

Forskningens rolle i forbedringer af matematikundervisning



Af Edward Griffith Begle, 1914-1978

Originaltitel: THE ROLE OF RESEARCH IN THE IMPROVEMENT OF MATHEMATICS EDUCATION. Artiklen er oversat fra engelsk af MONA-redaktionen.

Artiklen bringes med tilladelse fra Springer Science+Business Media. Den er udgivet i *Educational Studies in Mathematics*, vol. 2, nr. 2/3, Addresses of the First International Congress on Mathematical Education (december 1969), s. 232-244. Udgivet af: Springer Stable, www.jstor.org/stable/3482078.

Introduktion til artiklen

Af Mogens Niss, professor, IMFUFA, Roskilde Universitet.

Edward G. Begles artikel, som vi her bringer i dansk oversættelse, er en klassisk artikel i matematikkens didaktik. Artiklen er ofte omtalt i fremstillinger af den historiske udvikling af feltet. Ikke mindst den passus i slutningen af artiklen hvor Begle fremsætter sit credo – at større forbedringer i matematikundervisningen forudsætter at matematikkens didaktik må blive en eksperimentel videnskab på linje med fysik, kemi, biologi osv. – er jævnligt citeret i litteraturen.

Når artiklen er blevet en klassiker, er det fordi den er et af de første eksempler i nyere tid på at en aktiv matematikdidaktisk forsker leverer et overordnet bud på hvad matematikkens didaktik som forskningsområde aktuelt (dvs. i 1969) tilbyder og burde komme til at tilbyde. Artiklen er baseret på Begles plenumforedrag ved den første internationale matematikundervisningskongres, ICME-1, der blev afholdt i Lyon i 1969 i Hans Freudenthals "regeringstid" som præsident for den internationale matematikundervisningskommission, ICMI. Året før havde Freudenthal påbegyndt

udgivelsen af det første internationale matematikdidaktiske tidsskrift, *Educational Studies in Mathematics*, og det er i dette tidsskrifts anden årgang at artiklen blev offentliggjort.

Begles artikel fremstår på én gang meget nutidig og noget alderstegen. Nutidig fordi mange af de betragtninger og problemstillinger der tages op rundt omkring i artiklen, er lige så aktuelle i dag som i 1969. Det gælder fx når der spørges om hvorvidt alle elever skal beherske regneprocesserne så godt at de kan forstå hvad computere kan og ikke kan, og når Begle gang på gang fastslår at vores forestillinger om "selvfølgeligheder" i matematikundervisningen viser sig at være alt for forenkede og ikke sjældent rent ud forkerte. Han efterspørger derfor en mængde ny (grund)forskning til afklaring af hvordan det faktisk forholder sig på en lang række punkter. Alderstegen fordi artiklen udelukkende trækker på en kvantitativt orienteret forskningstradition hvor der efterspørges målbare effekter af dette og hint, og hvor metoderne derfor i alt væsentligt er komparativt statistiske, anvendt på større datasamlinger. Imidlertid omtaler Begle mod artiklens slutning nødvendigheden af mere dybtgående og mere detaljerede undersøgelser på mindre populationer som forudsætning for efterfølgende undersøgelser i større skala. Man kan næsten fornemme de første skridt hen imod de kvalitative undersøgelser i mindre skala der i dag dominerer den empirisk orienterede matematikdidaktiske forskning.

Til slut et par biografiske bemærkninger. Ed Begle (1914-1978) var uddannet som forskningsmatematiker med en ph.d.-grad i topologi fra Princeton. Efter ophold ved forskellige amerikanske universiteter (Michigan og Yale) blev han i 1961 professor ved Stanford University hvor han både blev knyttet til uddannelsesforskning og til matematik. Stanford blev derfor hjemmebasen for den i sin tid berømte *School Mathematics Study Group (SMSG)* der – etableret i 1958 med Begle som leder – var en hovedkraft i frembringelsen af den såkaldte nye matematik, *New Math*, et gennemgribende reformprogram der søgte at basere al matematikundervisning på mængdelære og abstrakte matematiske strukturer. Ud over for sit arbejde med SMSG og for den artikel vi bringer her, er Begle navnlig kendt for sit posthumt udgivne værk *Critical Variables in Mathematics Education: Findings from a Survey of the Empirical Literature* (1979) der rummer hans forsøg på at skabe et systematisk overblik over den tids empiriske forskningsresultater inden for matematikkens didaktik. Interessant nok blev kun to ph.d.-grader tildelt under Begles vejledning. Den ene blev erhvervet af den fremtrædende matematikdidaktiker Jeremy Kilpatrick som er *still going strong*.

De enorme ændringer i matematikundervisningen der er sket i det sidste tiår [forud for 1969, red.], er foregået parallelt med og er faktisk i høj grad formet af en lang række diskussioner om problemerne inden for matematikundervisningen. Jeg har ikke i

sinde at gennemgå substansen i disse mange diskussioner. I stedet vil jeg gerne gøre opmærksom på at disse diskussioner har drejet sig om et lille antal generelle kategorier af matematikdidaktiske spørgsmål. En af disse kategorier omfatter spørgsmål om endegyldige mål med matematikundervisningen. Spørgsmål som "Hvilke regnefærdigheder vil vi gerne have alle elever til at beherske?" eller "Skal alle elever forventes at kunne beherske regneprocessernes beskaffenhed så godt at de kan forstå hvad computere kan, og hvad de ikke kan?" er eksempler på spørgsmål i denne kategori. Det gælder i øvrigt at ethvert spørgsmål om hvorvidt et givent emne har en værdi i sig selv, ligger i denne kategori.

En anden kategori omhandler spørgsmål om prioriteringen og rækkefølgen af de forskellige emner i matematikpensum. Her placerer vi spørgsmål som med udgangspunkt i et givent matematisk emne spørger hvilke andre matematiske discipliner eleven skal kunne for at beherske dette emne. Et andet eksempel: Hvis der kendes to veje hen imod et bestemt matematisk emne, hvilken af disse er da den bedste eller mest effektive eller hurtigste?

En helt tredje kategori består af spørgsmål om pædagogiske tilgange. Her placerer jeg spørgsmål om effektiviteten af undersøgelsesbaseret undervisning, om værdien ved at bruge strukturerede materialer i regneundervisningen i de tidlige klasser, om værdien af elev-elev- kontra lærer-elev-diskussioner i klasserummet osv. Her placerer jeg også spørgsmål om karakter og omfang af uddannelsesprogrammer for matematiklærere.

Endelig er der den store kategori af spørgsmål om den matematiklærendes beskaffenhed og kapacitet. For eksempel "Kan alle elever lære rudimentær algebra [her nærmest: regnereglerne, red. anm.]? Kan alle elever lære divisionsalgoritmen? Er der elever der lærer bedst hvis matematikken præsenteres i geometrisk form, mens andre finder en symbolsk fremstilling mest effektiv?"

I løbet af det seneste tiårs diskussioner er der fundet svar på et stort antal af spørgsmålene i hver af disse kategorier, i mange tilfælde faktisk flere og sommetider indbyrdes modstridende svar.

Jeg har ikke i sinde at gennemgå disse mange spørgsmål og deres mange svar, ej heller agter jeg at give mine egne svar på nogen af dem. Jeg vil derimod gerne fremføre to grundlæggende pointer om spørgsmål og svar. Min første pointe er at svarene på næsten alle de stillede spørgsmål har et faktuel aspekt. Det er sandt at nogle få af de spørgsmål der kan stilles om målene med matematikundervisningen, kan besvares som rene værdiudsagn som vi nok kan være uenige om, men ikke argumentere rationelt for eller imod. Men de fleste spørgsmål kræver svar som foregiver at være faktuelle udsagn om virkelige elever, virkelige lærere og virkelige klasserumssituationer.

Min anden pointe er at det faktuelle aspekt er blevet voldsomt ignoreret i alle vores diskussioner, og at de fleste af de svar vi har fået, almindeligvis kun har ringe empirisk

berettigelse. Jeg tvivler på at mange af de svar vi har fået, er fuldstændig forkerte. Jeg tror snarere at svarene er alt for enkle, og at virkelige elevers matematiske opførsel og præstationer er meget mere komplekse end svarene vil have os til at tro.

Lad mig for at give disse bemærkninger et vist empirisk grundlag tage fat i et par specifikke spørgsmål. Som et eksempel på at den virkelige situation kan være betydelig mere indviklet end den man kunne have forventet, vil jeg beskrive et eksperiment der for nylig blev udført af en af mine kolleger, professor Jon Higgins, på Stanford Universitet [4]. Mange matematikere – og en endnu større andel af naturvidenskabsfolk – mener at naturvidenskab er en udmærket motivationsfaktor og kilde til nye idéer for matematik. Med det i tankerne tilrettelagde School Mathematics Study Group (SMSG) for nogle få år siden nogle korte tekster beregnet på klasseundervisning i så henseende. I kapitlet til 8. klassestrin som blev brugt i dette eksperiment, skal eleven udføre en række fysiske forsøg, foretage målinger og lave grafer over resultaterne. Denne eksperimentelle fase blev brugt til at introducere og motivere matematikken om lineære ligninger og deres grafer. Kapitlet tager ca. 4 uger for klassen at gennemgå.

29 8.-klasses-lærere deltog i eksperimentet og underviste hver især én klasse i emnet. Elevernes gennemsnitsalder var omkring 14, og klasserne var i snit på 33 elever. Der blev holdt fire forberedende møder med lærerne så de kunne blive bekendt med det forsøgsudstyr som eleverne skulle bruge.

Der blev afholdt en række test før undervisningen begyndte. I testmaterialet var der en kort ræsonnementsprøve, tre matematiktest af relevans for afsnittets matematikemne og 18 kortskalatest til måling af forskellige facetter af elevers holdning til matematik og andre skolefag. Efter at undervisningsforløbet var gennemført, blev de oprindelige test, bortset fra ræsonnementstesten, gennemført igen.

Afviselserne mellem før- og eftertest blev opgjort. Det viste sig at der var markant fremgang for de tre matematikprøvers vedkommende, og at der var signifikante ændringer på seks af holdningsskalaerne. I fem ud af seks tilfælde gik ændringerne i en negativ retning.

For at analysere disse holdningsændringer nærmere benyttede man en statistisk metode der kaldes hierarkisk grupperingsanalyse. Denne procedure tager udgangspunkt i profilen af holdningsændrings-scorer for hver enkelt elev og deler eleverne ind i grupper således at alle eleverne i hver gruppe har tættest sammenfaldende holdningsændringsprofiler, mens to vilkårlige elever fra to forskellige grupper har så forskellige profiler som muligt.

Ved denne statistiske fremgangsmåde blev der dannet otte grupper. (Hvis alle elevers holdninger havde ændret sig på samme måde, ville der naturligvis kun have været én gruppe). Dataanalysen viste at der ikke var én af lærerne der kunne tilskrives ansvaret for elevernes gruppeplacering, idet antallet af lærere der var repræsenteret i

en given gruppe – bortset fra den største af grupperne – var nogenlunde det samme som antallet af elever i den. Holdningsændringerne var åbenbart ikke afhængige af hvilken klasse en elev gik i.

Dette resultat illustrerer aldeles udmærket min påstand om at det udgangspunkt vi har fået for at forbedre matematikundervisningen, som regel har været overforenklet, og at virkeligheden som regel er mere kompleks.

Faktisk er disse resultater endnu mere komplekse end jeg hidtil har angivet. En variansanalyse viste at der dybest set ingen signifikante forskelle var på førtesten blandt syv af de otte gruppers scorer. (Den ottende gruppe omfattede elever som havde meget lave initialscorer på den holdningsskala hvor der var generel forbedring. Denne gruppe udviste kun ubetydelige ændringer på alle de andre skalaer). Det vil sige at de mange typer information fra førtest-pakken ikke gav nogen indsigt i de bagvedliggende grunde til disse forskellige mønstre af holdningsændringer, og at de ikke gav noget bud på hvordan vi måske kan influere på dem.

Lad mig nu vende mig mod et andet emne som jeg tror de fleste af os har meninger om, men som, trods styrken af disse meninger, mangler eller ligefrem er i modstrid med empiriske resultater.

Jeg vil tro at de fleste af os er ret sikre på at vi kan vurdere en bestemt lærers effektivitet efter at have siddet en halv times tid bagerst i lokalet og observeret læreren i sving. Jeg deler imidlertid ikke denne sikkerhed. Masser af undersøgelser af lærereffektivitet er blevet gennemført i USA (oversigten [1] er ganske illustrativ for disse undersøgelser). Et resultat er klart. En vurdering af lærereffektivitet foretaget af én slags person, for eksempel skoleledere, er ganske ukorreleret med vurderinger foretaget af andre, for eksempel lærerkolleger. Bedømmelser af lærereffektivitet er, uanset hvem der foretager dem, normalt ikke korreleret med målinger af elevers læring.

Ikke desto mindre er spørgsmålet om lærereffektivitet, problemet med at måle den og problemet med at forudsige den ekstremt vigtige. I ethvert uddannelsessystem tages der et enormt antal beslutninger som forudsætter kendskab til læreres effektivitet. Beslutningen om at optage en person på et læreruddannelsesforløb involverer, i det mindste implicit, en forudsigtelse af vedkommendes potentielle effektivitet som lærer. Beslutninger om ansættelse, forfremmelse eller fyring af lærere vil bl.a. være baseret på en vurdering af lærerens effektivitet. Beslutninger om ændringer i læreplaner bør til dels være baseret på information om effektiviteten af de lærere der skal være med til at gennemføre ændringerne.

Fordi dette spørgsmål er så vigtigt, indsamlede SMSG i forbindelse med en stor, langsgående undersøgelse af matematikpræstationer som startede i 1962 og løb i fem år, en betragtelig mængde information om et stort antal lærere. Vi er netop blevet færdige med at analysere en del af disse data i et forsøg på at finde ud af mere om lærereffektivitet.

Fordi vurderinger af lærereffektivitet har vist sig at være upålidelige, besluttede vi at måle lærereffektivitet udelukkende ved elevpræstationer. Selvfølgelig ville det ikke være nok at sige at denne lærer er mere effektiv end en anden lærer, hvis førstnævntes elever fik højere karakterer ved årets udgang. Det kunne jo være at den første lærers elever var bedre og/eller kunne mere af faget fra året før. Vores tilgang tog derfor hensyn til en række målinger ved årets begyndelse, både af generel ræsonnementsevne og af matematiske forudsætninger. Ved hjælp af regressionsanalyse beregnede vi hvilken kombination af initial-scoringer der bedst forudsagde en gennemsnitlig præstation på en bestemt test ved årets udgang, og kunne dermed tildele hver elev en beregnet score på denne test som tog hensyn til elevens udgangsposition. Forskellen mellem elevens faktiske score og den forventede viste hvor meget bedre (eller hvor meget dårligere hvis den var negativ) hans præstation var i forhold til en gennemsnitsbetragtning. Gennemsnittet af alle disse differencer blev anvendt som et udtryk for effektiviteten af denne klasses lærer.

Disse beregninger blev faktisk foretaget for en række forskellige grupper af lærere. Vi havde en gruppe af 4.-klasses-lærere som benyttede hvad vi opfattede som moderne lærebøger, og en anden gruppe som brugte hvad vi ville kalde traditionelle lærebøger. Der var tilsvarende grupperinger af lærere i 7. og i 10. klasse. Vi opdeltede også lærerne efter køn og undersøgte hvert køn for sig. I visse tilfælde mente vi det var rimeligt at undersøge drenge- og pigelever for sig. Endelig brugte vi to forskellige målinger ved årets udgang, den første af evnen til talbehandling, den anden af begrebsforståelse. Der blev således beregnet to forskellige effektivitetsindekser for hver lærer.

De resultater som vi opnåede, var, i hvert fald for mig, nedslående. Der var signifikante og i de fleste tilfælde temmelig store udsving i lærereffektivitet. Men disse udsving i lærereffektivitet var tilsyneladende ikke korreleret til noget som helst andet vi vidste om lærerne. Vi havde samlet betydelige mængder oplysninger i to kategorier om lærerne. Den første kategori bestod af faktuelle oplysninger såsom alder, køn, undervisningsanciennitet, uddannelse ud over minimumskravene, aktuel efteruddannelse osv. Vi var overbeviste om at en lærers personlighed og indstilling til lærergerningen, til faget matematik eller til eleverne kunne have indflydelse på elevernes præstationer. Den anden kategori var udledt af et langt spørgeskema som gav os information om lærernes holdninger og personlighedsvariable.

En regressionsanalyse viste at denne betragtelige mængde information om lærerne på ingen måde kunne tages til indtægt for mere end en brøkdel af udsvingene i effektivitetsscorerne, i de fleste tilfælde under 10 %.

Netop spørgsmålet om lærereffektivitet er noget mange synes at de ved ret meget om. Min gennemgang af forskningslitteraturen og af vores egen analyse overbeviser mig om at denne viden ret beset er temmelig upålidelig. At denne situation i øvrigt

ikke er speciel for USA, fremgår klart af kapitel 6 i bind 2 af rapporten *International Study of Achievement in Mathematics* [7].

Lad mig, som et sidste eksempel, berette om nogle nye empiriske resultater som kaster tvivl over noget der hidtil har været et universelt dogme. Næmlig troen på at matematiske evner, i lighed med intelligens, ikke er jævnt fordelt blandt individer, men at visse individer har høje matematiske evner, mens andre har ringe matematiske evner, og resten ligger et eller andet sted indimellem. Faktisk tror vi at i hvilken som helst naturlig population af rimelig størrelse svarer fordelingen af matematiske evner nogenlunde til en normalfordeling. Vi går også ud fra at elever med ringe matematiske evner ikke kan lære lige så meget matematik eller lære det i samme omfang som dem der har høje matematiske evner.

De fleste af vores skoleprogrammer er baseret på denne antagelse. De er struktureret således at de, på et eller andet passende trin, kan frasortere dem der indtil videre har klaret sig dårligt i matematik og dermed har udvist lave matematiske evner. Disse elever placeres så i forløb som er mindre krævende matematisk eller slet ikke fordrer nogen matematik.

For nogle få år siden foreslog den fremtrædende psykolog og underviser John Carroll en anden måde at anskue boglige evner på i almindelighed og dermed matematiske evner i særdeleshed [2]. Han fremsatte den hypotese at alle, eller næsten alle, elever kunne bringes op på det samme niveau i et vilkårligt bogligt emne, men at den mængde undervisning der var nødvendig for at tilvejebringe dette niveau, varierede fra elev til elev. På nogenlunde samme tidspunkt hvor Carroll fremsatte sin hypotese, var SMSG i gang med at organisere et eksperiment som viste sig at underbygge denne formodning. Eksperimentet involverede to eksperimentgrupper og to kontrolgrupper af elever. Første eksperimentgruppe bestod af elever der skulle i 7. klasse (altså 12-13-årige), og som befandt sig i 25-50-%-kvartilen i evner, både som målt i en standard-intelligenstest og i en standard-matematiktest. Den anden eksperimentgruppe bestod af elever i samme kvartil, men som skulle i 9. klasse. Kontrolgrupperne som blev udvalgt et år senere, bestod af elever ved indgangen til hhv. 7. og 9. klasse som befandt sig i 50-75-%-kvartilen.

Både eksperiment- og kontrolgrupperne fulgte i 7. klasse samme matematikforløb og brugte samme lærebog, en bog til 7. klasse udarbejdet af SMSG. Tilsvarende fulgte de to 9.-klasses-grupper samme matematikforløb og brugte samme SMSG-algebra-lærebog.

Forskellen lå i at eksperimentgrupperne fik to skoleår til at gennemgå det stof som kontrolgrupperne brugte det sædvanlige ene år på. En samling test blev afholdt ved eksperimentets afslutning. Analysen af testresultaterne viste at 7.-klasses-eksperimentgruppen gjorde det næsten, men ikke helt, så godt som kontrolgruppen. En kovariansanalyse der brugte scorer fra et antal førtest, gav en stærk indikation af at

eksperimenteleverne havde lært betydelig mere på de to år end de ville have lært på ét. På 9.-klasses-niveauet var resultatet omvendt. Eksperimenteleverne scorede højere end kontrolgruppen i udgangstestene.

Her er altså et tilfælde hvor elever med evner under gennemsnittet var i stand til at nå nogenlunde det samme niveau som elever med evner over gennemsnittet som resultat af en forøgelse af den mængde undervisning de modtog.

Tidligere på året gennemførte jeg et lignende eksperiment, omend meget mindre både med hensyn til antal deltagende elever og varighed. Eleverne var halvvejs gennem 4. klasse. Et meget lille matematikemne, fuldstændig nyt for eleverne, blev anvendt, og der blev undervist i det i én, to eller tre dage. I de længerevarende undervisningsforløb blev der ikke introduceret nye idéer, men der var sat tid af til større variation i illustrationerne af de indførte idéer og til elevdiskussioner og -spørgsmål end i de kortere forløb.

På grundlag af en test af den aritmetiske ræsonneringsevne blev eleverne grupperet i tre evneniveauer – lavt, middel og højt. Gennemsnitsscorerne i en eftertest var ikke signifikant forskellige i nogen af de tre diagonaler gående fra nederste venstre mod øverste højre hjørne.

Tabel 1

Evneniveauer	1 dag	2 dage	3 dage
Lavt			
Middel			
Højt			

Dette er altså endnu et eksempel på at elever med svagere evner nåede det samme præstationsniveau som elever med bedre evner når de fik mere undervisning i emnet.

Selvom disse to undersøgelser har temmelig begrænset rækkevidde, sår de dog tilsammen tvivl om den grundtro der er rodfæstet i vores uddannelsessystemer.

Jeg kunne sagtens fortsætte med flere beskrivelser af empiriske resultater, men jeg tror jeg har givet Dem nok. Jeg har muligvis ikke overbevist Dem, men jeg tror at De kan se hvorfor jeg er overbevist om at mange af de vejvisere vi følger i bestræbelserne på at forbedre matematikundervisningen, er af tvivlsom værdi, og at de svar vi har fået på vores fundamentale spørgsmål om matematikundervisning almindeligvis ikke er pålidelige.

Hvorfor befinder vi os i denne ulykkelige situation?

I de debatter der har ført til anbefalinger af ændringer i emnelister eller i pædagogisk tilgang, har jeg kun været i stand til at identificere ganske få logiske fejl. Jeg ser mig nødsaget til at konkludere at de antagelser som var starten på disse argumenter, må have været fejlbehæftede. De stærke meninger som vi alle sammen har om hvordan børn lærer matematik, og hvordan lærere bør undervise, er ofte forkerte og næsten helt sikkert for snævre.

Vi har ikke erkendt at ingen af os igennem vores almindelige gøremål har været i stand til at oparbejde den brede viden om matematikundervisning som vi har behov for. Matematiklæreren med mange års erfaring ved ganske meget om hvordan elever lærer matematik og laver matematik i hans/hendes klasseværelse. Men det fortæller os tilsyneladende ret lidt om hvad der foregår i lokalet inde ved siden af. Forskningsmatematikeren var sandsynligvis atypisk da han/hun gik i skole, og har sikkert under alle omstændigheder glemt det meste af hvad der foregik i timerne. Matematikdidaktikere har dels indtil for nylig været afskåret fra mainstream-matematik og dels været afskåret fra at organisere den slags empiriske undersøgelser der skal til for at tilvejebringe brugbare oplysninger. Selv vores kolleger inden for psykologi med en hovedinteresse i hvordan mennesker lærer, har i det væsentlige beskæftiget sig med hvordan folk lærer ting der er irrelevante for matematik.

Vores kardinalfejl inden for matematikuddannelse har været den manglende erkendelse af at vi ikke besidder de værktøjer der er nødvendige for virkelig at skabe forbedringer af matematikundervisningen, og at det ikke er sandsynligt at vi gennem vores normale gøremål som undervisere og matematikere bliver udstyret med disse værktøjer.

Lad mig ile med at sige at jeg ikke tror at denne fejltagelse har haft katastrofale følger. Tværtimod er jeg sikker på at selvom de pejlemærker vi har fulgt, og de værktøjer vi har brugt i vores bestræbelser over det sidste tiår på at forbedre matematikundervisningen, er af tvivlsom validitet, så har vi bevæget os i den rigtige retning og har opnået positive resultater. Vi har alle sammen fået masser af anekdotisk evidens både fra elever og lærere for at det vi har gjort, har været godt. Jeg må sige at vi er vældig glade for de resultater vi har opnået i analysen af de data der blev indsamlet i vores langsgående undersøgelse [9]. Den matematik der er dækket i SMSG's lærebøger, ser ud til at give bedre forståelse af matematik og bedre evner til at analysere og løse opgaver end det er tilfældet med de mere klassiske lærebøger. Den tid og de anstrengelser vi har lagt i reformarbejdet i det sidste tiår, har ikke været spildt.

Ikke desto mindre kan vi ikke stoppe nu. Yderligere forbedringer er væsentlige. Vores børn kommer til at leve i en stedse mere kompliceret og mere kvantificeret verden end den vi har i dag. De har brug for bedre matematikforløb end de får nu. Vi har stadig mange vanskelige problemer at løse før vi kan gøre yderligere fremskridt.

Faktisk tror jeg at vi hidtil kun har taget hul på de letteste af matematikundervisningens problemer.

Lad mig gennemgå nogle få af disse problemer for at illustrere hvor stor den forstående opgave er. En stor del af en matematiklærers hverv er at udvikle en lang række matematiske begreber i elevernes bevidsthed. Vi kender til mange måder at gøre det på, lige fra lige ud ad landevejen-beskrivelser til helt åbne undersøgelsesmåder. Både antallet og forskelligartetheden af eksemplariske (og ikke-eksemplariske) udgaver af et begreb kan varieres. Forbindelserne mellem et begreb og andre mere velkendte begreber kan fremhæves eller ignoreres.

Der har været mange eksperimentelle undersøgelser af alt dette. ([8] giver et udmærket overblik over undersøgelsesbaseret undervisning. [3] er en nyttig bibliografi over læring af begreber). Desværre er disse undersøgelser konklusioner så forskellige at der ikke kan udledes noget klart mønster. Det vil vare længe før vi kan sige at for netop denne elev og netop denne lærer er den bedste pædagogiske tilgang sådan og sådan. Men problemet er så vigtigt at vedholdende undersøgelser over en bred front er uomgængelige.

Et nært beslægtet problem drejer sig om formelle ræsonnementer. Det meste af den matematik der undervises i på universiteterne, behandles givetvis på formel deduktiv, endog aksiomatisk, vis. Og lige så klart er det at formelle ræsonnementer ikke spiller nogen rolle i folkeskolens første år. Hvordan skal overgangen gribes an?

Som et relevant tilfælde vil jeg nævne multiplikation af negative tal. Hvordan skal dette introduceres? Skal man trække på strukturegenskaber ved ikke-negative tal? Eller er det bedst at starte med en stribe konkrete situationer? Der har været masser af debat om dette, og mange forskellige tilgange er blevet prøvet. Uheldigvis er der ikke blevet udskilt tilstrækkelig megen empirisk information fra alle disse forsøg til at vi har nogen ledetråd her.

Færdighed i talbehandling er et emne der ligger mange på hjerte. Det forekommer klart at alle elever skal opnå et vist færdighedsniveau, men hvilket? Foreløbige resultater fra nogle af vores igangværende analyser antyder at dette niveau ligger lavere end det hidtil accepterede.

Men selv når dette problem er løst, opstår problemet med hvordan man bedst kan nå det passende niveau. Der er dem der påstår at et tilstrækkeligt færdighedsniveau kan nås undervejs gennem en række omhyggeligt valgte opgaver eller ved at være med i visse matematiske spil og lege. På den anden side er andre overbeviste om at en vis mængde omhyggeligt tilrettelagte regneøvelser er nødvendige. Der er tilsyneladende endnu kun meget lidt empirisk evidens som illustrerer dette problem, og så længe vi ikke har det, er vi forhindret i at tilrettelægge bedre læreplaner.

Jeg har allerede nævnt den mulighed at alle, eller næsten alle, elever kan lære lige meget matematik, men at den tid og undervisningsindsats der er nødvendig for at

opnå det, varierer fra elev til elev. Jeg refererede til en smule empirisk information som underbygger dette. Men hele vores uddannelsessystem antager at det modsatte er tilfældet. En mere vidtgående undersøgelse af problemet synes påkrævet.

Jeg har allerede påpeget at vi har meget lidt sikker viden om hvad der skaber en effektiv lærer. Indtil vi ved meget mere, vil vi bare famle rundt når vi prøver at forbedre vores læreruddannelser, og afprøve innovative tiltag på tilfældig måde. Chancerne for at ramme rigtigt, altså opnå en reel forbedring, er mikroskopisk små.

Lad mig afslutte dette udvalg af problemer om matematikundervisning med ét som matematikdidaktikere endnu ikke har hæftet sig meget ved, nemlig de kulturelle indvirkninger på matematiklæring og matematikudbytte. Dette er et emne som er genstand for stor opmærksomhed her i landet for tiden. USA er kulturelt heterogent i den forstand at vi har adskillige store minoritetsgrupper, hver især forholdsvis homogene kulturelt set, men indbyrdes ganske forskellige. Eksempler er de amerikanske indianere, en stor befolkningsgruppe af mexicansk oprindelse, den sorte befolkningsgruppe, en stor gruppe immigranter fra Puerto Rico osv. Uden tvivl kan flertalsgruppen i USA inddeles i en række relativt homogene, men ganske forskellige kulturelle undergrupper.

Det spørgsmål der opstår, er hvilken indvirkning en elevs kulturmæssige baggrund har på vedkommendes evne til at lære og udføre matematik. Et beslægtet spørgsmål er om pædagogiske tilgange der er effektive i én kultur, er lige så effektive i en anden. Og det er ikke dumme spørgsmål. Lad mig citere et ekstremt tilfælde. For indbyggere i Nepal er glosen "naturlov" meningsløs [4]. For dem styres naturen af guder, ånder og djævlé. Er det muligt at undervise nepalesiske elever i naturvidenskab? Hvis det er, skal det så gøres på samme måde som vi underviser elever i Palo Alto, Californien? Eller måske lige så vigtigt: Hvis man kan undervise nepalesiske børn i naturvidenskabens grundbegreber, hvilken virkning har det da på dem at antage en synsvinkel på naturen som i bund og grund er i konflikt med deres kultur?

Praktisk taget kendes der intet til dette væsentlige problem. For den sags skyld er problemet ikke specielt for USA. Mange lande beder ikke bare USA, men også andre velstående lande om assistance til at forbedre deres matematikundervisning. Efter at have set på et række forsøg på at imødekomme sådanne anmodninger er jeg overbevist om at manglen på undersøgelser af det kulturelle miljø forud for de foreslåede reformer ofte har resulteret i et alvorligt spild af tid, anstrengelser og penge.

Der er næppe grund til at fortsætte med denne liste. Jeg stoler på at jeg har overbevist dem der er optaget af at forbedre matematikundervisning, om at vi står over for mange alvorlige problemer. Jeg stoler på at De også er overbevist om at fremskridt mod en løsning af disse spørgsmål kun kan komme fra omhyggelig empirisk forskning. Lad mig derfor slutte af med nogle bemærkninger om karakteren af den empiriske forskning i matematikdidaktik.

Jeg ser kun ringe håb om yderligere store forbedringer i matematikundervisningen indtil vi har lavet matematikdidaktik om til en eksperimentel videnskab, indtil vi opgiver vores afhængighed af filosofisk debat baseret på tvivlsomme antagelser og i stedet for følger et omhyggeligt korreleret mønster af observation og overvejelse, det mønster der så succesfyldt benyttes af fysikere og naturfagsfolk.

Vi er nødt til at følge de tilgange der benyttes af vores kolleger inden for fysik, kemi, biologi osv., for at opbygge en teori om matematikdidaktik (lad mig understrege at jeg taler om videnskabsfolk, ikke didaktikere (science educators) – naturfagsdidaktik er ikke i en bedre position end matematikdidaktik). Vi er nødt til at starte med omfattende, omhyggelige empiriske iagttagelser af matematikundervisning og -læring. Alle regelmæssigheder der kan iagttages, vil føre til formuleringer af hypoteser. Disse hypoteser kan så efterprøves med yderligere observationer, forfines og skærpes og så fremdeles. At nedvurdere enten de empiriske observationer eller teorien ville være dumt. De skal sammenholdes hele tiden.

De fleste af de empiriske studier jeg nævnte før, involverede et ret stort antal elever og lærere. Men det er ikke hensigten at give det indtryk at empiriske undersøgelser altid skal involvere et stort antal. Ved at begrænse størrelsen af den udforskede population kan man sommetider gennemføre et meget grundigere og mere detaljeret studie end det man kan lave med de papir og blyant-agtige værktøjer som må tages i brug når der er tale om store antal. Naturligvis skal de hypoteser der kommer ud af sådanne intensive studier, behandles som ret foreløbige og efterprøves på et bredere udvalg af elever og lærere.

Denne type kliniske undersøgelser har været bredt benyttet af vores kolleger i Sovjetunionen. Både deres tilgange og deres observationer har vist sig at være yderst interessante, og vi er nu travlt beskæftiget med at oversætte en stor del af den nyere russiske litteratur inden for matematikdidaktik [10] til engelsk. De af Dem der ikke er bekendt med denne litteratur, bør notere Dem at den er et omhyggeligt studium værd.

På den anden side bør vi notere os at i en vis forstand er fysikerens opgave meget lettere end vores (igen taler jeg om fysikeren, ikke fysikunderviseren). Han har bare et lille antal partikler at studere, og den ene og den anden elektron er helt ens, den ene og den anden proton er helt ens, ligesom den ene og den anden neutron er det. Biologens opgave er noget mere kompliceret. Ikke to blomster på æbletræet om foråret er helt ens. Og de springer ikke alle sammen ud samtidig eller i samme tempo. Ikke desto mindre er blomsterne tilstrækkelig ens til at generaliseringer kan foretages, og hypoteser undersøges på samme træ eller på et andet træ næste forår.

Vores opgave er betydeligt mere kompliceret da et barns bevidsthed er så meget mere kompleks end en æbleblomst, og den variation man kan finde inden for et enkelt klasseværelse, er betydeligt mere kompliceret end den man finder på et enkelt æbletræ.

Dette peger på behovet for at gennemføre mange, omend ikke nødvendigvis alle, af vores observationer på grupper af elever og lærere som er store nok til at omfatte et bredt udsnit af værdier af de relevante variable. Disse antal behøver formentlig ikke at være så store som dem vi har haft i vore SMSG-undersøgelser, fordi selv vores foreløbige analyser tilsyneladende viser at et betragteligt antal potentielt relevante variable alligevel ikke var relevante. Ikke desto mindre ville vi hvis vi indskrænkede os til småskala-observationer, have været nødt til at ofre det generelle i teorierne.

Og nu er jeg færdig med at sige hvad jeg ville sige. Jeg har for det første pointeret at studiet af matematikdidaktik skal gøres mere videnskabeligt, og for det andet at vejen frem allerede er blevet udpeget af vores naturvidenskabelige kolleger. Vi starter langt efter dem. Vi befinder os nu der hvor de var for flere årtier, ja århundreder siden. Men deres succes lover godt for vores fremtidige succes. Jeg håber mine argumenter har været overbevisende, for jeg er sikker på at kun ved at blive mere videnskabelige kan vi nå det humanistiske mål at forbedre uddannelsen af vores børn og af alles børn.

Stanford University

Referencer

- [1] Barr, A.S. (red.). (1961). *Wisconsin Studies of the Measurement and Prediction of Teacher Effectiveness*. Madison, Wisconsin: Dembar Publications, Inc.
- [2] Carroll, J. (1963). A Model for School Learning. *Teachers College Record*, 64, s. 723-733.
- [3] Center for Cognitive Learning. (1969). *Concept Learning: A Bibliography, 1950-67*. University of Wisconsin: Technical Report nr. 82.
- [4] Dart, F.E. & Pradhan, P.L. (1967). Cross-Cultural Reaching of Science. *Science*, 135, s. 649-656.
- [5] Herriot, S.T. (1967). *The Slow Learner Project: The Secondary School "Slow Learner" in Mathematics*. SMSG Report nr. 5. Stanford: School Mathematics Study Group.
- [6] Higgins, J. (under udgivelse). *The Mathematics Through Science Study: Attitude Changes in a Mathematics Laboratory*. Stanford University, Stanford, Californien: SMSG Report No. 8. [Publiceret i *Journal for Research in Mathematics Education*, 1970(1), s. 43-56].
- [7] Husén, Torsten (red.). (1967). *International Study of Achievement in Mathematics*. Stockholm: Almqvist and Wiksell.
- [8] Shulman, L.S. & Keislar, E.R. (red.). (1966). *Learning By Discovery. A Critical Appraisal*. Chicago: Rand McNally and Co.
- [9] Wilson, J.W., Cahen, L.S. & Begle, E.G. (red.). (1968-1969). *NLSMA Reports*. Numbers 1-18. Stanford: School Mathematics Study Group.
- [10] Wirszup, I. & Kilpatrick, J. (red.). (1969). *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. Vols 1 and 2. Stanford University: School Mathematics Study Group and University of Chicago.