

En lækker bog om matematiske horisonter



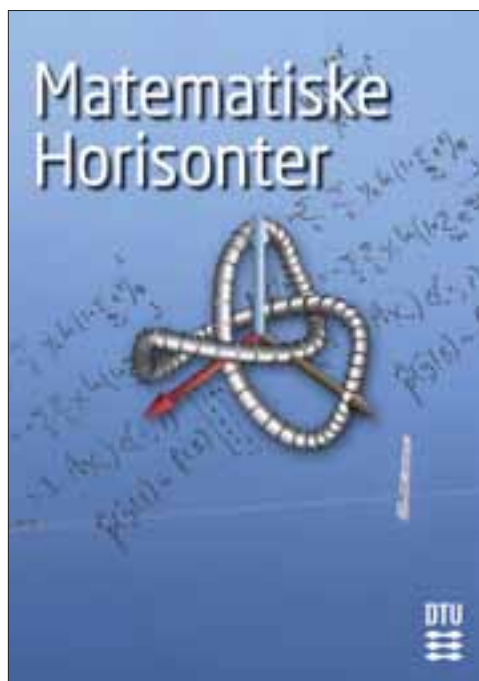
Tinne Hoff Kjeldsen, IMFUFA,
Roskilde Universitet

Anmeldelse af “Matematiske Horisonter”. Redigeret af Carsten Broder Hansen, Per Christian Hansen, Vagn Lundsgaard Hansen, Mette Minor Andersen. Danmarks Tekniske Universitet, 2009.

Matematiske Horisonter er en indbydende bog. Man får lyst til at tage den op og bladre i den. Der er kælet for designet. De mange, flotte, helsides farvebilleder fanger ens blik, og nogle af de mere fængende kapiteloverskrifter pirrer ens nysgerrighed, for hvad har medicinudvikling, øl og fladskærme, brand og colaautomater med matematik at gøre? Det er dygtigt lavet, og der er ingen tvivl om at bogen vil være en inspirationskilde for undervisere i gymnasiet – og dermed formentlig også for eleverne, hvilket er bogens erklærede formål.

Bogens opbygning

Bogen er struktureret i forhold til to snit, *Matematik* og *Matematik igennem millenier*, der løber parallelt igennem bogen. Det første snit er bygget op om-



kring en række eksempler der illustrerer hvordan matematik bliver brugt til at løse forskelligartede problemstillinger der ligger uden for matematikken selv, og man kunne mene at en titel i stil med *Matematisk modellering* ville have været mere dækkende.

Det andet snit består af fire kapitler hvori der fortælles lidt om den tidligste matematik vi kender til, om matematikken i Europa fra renæssancen til 1900-tallet og om matematikken i det 20. århundrede.

Og så – midt i det hele – er der et kapitel om kvinder og matematik. Her præsenteres man for en anden slags modeller end de matematiske, nemlig for kvindelige rollemodeller: en forsker fra DTU, kvindelige studerende der bruger deres matematiske viden inden for it og bioteknologi, samt kvinder der har gjort karriere bl.a. i finanssektoren. Men selvom kapitlet således falder ved siden af bogens to parallelle snit, passer det alligevel godt ind i bogens samlede plot, der går ud på at inspirere folk til at gå på “opdagelse i matematikkens fascinerende univers”, som der står i introduktionen. Og der er noget der tyder på at en særlig appel til kvinder har sin berettigelse – i hvert fald står kapitlets budskab om at matematik også er for kvinder, i skærende kontrast til kønsfordelingen i forfatterskaren, hvor kun tre ud af de 31 forskere der har skrevet bogens kapitler, er kvinder.

Modelleringskapitlerne

Der ser ikke ud til at have været nogen form for overordnet strukturering af de 16 kapitler der udgør indholdet af *Matematik*-snittet. De er enkeltstående kapitler uden en fælles ramme. Der er fx meget store forskelle på hvor detaljeret matematikken er beskrevet i de forskellige kapitler, og hvor udførligt der er ar-

gumenteret for modelopstillingen. Det giver bogen et præg af at være en slags mere eller mindre tilfældigt sammensat mosaik, og selvom det måske umiddelbart kunne lyde som en kritik af bogen, så virker denne tilfældige(?) sammensætning faktisk inspirerende.

Hvad er det så for nogle problemstillinger man bliver præsenteret for i bogen, og hvad er det for noget matematik der er på banen? Generelt kan man sige at man kommer vidt omkring: fra bekæmpelse af skovbrande i Canada over FBI's digitale fingeraftryksarkiv og modeller for hjernens beslutningsproces til missionen på Mars. Det eneste kapitlerne har tilfælles, er at matematik på en eller anden måde indgår som løsningsredskab, og at den matematik der kommer i anvendelse, tager afsæt i gymnasiets matematik.

Der lægges ud med kapitlet “Evolutions matematik”. Her matematiseres naturlig udvælgelse som konkurrerende optimeringsprocesser der afhænger af hinanden og forløber samtidig – et evolutionært spil er i gang, og dermed bringes spilteorien ind i billedet. Nash-ligevægt introduceres, og forfatterne bruger dette begreb til at forklare hvorfor der fødes lige mange unger af han- og hunkøn.

Næste kapitel handler om *brand!* Her opstilles simple matematiske modeller for hvordan en brand breder sig. Sådanne modeller bruges af brandfolk og myndigheder til planlægning af slukningsarbejde, og der henvises bl.a. til det canadiske Forest Fire Behaviour Prediction System der er baseret på en slags elliptisk udbredelsesmodel der præsenteres i ka-

pitlet. Forfatteren diskuterer modelopstillingerne og nogle af de mere grove antagelser der ligger bag.

I kapitlet om *colaautomaten* giver de fire forfattere en meget detaljeret beskrivelse af hvordan man ved hjælp af transitionsdiagrammer og transitionssystemer kan bygge en model for hvordan en sådan automat virker. Som forfatterne skriver, så er det *logikken* i systemet de er interesseret i, og de har formentlig valgt colaautomaten som eksempel fordi systemet her er forholdsvis enkelt at beskrive. De slutter af med at påpege at transitionssystemer for alvor kommer til deres ret i de avancerede computersystemer der er i fly, biler og kraftværker, finanssektoren og sundhedssystemet. Forfatterne nævner at disse teknikker kan bruges i forbindelse med mobiltelefoner og deres vekselvirkning med web-systemer, der åbenbart kan foregå på ret uforudsigelige måder. Her kunne det have været interessant hvis de havde givet et par konkrete eksempler på sådanne uforudsigelige måder.

Fra colaautomater springes der til digitale billeder og *Wavelets – forbrydernes skræk*. Ved hjælp af et eksempel illustreres wavelet-metoden til reducere af datamængder der beskriver digitale billeder, uden tilsvarende reducere af kvaliteten. Via eksemplet, der er så simpelt at man selv kan regne på det uden brug af avancerede lommeregner, lykkes det forfatteren at forklare hvordan wavelet-metoden har gjort det muligt at komprimere fingeraftryk så det nu kan lade sig gøre at søge efter matchende

aftryk i FBI's digitale fingeraftryksarkiver – til skræk og advarsel for alle hvis fingeraftryk er registreret digitalt.

At hemmelige koder kan forblive hemmelige selvom nøglen, eller koden, offentliggøres i avisen, lyder som lidt af et paradoks. Men det er det ikke – og Diffie-Hellmans matematiske løsning på problemet om nøgleudveksling bliver gennemgået i kapitlet "Da de hemmelige koder blev offentlige". Gennem en række af opgaver leder forfatterne læseren gennem modulo-regning, Diffie-Hellmans funktion og betydningen af printal, byggende på simple eksempler som man selv kan regne på. De slutter af med en perspektivering til hvor denne teknik bruges i praksis, og berører kort konflikter mellem den slags forskning og politiske problemstillinger.

I kapitlet "Matematik i medicinudvikling" præsenteres matematisk modellering som et vigtigt værktøj til at effektivisere forsøg med ny medicin og afkorte den tid der går før et nyt medicinsk produkt bliver godkendt. Koncentrationen af medicin i kroppen over tid modelleres ved hjælp af simple kompartmentsmodeller der fører til førsteordens-differentialligninger med konstante koefficienter. Ud fra koncentrationsprofiler ved intravenøs hhv. oral dosering af paracetamol diskuteres det hvordan man kan estimere parametre. Derudover gennemgås det hvordan maksimumskoncentrationen og steady state-niveauet ved multipel dosering kan bestemmes.

Man kunne måske umiddelbart tro at kapitlet "Hvorfor kører Michael Rasmus-

sen så hurtigt op ad bakke? Og hvorfor vinder Tom Boonen spurterne?” er en fortælling om Tour de France, men nej – det er en fortælling om potensfunktioner. Her svares der på spørgsmålene om hvordan Michael Rasmussen på forhånd kunne vide at han ville tabe mindst 5 minutter på enkeltstarten i Tour de France i 2005, og hvorfor det ikke nytter noget at sige til “Super” Mario Cipollini at han bare skal tage sig sammen i stedet for at give op på forhånd i bjergene. Og hvorfor tager Marco “Il Pirata” Pantani mod vandflasker når han når toppen af bjerget, når han nu ikke har tænkt sig at drikke vandet? Det bliver alt sammen forklaret ved hjælp af diverse sammenhænge mellem vægt, muskelkraft, vindmodstand og terrænets stigning, og det hele modelleres med potensfunktioner.

I kapitlet “Fejlrettende koder” er problemstillingen hvordan man kan opnå en pålidelig kommunikation over en kanal med støj. Meddelelserne udstyres med en matematisk struktur, og ved brug af modulo-regning indføres de fire regningsarter. Med udgangspunkt i et eksempel på en såkaldt Reed-Solomon-kode, der er koder som er i stand til at rette mange fejl, analyserer forfatterne sig frem til en algoritme, og som eksempel på anvendelse illustrerer de princippet bag den kode der benyttes i dvd’en.

Kapitlet “Øl og fladskærme” handler ikke om øl og fladskærme men om statistik i aktion, som da også er kapitlets undertitel. Vi introduceres her til forskningsfeltet sensorik der handler om mennesket som måleinstrument, og det

er her øl og fladskærme kommer ind. For hvordan skal næste generation af øl smage? Og hvordan skal fremtidens tv-apparat se ud? Statistik og matematiske modeller for hjernens beslutningsproces er centrale elementer i sensorik. I kapitlet præsenteres de grundlæggende begreber i statistik, såsom hypotesetest, binomialfordelingen, statistisk inferens, konfidensintervaller og normalfordelingen. I slutningen af kapitlet trækkes der tråde op til brugen af mennesker som måleinstrument, idet det forklares hvordan normalfordelingen kan bruges som psykofysisk model for hjernens beslutningsproces. Som en særlig styrke ved dette kapitel diskuterer forfatteren også nogle mere kritiske aspekter af brugen af matematiske modeller i beslutningsprocesser.

I “Matematikken i computerens verden – computeren i matematikkens tjeneste” lærer vi lidt om computerens funktion i matematik som primært skyldes computerens evne til at regne. Med computeren kan vi lave simuleringer af komplekse systemer. Mange af løsningerne på delproblemer i simuleringer kan kun løses ved numeriske metoder der er udviklet til computeren. Som eksempel på sådanne metoder gennemgår forfatterne nogle algoritmer til computerberegninger af kvadratrødder, integraler og rødder. De slutter af med en diskussion af matematiske metoder der kan bruges til at filtrere støj som vores målinger er behæftet med, og vurdere fejlen på vores resultater.

“Operationsanalyse – the science of the better” er en glimrende introduktion

til hvad operationsanalyse egentlig er, og hvad det kan bruges til. Grundkomponenterne er – ikke overraskende – matematiske modeller, og som en særlig styrke ved dette kapitel gives der en kort beskrivelse af hvad man egentlig skal forstå ved begrebet *matematisk model* – hvad er det, og hvorfor kan de bruges til at løse komplekse problemstillinger såsom store planlægningsopgaver a la S-togs-trafikken i København så driftsomkostningerne minimeres. Forfatteren illustrerer operationsanalysens metoder ved hjælp af to planlægningsproblemer – projektplanlægning og dimensionering af mandskab.

“Logik, computere og kunstig intelligens” handler om hvordan udsagn om et område kan formuleres logisk, og hvordan logik kan behandles på computeren med det formål at ræsonnere logisk om forhold i det område man tog udgangspunkt i. Der fortælles lidt om hvad logik er, og om logik som regning med udsagn. Med farvelægning af landkort som eksempel introduceres der til logikprogrammering. Logikkens begrænsninger som modelleringsværktøj diskuteres, og kapitlet rundes af med et afsnit om logik, kunstig intelligens og robotter.

I “Matematisk modellering af klima og energi” bygges der førsteordens-differentielligningsmodeller for varmetransportet i et hus. Modellen udvides gradvis så der både tages højde for radiatorer og solstråling. Hvis man vil forhøje andelen af solenergi i elproduktionen, er det nødvendigt at kunne forudse solenergiproduktionen, og forfatteren gennemgår en

forsimpling af en metode der er udviklet til netop det.

“Mission til Mars” handler om den lille bil Sojourner der landede på Mars den 4. juli 1997. I kapitlet bliver vi ledt igennem NASA-ingeniørernes overvejelser i forbindelse med konstruktionen af bilen og dens opgaver. For at kunne styre Sojourners energiforbrug blev bilen designet så den højst udførte én opgave ad gangen. Forfatterne gennemgår diverse algoritmer til topologisk sortering og energioptimering og slutter af med at udfordre læseren til at udnytte denne viden til at komme frem til en bedre løsning end NASA’s ingeniører!

“Når matematikken tager form” handler om computerassisteret medicinsk billedanalyse der bruges som en integreret del af diagnosticering, evaluering af progression og behandling af sygdomme. Et vigtigt element heri er udvikling af matematiske modeller der kan beskrive sammenhæng mellem fysiologien og morfologien. I kapitlet beskrives det hvordan man kan kvantificere form i forhold til en reference. Der gives tre eksempler på anvendelser af billedanalyse: morfometrisk analyse af neurologiske sygdomme, Crouzons syndrom og deformationsanalyse af hørekanalen.

De historiske kapitler

De fire historiske kapitler har samme forfatter, hvilket har sikret en nogenlunde ensartet fremstilling. De er bygget kronologisk op, og der males med bred pensel. De to første kapitler har titlen “Ma-

tematik i støbeskeen”, og det første vi præsenteres for, er den 20.000 år gamle Ishango-knogle. Der er lavet udskæringer i knoglen der tilsyneladende følger et mønster, men hvad den har været brugt til, ved man ikke. Derfra går det over stok og sten – vi hører om egyptisk matematik og hvordan egypterne beregnede arealet af en cirkel, om babylonierne og deres udvikling af 60-tals-systemet og om mayaerne og deres kalender. Endelig præsenteres vi også for matematikken i det antikke Grækenland, deres geometri og talteori. I andet kapitel hører vi om hindumatematik, islamisk matematik og matematik i Europa i middelalderen, hvorfra der springes til matematik i Kina. Kapitlet “Europæisk matematik fra renæssancen til 1900-tallet” starter med løsningen af kubiske ligninger i Italien i 1500-tallet og slutter med at omtale nogle udviklinger fra det 19. århundrede som Fourier-analyse, Stokes’ sætning i vektoranalyse og Laplaces sandsynlighedsteori. Navne som Sturm, Liouville og Poincaré nævnes i forbindelse med teorien for differentialligninger. Indimellem hører vi om matematik og den videnskabelige revolution, at Galilei og Newton udnyttede matematikken i studiet af mekanikken, om analytisk geometri, infinitesimaler, begyndelsen på den matematiske analyse, Abels og Galois’ betydning for abstrakt matematik, udviklinger i geometrien og stringens i analysen. Tempoet fortsætter i det sidste af de historiske kapitler, “Matematik i det tyvende århundrede”, hvor vi hører om problemer i grundlaget for mængdelæren og stifter

bekendtskab med ord som udvalgsaksiomet, kontinuumshypotesen, algebraisk topologi, homologisk algebra, Poincarés formodning, deltafunktionen, funktionalanalyse og indekssætningen.

Kapitlerne har i større eller mindre grad karakter af opremsninger – særlig det sidste, hvor der ikke er taget hensyn til målgruppen. Det er selvfølgelig vanskeligt at forklare de matematiske landvindinger fra det 20. århundrede for gymnasieelever, men hvad kontinuumshypotesen og Fermats sidste sætning går ud på, kunne man godt have brugt lidt plads på at beskrive, og ligeså med udvalgsaksiomet og hvorfor nogle anser det for problematisk. Det kunne have været interessant at se nogle få eksempler på hvordan matematikken så ud i tidligere tider, i hvilken forstand den har forandret sig over tid, og hvor idéer til ny matematik kommer fra. Men når det er sagt, så lykkes det faktisk forfatteren at give et indtryk af at matematik, selvom det er et af de ældste fag i verden, stadig er i rivende udvikling – og det er meget godt gået.

Samlet vurdering og afrunding

Bogens formål er at vise at matematik er et fag der er i stadig udvikling, og at der findes en mangfoldighed af spændende anvendelsesområder hvor matematisk modellering kan bidrage til løsning af komplekse og yderst relevante problemstillinger som vi står over for i dag. Som allerede nævnt lever bogen i høj grad op til sit formål. Man kunne godt have øn-

sket sig at der var gjort lidt mere ud af at forklare hvad en matematisk model er (det beskrives kun ganske kort i et af kapitlerne), og hvad der sker i modeleringsprocessen. En sådan beskrivelse ville også naturligt bringe refleksioner over matematik i anvendelse og kritik af modellering på banen – problemstillinger som bogen næsten er blottet for. Hvad angår de historiske kapitler, så viser de at matematikken er – og altid har været – et fag der ikke er præget af stagnation. Her kunne det have været interessant at se nogle få eksempler på hvordan matematikken så ud og blev opfattet i tidligere tider til sammenligning med i dag.

Kapitlerne er meget forskellige hvad angår detaljeringsgraden. Nogle af modelleringseksemplerne kan bruges direkte i gymnasieundervisningen, vil jeg tro, mens andre mere har karakter af at vække til inspiration og undren og hvor anvendelse i undervisningssammenhænge formentlig vil kræve en hel del viderebearbejdning af læreren. Dette er ikke ment som en egentlig kritik af bogen da det er forfriskende at en stor del af ek-

semplerne er hentet fra forskernes egne interesseområder og forsøgt formidlet så man i hvert fald kan få en idé om hvad og hvorfor matematikken kan give svar på de rejste problemstillinger.

Det største problem er at der ingen referencer er overhovedet. Det er meget overraskende for en bog der har til formål at inspirere læseren “til at gå endnu dybere på opdagelse i matematikkens fascinerende univers” – for hvor skal man gå hen? På DTU vil nogle måske svare – ja, men alligevel, det er ærgerligt at man ikke har gjort noget ud af at finde referencer til relevant, supplerende litteratur.

Bogen viser et billede af matematikken som et levende fag med (uandede) muligheder i mange af det moderne livs problemstillinger. Dette fanges ind af de to snit der strukturerer bogen, og den vil kunne danne udgangspunkt for udvikling af spændende og motiverende modelleringsprojekter til gymnasiernes matematikundervisning.

Det er kort sagt en *lækker* bog, og man kan kun håbe at den vil inspirere til flere af slagsen.