiklærer Kozo Tsubota. Og lektionen er netop beregnet for børn i 4. klasse. I Tsubotas lektion præsenteres opgaven dog lidt anderledes: I første omgang er symbolerne ikke givet som en lang række, men de er tegnet hver for sig på store gule kort der er fastgjort med magneter til en tavle hvor de er anbragt tilfældigt mellem hinanden. Desuden er kun de første 10 symboler taget med, og derudover er der to gule kort som der ikke er tegnet noget på (se figur 3).

Udfordringen for eleverne er nu – givet dette virvar af symboler – at finde ud af hvad der skal stå på de to tomme kort. Det kan de selvfølgelig i første omgang kun gætte på; eleverne foreslår ivrigt forskellige symbolkombinationer der ligner de 10 givne, men som er forskellige fra dem (disse tegnes på tavlen). Det er en aktivitet som eleverne i begyndelsen går ivrigt op i – men det bliver hurtigt utilfredsstillende at der blandt de forskellige forslag ikke rigtig kan opnås enighed om noget der er "rigtigt" eller blot "mere rigtigt". Læreren foreslår nu at for at afgøre hvad der skal stå på de to blanke kort, må man have et "system" i de første 10 symbolkombinationer og beder dem om at overveje dette. Nogle foreslår fx at ordne dem efter hvor mange enkeltsymboler der er på kortet, men det er stadig ikke rigtig nok til at finde "systemet". Læreren siger så: "Nu vil jeg vise jer min ordning af symbolerne – så kan I se om I kan finde systemet." Derefter ordner han symbolerne som vist i forrige afsnit som en række bestående af de 10 symbolkombinationer, nummereret fra 1 til 10. Og så udspiller "afsløringen" af systemet sig nogenlunde som i introduktionen (se figur 4). Herunder opstår den grundlæggende idé om primtal, nemlig de tal som må skrives med et nyt symbol fordi ingen af de foregående tal er divisorer. Og diskussionen af hvordan de to blanke kort – "11" og "12" – kan skrives, er nu en god lejlighed til hhv. at fæstne denne idé (fordi der skal laves et nyt symbol til 11) og til at bruge princippet om faktorisering (12 = 2·2·3).

Et foreløbigt svar på hvad formålet med den mærkelige opgave med symbolkombinationerne er, kunne altså være at børn i 4. klasse – når opgaven pakkes passende ind – rent empirisk finder en interesse i den og derved får en mulighed for at nærme sig begreberne primtal og faktorisering der her udgør "nøglen" til at løse mysteriet. Det er vanskeligt at argumentere teoretisk for at en sådan opgave – i en given ind-

Figur 3. *Første "møde" med symbolkombinationerne (fra CRICED, 2006).*



Figur 4. *Hovedfasen: Der arbejdes med "rækken" af symbolkombinationer (ibid.).*

pakning – "virker" for en given målgruppe (om end det undertiden er muligt at give relevante teoretiske argumenter, se fx Winsløw, 2007). Indpakningen kan fx tænkes at hjælpe med at overkomme forskelle i elevernes forudsætninger: Hvis man stiller den med almindelige talsymboler, vil nogle elever måske hurtigt fjerne udfordringen for de andre fordi de umiddelbart genkender (eller husker) primtallene. Men det er i høj grad et empirisk spørgsmål om en given målgruppe kan have udbytte af en opgave.

Den relevante dokumentation vedr. opgaven med de mystiske symboler (inkl. den netop beskrevne "indpakning") findes i en kommercielt tilgængelig videooptagelse af lektionen (CRICED, 2006). Videoen viser en japansk 4. klasse som arbejder med opgaven og – gennem de nævnte skridt – løser den. Erfarne lærere vil også kunne forestille sig at denne erfaring hos eleverne senere kan bruges i forbindelse med andre aktiviteter og opgaver vedr. primtal og faktorisering.

3. Didaktisk miljø og didaktisk situation

Vi har ovenfor beskrevet en "opgave" i to forskellige "indpakninger" (meddelelse på rumskib og mystiske symboler på gule kort der efter et stykke tids udforskning af læreren anbringes i rækkefølge). Eksemplet kan bruges til at illustrere to afgørende typer af valg som skal foretages i forbindelse med en hvilken som helst undervisning i matematik:

- Der skal være en *aktivitet* (her en opgave) for eleverne som har et matematisk indhold.
- Aktiviteten skal *organiseres* på en måde der gør den tilgængelig for eleverne og giver dem mulighed for at få det ønskede udbytte af den (læring i en eller anden forstand).

Vi bruger et par begreber fra teorien om didaktiske situationer (Brousseau, 1997, cf. også Winsløw, 2006, kap. 7) til at gøre diskussionen af disse to afgørende valg mere præcis: "didaktisk situation" og "didaktisk miljø".

Aktiviteten består i dette tilfælde af at finde ud af meningen med den tidligere omtalte række af symboler, og det matematiske indhold drejer sig om primtal og deres rolle som byggesten for de naturlige tal. Det gælder om at *eleverne* udøver denne aktivitet, hvilket selvfølgelig ikke sker af sig selv. Der skal skabes en 'didaktisk situation' som gør det muligt for dem ("didaktisk" henviser her til arrangørens intention om at belære den der anbringes i situationen). Helt konkret skal de præsenteres for symbolerne og problemstillingen, måske vha. fysiske objekter (de gule kort) mv., og det gælder om at indrette alle disse forhold omkring elevernes arbejde sådan at det er udfordrende uden at være (eller virke) umuligt. Forholdene omkring elevernes arbejde – i den konkrete situation – kaldes det "didaktiske miljø". Det er de omgivelser der skal give den matematiske aktivitet næring og livsbetingelser samtidig med at der en vis modstand der skal overvindes. Det er et kunstigt miljø i den forstand at det er udtænkt og arrangeret af læreren med henblik på at eleverne lærer noget matematik. Det er også ofte en pointe at det der skal læres, er "gemt" i det didaktiske miljø – og at situationen er lagt til rette så det bliver udfordrende og lærerigt at "finde" den gemte viden.

I eksemplet udgør de mystiske symbolkombinationer kernen i det didaktiske miljø: Det er i dem den tilsigtede viden er gemt, i den forstand at tolkningen af dem forudsætter et ræsonnement om primtal og faktorisering. Men symbolerne gør det ikke alene; også lærerens instruktioner udgør en væsentlig ramme om problemstillingen og dermed om elevernes aktivitet. Når disse instruktioner er givet, må læreren – i det mindste i kortere perioder – overlade eleverne til sig selv og "spillet" i det didaktiske miljø. Jo mere velindrettet det didaktiske miljø er i forhold til elevernes forudsætninger og den tilsigtede viden, des mere kan eleverne lære af dette spil – netop når læreren trækker sig tilbage. Symbolkombinationerne ser ganske rigtigt mystiske ud ved første øjekast, men i det mindste når de er arrangeret i rækkefølge, er det muligt at tænke sig frem til at de svarer til faktoriseringer af tal, og at faktorerne udgøres af netop de tal der ikke selv kan faktoriseres. Faktisk er det måske en særskilt pointe at symbolerne *ikke* er dem der almindeligvis bruges for tallene: Et positionstalsystem som det vi normalt anvender, er jo baseret på tallenes *additive struktur* ($12 = 10 + 2$), mens de foreslåede symbolkombinationer netop angiver tallene ud fra deres multiplikative struktur ($12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$). Alternativet – at præsentere "regnestykkerne" $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $2 \cdot 2 = 4$, $5 = 5$, $2 \cdot 3 = 6$ osv. – ville givet ikke have samme effekt, om end der stadig kunne tænkes at foreligge et teoretisk fortolkningsarbejde. For børn i 4. klasse er de mystiske symboler utvivlsomt i sig selv en mulig kilde til fascination (med eller uden rumskib), og det er jo også dem der fungerer som "skjulested" for det stykke matematik som det er hensigten med miljøet at lade eleverne finde.

I en undervisningssituation er det endvidere karakteristisk at elevernes arbejde skal sættes i gang, reguleres undervejs (om nødvendigt) og afsluttes – normalt med læreren som ansvarlig i første og sidste led. Mere generelt skal lektionen *organiseres* omkring spillet i det didaktiske miljø, og der er her mange valgmuligheder. Skal problemstillingen præsenteres på en gang (som i "appetitvækkeren" til denne artikel) eller i flere tempi (som i Tsubotas lektion)? Under hvilke omstændigheder kan eller skal læreren gribe ind i elevernes arbejde i miljøet? Skal arbejdet med det didaktiske miljø være fælles for hele klassen eller foregå i grupper eller – evt. i kortere perioder – individuelt? Hvorledes skal der afsluttes? Skal de faglige hensigter og pointer formuleres som konklusion, eller skal der lægges op til en fortsættelse senere? Man kan sige at selv om vi har beskrevet det didaktiske miljø som eleverne skal arbejde med, så mangler vi stadig en plan for iscenesættelsen – "drejebogen" for den konkrete lektion. Og alle de beslutninger dette indebærer, vil også kunne have stor betydning for om arbejdet i miljøet lykkes.

Den japanske lektion vi nævnte, er opbygget med to hoveddele:

- En kortere "introduktionsfase" hvor læreren introducerer problemstillingen (hvad skal der stå på de to blanke kort?), og eleverne kommer med umiddelbare bud på "lignende symbolkombinationer". Dette didaktiske miljø har ikke tilstrækkelig modstand til at kunne differentiere mellem forskellige "løsninger", og det tjener da også mere til at gøre eleverne fortrolige med problemstillingen og miljøets materielle elementer.
- En længere "udforskningsfase" i et mere velstruktureret didaktisk miljø hvor eleverne får konkrete spørgsmål og i korte perioder overvejer dem individuelt, og hvor der som opsamling på hver af disse perioder af læreren udpeges elever som forklarer deres bud på svarene.

Man lægger i øvrigt mærke til at:

- i opsamlingsfaserne er læreren i meget høj grad ordstyrer, men validerer ikke elevernes svar som "rigtige" eller "forkerte"; kun udtrykker han i nogle tilfælde at de er "interessante"
- lektionen slutter med at symbolkombinationerne for 11 og 12 findes; forkerte bud på det sidste (svarende fx til 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) elimineres af andre elever, ikke af læreren
- læreren forsøger ikke at samle op på lektionen fx i form af mere generelle idéer såsom definitionen af primtal eller princippet om faktorisering i primtal; lektionen slutter slet og ret med at det oprindelige problem er løst af eleverne.

4. Drejebogen som kulturelt "script"

At en lektion forløber med visse faser der mere eller mindre synligt tjener til at muliggøre elevernes arbejde i et didaktisk miljø, er noget man især bliver opmærksom på ved observation af lektioner i en helt anden kontekst en ens egen. Et overraskende resultat af de såkaldte TIMSS-videostudier (se Stigler & Hiebert, 1999) er nemlig at der i en given skolekultur findes meget regelmæssige "scripts" for matematiktimerne. Det betyder at lektionsstrukturen varierer overraskende *lidt* inden for en given skolekontekst, mens der derimod kan være meget store forskelle fra et kulturelt system (som det japanske) til et andet (som det danske):

> "The scripts for teaching in each country appear to rest on a relatively small and tacit set of core beliefs about the nature of the subject, about how students learn, and about the role that a teacher should play in the classroom. These beliefs, often implicit, serve to maintain the stability of cultural systems over time." (Stigler & Hiebert, 1999, s. 87-88)

Opdagelsen og beskrivelsen af disse "scripts" for matematiklektioner er blandt hovedresultaterne i TIMSS-videostudierne. Idéen er her at sammenligne videooptagelser fra forskellige lande af et stort antal tilfældigt udvalgte matematiklektioner på et givet klassetrin – både mht. lektionernes overordnede struktur og mere specifikke detaljer i deres forløb. Allerede de første TIMSS-videostudier fra 1995 viste meget slående forskelle mellem indhold og struktur i matematiklektionerne i Japan og i de to andre lande (USA og Tyskland). Et af de mere overordnede resultater er at matematiklektioner i Japan typisk har nogenlunde følgende struktur ("drejebog"):

- Læreren introducerer et åbent problem (på japansk: *hatsumon*).
- Eleverne arbejder med problemet, læreren observerer deres arbejde (*kikan-shido* – læreren "lytter").
- Eleverne præsenterer deres idéer eller løsninger idet læreren giver dem ordet i en rækkefølge der er bestemt af hans observationer under *kikan-shido* [en fase der kaldes *takuto* efter tysk *Taktstock*, dirigentstav].
- Disse diskuteres på klassen og af læreren (*neriage*, en slags rationel forhandling).
- Læreren afrunder (*matome*).

I Tsubotas lektion finder vi klart disse faser idet den første del (udforskning af de uordnede symbolkort) fungerer som introduktion til problemstillingen og en vis fortroliggørelse med dens objekter. Og vi har allerede bemærket at afrundingen (*matome*) ikke nødvendigvis betyder at der konkluderes andet eller mere end at "vi har arbejdet med et problem og fundet et eller flere svar".

De "drejebøger" som TIMSS-videostudierne har fundet i flere vestlige landes matematikundervisning, kan siges at være variationer over følgende struktur:

- Læreren minder om hvad klassen arbejdede med sidst.
- Læreren introducerer en ny opgavetype og en teknik, og der vises nogle eksempler.
- Eleverne arbejder selv med flere eksempler hvor de skal bruge den viste teknik; læreren går rundt og hjælper dem der har brug for det.

Der er – til dels som en konsekvens af denne struktur – betydelig mindre fokus på at eleverne selv udvikler metoder eller teknikker, og det fremgår også på andre måder af TIMSS-videostudierne at en langt større andel af matematiktimerne i fx USA går med at eleverne træner brugen af "standardteknikker". Man skulle jo så egentlig tro at elever med en sådan baggrund skulle klare sig relativt godt i internationale test der netop ofte har en tendens til at basere sig på korte, skriftlige opgaver der kan løses ved at mobilisere en standardteknik. Men faktisk klarer japanske elever sig bedre i sådanne test end eleverne i stort set samtlige vestlige lande (og det i såvel TIMSS-undersøgelserne som PISA-undersøgelserne).

Interessen for japansk matematikundervisning har da også været voksende i de vestlige lande, ganske særlig i de seneste 10 år. Det er ikke mindst fordi vestlige observatører – fx inden for rammerne af TIMSS-video-studierne – har opdaget at tidligere tiders fordomme om en disciplinbaseret japansk terpekultur ikke svarer til hvad man ser i virkelighedens japanske matematiktime. Tværtimod: Japansk matematikundervisning er, i det mindste i barneskolen, præget af en betydelig kreativitet både hos lærerne (i planlægningen af timerne) og hos eleverne (i deres arbejde i matematiktimerne). De to ting hænger sammen fordi matematiklærernes kreativitet især retter sig mod at maksimere elevernes matematiske kreativitet i timerne. For at forstå japansk matematikundervisning – med disse ret bemærkelsesværdige udtryk og resultater – er det altså i høj grad relevant at se på *de japanske matematiklæreres arbejdsformer og metoder*. Og her støder man så hurtigt på et højst overraskende fænomen som også ligger bag Tsubotas lektion: de såkaldte "lektionsstudier" (på engelsk "lesson studies" og på japansk: 授業 研究 (*jugyou kenkyuu*). Det sidste afsnit i denne artikel er viet til en kort diskussion af dette fænomen som også sætter de tidligere afsnit i et nyt lys.

5. Lektionsstudier – når undervisning bliver kollektiv

Et lektionsstudie handler kort sagt om at *planlægge en lektion med et bestemt fagligt mål* (som det gælder om at præcisere, men som normalt også refererer til lektionens funktion i et større undervisningsforløb). Lektionsstudier udføres af *team af* faglærere, typisk *over et par måneder*. Helt centralt i lektionsstudiet står *lektionsplanen* som er en minutiøs beskrivelse af arbejdets resultater – herunder naturligvis "drejebogen" for lektionen. Det er også vigtigt at lektionsstudier i princippet er offentlige, og at resultaterne (lektionsplanen) i princippet kan bruges af andre lærere; samtidig er lektionsstudier baseret på at lærerne *observerer hinandens undervisning* (under brug af den fælles lektion). Endelig er der tale om en meget udbredt praksisform i Japan – stort set alle grundskoler har regelmæssige lektionsstudier (Stigler & Hiebert, 1999, s. 110-111).

Det måske umiddelbart mest overraskende er nok at man i et lektionsstudie arbejder i flere måneder på at udforme *en enkelt* lektion. Det er da en forberedelsesfaktor der vil noget! Men der er flere forklaringer på at det ikke er så dumt endda:

- For det første kommer man virkelig i dybden med det faglige indhold ikke bare i den foreliggende lektion, men også i relation til andre dele af læreplanens matematikindhold – både forudsætninger for lektionen og de ting den indvundne viden senere skal bruges til. At fokusere på en enkelt lektion er således også med til at styrke lærernes bevidsthed og viden om den faglige sammenhæng mellem lektioner.
- Fordybelsen i det faglige indhold sker *fra elevernes synspunkt* i den forstand at det drejer sig om at optimere det "didaktiske miljø" som eleverne møder indholdet i, og rammerne omkring dette miljø (situationens struktur/forløb).
- Den lektion som er under udvikling, afprøves flere – ofte mange – gange i forskellige versioner hvor et af lektionsstudiegruppens medlemmer underviser, og de andre observerer. På den måde bliver genstanden for observationen ikke den enkelte lærer, men den fælles lektion (herunder både situationens struktur og miljøets detaljer) som det gælder om at udvikle.
- På en skole hvor der regelmæssigt afholdes lektionsstudier, vil man over tid få opbygget et "bibliotek" af lektionsplaner, og lektionsplaner publiceres i øvrigt både regionalt og (for særlig fremragende skolers vedkommende) nationalt. Dermed vil lektionsstudier typisk tage udgangspunkt i tidligere lektionsplaner – enten egne eller andres – og det er hovedpointen med dem (dvs. de skal ikke opfattes som lektioner der tænkes brugt af hvem som helst, a la britiske "teacher proof lessons" – en uhyrlighed som ville være utænkelig i Japan). Det medvirker til at skærpe sansen for detaljen i undervisningen, hvis kompleksitet ofte forsvinder i den mere almene "pædagogiske" lærerværelsessnak.

En anden meget vigtig pointe i lektionsstudiearbejde er at det foregår i matematiklærerteam og derved indgår i lærerteamets kontinuerlige og fælles professionelle udvikling. Fokus er på udviklingen af teamets *undervisning* – ikke på udvikling af den enkelte lærer. Der er i den japanske undervisningskultur en fundamental tro på at man kan udvikle *undervisningens* kvalitet gennem et forskningslignende arbejde med de enkelte lektioner (se fx Lewis, 2002). Undervisning bliver således ikke i første række lærerens private og individuelle ansvar. Den bagvedliggende forberedelse er kollektiv og har flere forskningslignende træk (Miakawa & Winsløw, u. udg.).

Endelig spiller den systematiske, didaktisk fokuserede *observation af undervisning* en fundamental rolle i lektionsstudier. Ikke blot andre lærere fra skolen, men også lærere fra andre skoler og endog forældre eller interesserede fra udlandet kan observere undervisningen i en japansk skole – uden særlige formaliteter og uden at læreren føler sig forulempet af det. Den erfaring at man kan lære af at observere andre lærere – og af deres observationer – stammer tilbage fra Meiji-tiden i slutningen af det 19. århundrede (se fx Isoda et al., 2007, kap. 2). Også dette medvirker til at gøre undervisning til noget kollektivt snarere end en privatsag.

Man kan læse mere om lektionsstudier i de referencer der er nævnt nedenfor. Den engelsksprogede litteratur om "lesson study" er i dag ganske omfattende, især fordi lektionsstudier er blevet temmelig udbredt i specielt USA inden for de seneste 7-8 år, naturligvis i mere eller mindre tillempede former. Også i svensk sammenhæng er der gjort enkeltstående forsøg med lektionsstudier (se fx Akerlund, 2005). I Danmark planlægges de første forsøg med formatet med start i 2009 som et projekt inden for rammerne af det nye videnscenter for matematikdidaktik (NAVIMAT). Det skal understreges at det ikke er en enkel opgave at omplante – og tilpasse – et så intrikat stykke undervisningskultur til en ny kontekst, hvad erfaringerne fra USA på mange måder viser (Lewis, 2002).

Vi vil nu vende tilbage til eksemplet med talmysteriet for at se hvad det har at gøre med lektionsstudier. Vi nævnte at lektionen – i den version som blev beskrevet som en "superlektion" – er udviklet af en lærer ved navn Kozo Tsubota (som optræder på figur 3 og 4). Manden er berømt blandt matematiklærere i Japan – for han er leder af et matematiklærerteam der har udarbejdet adskillige nationalt publicerede lektionsplaner. Han har personligt fremvist disse undervisningsdesign ved talrige regionale og nationale lærerkongresser. Jeg mødte ham for første gang "i levende live" på en international kongres i Mexico – og det var mig der genkendte ham.

I Japan er det således almindeligt at særlig fremragende lærerteam *publicerer* og *demonstrerer* deres lektioner offentligt og naturligvis frem for alt over for andre lærere – og deres ledere kan høste betydelig professionel anerkendelse, undertiden berømmelse. Sådanne "ikoner" er naturligvis i sig selv af betydning for den meget store prestige som lærerfaget har i Japan.

Videoen af lektionen som blev omtalt i afsnit 2 (jf. figur 3 og 4), er optaget ved en lærerkongres i Tsukuba med flere hundrede deltagere. Det er således ikke "rigtig" undervisning – men det at lektionen fungerer med en lokal klasse, en for eleverne ukendt lærer og flere hundrede tilskuere, gør måske ikke demonstrationen mindre overbevisende.

På den anden side kan det ikke nægtes at lektionsstudier – og især denne offentlige "fremvisning" og diskussion af lektioner – udfordrer vores sædvanlige forestillinger om hvad undervisning er. Der er følgende to muligheder:

- Et naturligt fænomen i klasseværelset og skolekonteksten som uden for dette ingen regelmæssighed eller blot eksistens kan have
- Et offentligt tilgængeligt stykke design som kan fremvises, studeres og udvikles systematisk på tværs af lærere, klasser og skoler.

Det er selvfølgelig to ekstreme synspunkter, men jeg tør godt sige at jeg tror det sidste synspunkt har fremtiden for sig – både når det gælder den praktiske udvikling af undervisning, og når det gælder forskning i matematikkens didaktik.

Lektionsstudier er en blandt flere praktiske måder at professionalisere undervisningsarbejdet på, og de gør det ikke mindst ved at give et fælles og offentligt rum til dette arbejde og den tilhørende professionelle viden. Et fælles, offentligt rum hvor den professionelle viden kan cirkuleres, udvikles og udfordres i en rationel, praksisbaseret dialog – det er måske netop hvad lærerprofessionen i mange lande savner. Mange udviklingsprojekter hos os har vel haft succes ved at etablere et sådant rum, dog typisk kun lokalt og for en kort periode. At man *i et helt skolesystem* har en så solid og permanent tradition for at organisere sådanne rum – i form af lektionsstudier – det er måske det allermest interessante ved den japanske undervisningskultur, som vi her blot har forsøgt at løfte lidt af det eksotiske slør for.

Til sidst løfter vi sløret for hvad den anden symbolrække i figur 1 betyder (idéen til denne lille udvidelse af opgaven skyldes min kollega, Frederik V. Christiansen). Mens første symbolrække viser de naturlige tal som *produkter* af primtal, viser den anden tallene fra 4 og fremefter som en *sum af to primtal* (hvis tallet er lige) og som en sum af to primtal + 1 (hvis tallet er ulige). Fx er 16 = 5 + 11. Hvis man tænker sig at dette fortsætter – på samme måde som med første symbolrække – får man Goldbachs formodning: Ethvert lige tal (bortset fra 2) er summen af to primtal. Vi taler om en formodning fordi der intet bevis kendes. Der er dog god grund til at tro at formodningen er sand: For tiden (januar 2009) er den verificeret ved computerberegninger for tal med op til 18 cifre (1 milliard milliarder; se Oliveira e Silva, 2008). Men der kunne jo være en større undtagelse ... og den der kan *bevise* Goldbachs formodning (dvs. give et argument som gælder for *alle* lige tal og dermed gøre formodningen til en *sætning*), vil høste evig hæder og i øvrigt også blive meget velhavende.

Referencer

Akerlund, S. (2005). Utveckla undervisning tillsammans. *Nämnaren, 3*, s. 17-21.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer: Dordrecht.

CRICED. (2006). *Exploring Japanese mathematics lessons – prime and composite numbers.* Video. Centre for Research on International Cooperation in Educational Development, University of Tsukuba.

Fernandez, C. (2005). Lesson Study: A means for elementary teachers to develop the knowledge of mathematics needed for reform-minded teaching? *Mathematical Thinking and Learning, 7(4)*, s. 265-289.

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y. & Miyakawa, T. (2007). *Japanese lesson study in mathematics. Its impact, diversity and potential for educational improvement.* Singapore: World Scientific.

JSME, Japan Society for Mathematics Education. (2000). *Mathematics teaching in Japan.* Tokyo: JSME.

Lewis, C. (1995). *Educating hearts and minds: Reflections on Japanese preschool and elementary education.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook for teacher-led improvement of instruction.* Philadelphia: Research for Better Schools.

Lewis, C. (2002). Does Lesson Study Have a Future in the United States? *Nagoya Journal of education and Human Development, 2002 (1)*, s. 1-23.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (under udgivelse). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: étude collective d'une leçon. *Education et Didactique*.

Oliveira e Silva, T. (2008). *Goldbach conjecture verification*. Lokaliseret den 12. januar 2009 på: www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html.

Padilla, M. & Riley, J. (2003). *Guiding the new teacher: induction of first year teachers in Japan.* I: E.Britton et al. (red.), *Comprehensive teacher induction. Systems for early career learning.* Kluwer: Dordrecht.

Stigler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Summit Books.

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer: en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik.* Frederiksberg: Biofolia.

Winsløw, C. (2007). Didactics of mathematics: an epistemological approach to mathematics education. *The Curriculum Journal, 18/2007(4)*, s. 523-536.