Elevers faglige udvikling i matematiske klasserum

Thomas Kaas, *UCC, Læreruddannelsen Zahle*

Abstract. *Hvordan udvikler elever deres matematiske faglighed i klasserum, og hvordan støtter læreren dem i processen? Artiklen præsenterer Paul Cobbs og Erna Yackels socialkonstruktivistiske fortolkningsramme for klasserumsobservationer og giver et eksempel på en analyse af en faglig udvikling i en 2.-klasse.*

I artiklen argumenteres der for at elevers begrebsmæssige faglige udvikling som den forekommer i klasserum, kun kan forstås hvis den belyses fra både sociale og individuelle, psykologiske perspektiver – og at de karakteristika der hører til hvert perspektiv, er uløseligt forbundet. Desuden gives der eksempler på hvordan matematiklæreren kan understøtte elevers begrebsmæssige faglige udvikling ved at guide elevernes såkaldte sociomatematiske normer.

Elevers faglige udvikling i matematiske klasserum

I studieåret 2009/2010 var jeg deltager i et projekt der overordnet havde som ambition at "tilvejebringe viden om, hvad der befordrer elevers læring i grundskolens dansk- og matematikundervisning". Projektet foregik i samarbejde med Enheden for udvikling og forskning, Professionshøjskolen UCC, og var ledet af lektor Helle Plauborg.

Den indledende fase af projektet bestod i en kortlægning og kategorisering af eksisterende forskningsresultater på området i perioden 1999-2009.

I en efterfølgende fase af projektet fulgte vi en 2.-klasse og en 8.-klasse i fagene dansk og matematik i en fire uger lang periode. Hensigten med observationerne i de to klasser var:

- dels at undersøge hvordan vi kan gøre rede for elevers begrebsmæssige faglige udvikling som den forekommer i den sociale kontekst et klasserum udgør
- dels at undersøge måder som læreren kan bruge til at understøtte elevers begrebsmæssige faglige udvikling i klasserum.

Denne artikel præsenterer centrale dele af vores undersøgelse og diskussion i tilknytning til observationerne i matematikundervisningen i 2. klasse.

Tre positioner og tre centrale begreber

Det er oplagt at fortolkninger af undervisningssituationer i matematik reflekterer antagelser og formodninger om bl.a. faget matematik, om læring af matematik og om matematikundervisning. Derfor vil jeg i det følgende – helt kortfattet – beskrive tre "positioner" der knytter sig til disse begreber, og som har dannet grundlag for vores forståelse af klasserumsobservationerne. Det skal bemærkes at de tre positioner harmonerer med den forståelse af fag, læring og undervisning der ofte betegnes som *reformorienteret* (Skott et al., 2008, s. 48-53).

1. Matematik er et fag som både rummer et proces- og et produktaspekt (Sfard, 1991). Det betyder fx at eleverne i 2. klasse både bør beskæftige sig med at *udvikle* hensigtsmæssige regnemetoder til fx addition og med at *anvende* disse regnemetoder i praktiske og teoretiske sammenhænge.
2. Elevernes læring kan i sådanne situationer *både* ses fra et individuelt, psykologisk perspektiv og fra et socialt perspektiv. I det psykologiske perspektiv fokuseres der på den enkelte elevs konstruktion af faglig forståelse, fx på deres forståelse af de regnemetoder som præsenteres og diskuteres i klassen. I det sociale perspektiv fokuseres der på læring som et aspekt af elevernes deltagelse i en social praksis, fx som et aspekt af elevernes og lærerens drøftelse af hensigtsmæssige regnemetoder.
3. Undervisning handler om at fremme og understøtte læring med fokus på forståelse. Det er altså lærerens rolle at skabe så gode betingelser som muligt for elevernes konstruktion af faglig viden og forståelse og for deres deltagelse i klassens faglige fællesskab.

I vores tilgang til klasserumsobservationerne fandt vi inspiration hos matematikdidaktikeren Paul Cobb og hans kolleger. I begyndelsen af sin forskningskarriere var Cobb især optaget af at analysere elevers udvikling af begreber og metoder fra et individuelt, psykologisk perspektiv (Cobb & Steffe, 1983). I forbindelse med en række projekter i slutningen af 1980'erne og begyndelsen af 1990'erne blev det imidlertid tydeligt for Cobb at det individuelle, psykologiske perspektiv bliver utilstrækkeligt hvis hensigten er at forklare elevers matematiske udvikling som den forekommer i klassers fællesskab. Han udviklede, i samarbejde med Yackel, en fortolkningsramme som både omfatter et psykologisk og et socialt perspektiv på klasserummet. Det psykologiske perspektiv retter sig imod individuelle elevers (eller lærerens) deltagelse og bidrag til klassens fælles arbejde med faglig udvikling og er inspireret af von Glasersfeld (1984). Det sociale perspektiv retter sig imod interaktionen i klassen og er inspireret af Bauersfeld, Krummheuer & Voigt (1988). Det særlige ved Cobbs og Yackels fortolkningsramme er imidlertid at den sigter på at *koordinere* det individuelle, psykologiske perspektiv og det sociale perspektiv (Cobb & Yackel, 1995; Cobb 1999, 2000).

I det følgende præsenteres med udgangspunkt i faglige dialoger fra matematikundervisningen i vores 2.-klasse først tre centrale begreber som retter sig mod fortolkningsrammens sociale perspektiv. Det drejer sig om klasserummets sociale normer, om sociomatematiske normer og om klasserummets matematiske praksisser. Herefter inddrages det psykologiske perspektiv og Cobbs syn på relationen mellem de to perspektiver. Fortolkningsrammen bruges efterfølgende til at analysere et forløb i 2.-klassen. Analysen danner grundlag for en afsluttende diskussion af elevers begrebsmæssige faglige udvikling i matematiske klasserum og lærerens rolle i den forbindelse.

Tekstboks 1 – Faglig dialog mellem lærer og elev(er)

Lærer: Samuel, hvad har du gjort? Hvad giver 17+12?
Samuel: Det giver 29.
Lærer: Det giver 29? Og hvad har du så gjort?
Samuel: Jeg har … øh … jeg tænkte i hovedet.
Så lavede jeg det i hovedet.
Lærer: Hvordan gjorde du i hovedet?
Samuel: Jeg tog allerførst 10'erne.
Lærer: Ja, okay …
Samuel: Så tog jeg … øh … 1'erne.
Og så lagde jeg dem op på … øh … 7'erne.
Og så fik jeg … 7+2, det giver 9.
Og så 10+10, det giver 20.
Lærer: Så blev det 29. Flot.

Lærer: Godt, så var der 13+14. Mads?
Mads: 13+14? Jeg regnede det ud i hovedet.
Lærer: Og hvad giver det?
Mads: Det giver 27.
Lærer: 27? Hvordan regner du det ud i hovedet?
Mads: Jeg siger 3+4, det er 7.
Og 10+10, det er 20. Så bliver det 27.
Lærer: Ja. Godt!

Bemærk at Cobbs og Yackels fortolkningsramme også er præsenteret af bl.a. Jeppe Skott i hans introduktion til Paul Cobbs matematikdidaktiske arbejde i *MONA* nr. 4, 2008.

I den 2.-klasse vi observerede, foregik der ofte den type dialog mellem lærer og elev som klippet (tekstboks 1) eksemplificerer. Ofte så vi læreren fokusere på elevernes forklaringer på deres løsningsmetoder, og blandt eleverne blev denne forventning i høj grad imødekommet. Man kan sige at det var en del af klassens *sociale normer* at forklare og begrunde deres løsninger på opgaver.

Læreren forsøgte også ofte at få eleverne til at lytte til og forstå hinandens løsningsmetoder, fx med spørgsmål som "Er der nogen der har tænkt på en anden måde?" og "Kan nogen forklare hvad han har gjort?". Og læreren udnyttede forskellige løsningsforslag til sammenligninger med spørgsmål som "Lagde I mærke til at Samuel først lagde tierne sammen da han regnede stykket, men Mads lagde enerne sammen først. Er det ikke mærkeligt at de når frem til det samme resultat?".

En del af eleverne i klassen tog imod sådanne udfordringer, og nogle stillede uopfordret lignende spørgsmål til sig selv og hinanden. Disse elever betragtede det som en del af deres rolle i undervisningen at lytte, at forsøge at forstå andres løsningsmetoder, at sammenligne løsningsmetoder og evt. at kritisere hinandens løsningsmetoder. Andre elever i klassen tog ikke del i sådanne diskussioner. De så det tilsyneladende først og fremmest som deres – og andres – rolle at svare på lærerens spørgsmål vedrørende regnestykkerne. I 2.-klassen var nogle af de sociale normer som læreren betragtede som hensigtsmæssige, allerede etableret i klassen som helhed, mens andre var "under udvikling" igennem det sociale samspil i klassen. Stort set alle elever bidrog fx med forklaringer på deres løsningsmetoder, mens kun en del af eleverne var optagede af at forstå, sammenligne og kritisere andres løsningsmetoder.

I enhver klasses matematikundervisning findes der sociale normer der på samme måde fortsat udvikles gennem et samspil mellem eleverne og læreren, som alle kan sidde med mere eller mindre forskellige forståelser af hvad det egentlig går ud på at have matematikundervisning. Men egentlig er en matematikklasses sociale normer ikke specielt knyttet til matematikundervisning. Man kan fx sagtens forestille sig at det også er en social norm i en klasses danskundervisning at forklare og begrunde sin forståelse af tekster. Fokus kan imidlertid ændres fra de mere overordnede normer i klasserummet til de aspekter af elevers aktivitet som er specifikke for matematik – de såkaldte *sociomatematiske* normer. Denne type normer retter sig bl.a. mod hvad der blandt lærer og elever i klasserummet tæller som en acceptabel matematisk løsning og en god matematisk løsning, og hvad der gør én løsning anderledes end en anden. Mere overordnet drejer en klasses sociomatematiske normer sig om hvad der betragtes som en lødig matematisk aktivitet og som et godt matematisk spørgsmål.

Det er naturligvis ikke sådan at alle deltagere i en klasse sidder med de samme sociomatematiske normer, og det er heller ikke sådan at hver deltager sidder med en fast forestilling om hvad der kendetegner kvalitet i matematiske løsninger og matematisk aktivitet. Interaktionen i en klasse kan tværtimod opfattes som en løbende "forhandling" af de sociomatematiske normer. Ved at bidrage til og deltage i disse "forhandlinger" udvikles der blandt eleverne ofte sociomatematiske normer som dominerer en periode i klassen – fx at en god matematisk forklaring på addition af tocifrede tal refererer til tierne og enerne i de tal som adderes.

Det følgende klip (tekstboks 2) viser en situation fra 2.-klassen hvor to elever forklarer hvordan de har beregnet 32+49. Elevernes forklaringer accepteres tilsyneladende af læreren og af de øvrige elever som to forskellige lødige forklaringer.

Tekstboks 2 – To forskellige forklaringer på resultatet af 32+49

Mikkel: Man tager bare 2 over i 9.
Det giver 51. Og så tager vi 30 oven i de 51, det giver … og så har vi 81.
…
Lærer: Ja … Katja?
Katja: Jeg regner det ud på en meget, meget anderledes …
Øhm, ikke på en anderledes måde, men …
Jeg regner det bare ud at jeg starter med at lægge 30 og 40 sammen.
Lærer: Ja.
Katja: Det giver jo 70.
Lærer: Ja.
Katja: Og så tager jeg 9'eren, og så tager jeg 1 fra 2. Og det giver 80 … Altså jeg tager 9'eren, og så lægger jeg 1 fra 2 oven i 9.
Så har jeg 80, og så er der 1 tilbage. Det giver 81.
Lærer: Ja, så du laver sådan lidt … lidt som vi snakkede om for nogle gange siden hvor man lavede et let regnestykke ved at bruge 10'er-venner …
Katja: Ja.

Det er imidlertid ikke alle forklaringer der betragtes som lige gode i klassen. Det næste klip (tekstboks 3) viser en situation hvor læreren udfordrer en elevs forklaring om at hun "talte på fingrene":

Tekstboks 3 – En forklaring der udfordres

Lærer: 21+23 skulle man også regne ud. Anna?
Anna: Jeg har … Hvad er det for en … Er det 21+23?
Lærer: Ja.
Anna: Øh, jeg gør det sådan lidt forskelligt.
Lærer: Okay.
Anna: Jeg talte på fingrene, og så hjalp min far mig.
Lærer: Så, hvad fik du det til at blive?
Anna: Øh … til … 44.
Lærer: 44? Okay, og hvordan regner du det lige præcis selv ud?
Anna: På fingrene …
Lærer: På fingrene? Hvordan? Hvad gjorde du med fingrene?
Anna: Jeg talte, sådan så jeg havde … Jeg startede med at sige 20+20, det giver 40 … og så 1+3, det giver 4.
Lærer: Okay, så der brugte du faktisk ikke fingrene til det?
Anna: Nej.
Lærer: Nej? Fint.

Når de sociale og sociomatematiske normer i et klasserum er interessante i forbindelse med elevernes faglige udvikling, skyldes det ifølge Cobb og Yackel dels at de i sig selv er en del af det eleverne forventes at lære, og dels at de er afgørende for ikke bare *hvordan*, men også *hvad* eleverne får mulighed for at lære. Med andre ord vil elever i en klasse hvis sociale normer bl.a. sigter på forklaringer og retfærdiggørelser af løsningsmetoder, få muligheder for at lære noget andet end elever i en klasse hvor matematikundervisningen går ud på noget andet. På tilsvarende vis kan man forestille sig at der findes anderledes læringsmuligheder i en klasse med sociomatematiske normer præget af en forestilling om at det centrale i matematikundervisningen er aktiviteter af undersøgende og problemløsende karakter, end i en klasse hvor de sociomatematiske normer ikke harmonerer med den type aktiviteter.

Det sidste af de tre centrale begreber, *matematiske praksisser*, knytter sig til specifikke matematiske fagområder og vedrører de former for matematisk praksis der efterhånden etableres eller søges etableret i et klasserum i forbindelse med et fagområde. Det kan fx dreje sig om begreber, metoder og skrivemåder i forbindelse med addition. I den 2.-klasse vi besøgte, var det fx tydeligt at begreber som "plus", "tiere" og "enere", operationer som "at opdele tallet i tiere og enere" og skrivemåder hvor addenderne placeres oven over hinanden, var en etableret del af klassens matematiske praksis i den forstand at disse begreber, metoder og skrivemåder ikke blev ledsaget af yderligere forklaring eller argumentation når de blev "bragt på banen" af elever eller lærer. De beskrevne former for matematisk praksis var med Cobbs og Yackels ord blevet "taken as shared".

Det er oplagt at der kan være stor forskel på hver enkelt elevs faglige forståelser – og at praksisser der er "taken as shared", ikke nødvendigvis er "lige delt" af alle. Men det er lige så oplagt at en klasse har brug for fælles etablerede praksisser for i det hele taget at kunne bevæge sig sammen i "en faglig retning".

En fortolkningsramme

I det forrige afsnit er sociale normer, sociomatematiske normer og matematiske praksisser beskrevet fra et socialt perspektiv. Fokus har været på karakteristika som kan knyttes til en klasse som helhed. Men hvert af de tre begreber har en individuel, psykologisk pendant som fremgår af det følgende skema:

Tabel 1. *Cobbs og Yackels fortolkningsramme til analyse af individuel og fælles aktivitet på klasserumsniveau.*

Det sociale perspektiv	Det psykologiske perspektiv
Klasserummets sociale normer	Forestillinger om egen rolle, om andres rolle og om den generelle karakter af matematisk aktivitet i skolen
Sociomatematiske normer	Forestillinger og værdier knyttet til faget matematik
Klasserummets matematiske praksisser	Matematiske faglige forståelser

(Cobb, 2000, s. 68, min oversættelse)

Hvis vi flytter fokus til de enkelte elever og anlægger et psykologisk perspektiv i forbindelse med klasserumsobservationer, vil vi i stedet for klassens sociale normer få øje på en række forskellige forestillinger om hvad matematikundervisning grundlæggende går ud på, og hvad der kan betragtes som gode matematiske forklaringer og lødige matematiske aktiviteter. Vi vil også kunne se elever med forskellige begrebsopfattelser og med forskellige handlinger i forbindelse med de konkrete fagområder som fx addition.

Cobbs pointe er at hvis vi vil forstå hvordan elever udvikler matematisk faglighed i et klasserum, så er det nødvendigt at anlægge både et socialt og et individuelt, psykologisk perspektiv (i overensstemmelse med position 2). De karakteristika der hører til det ene perspektiv, kan slet ikke forstås uden de karakteristika der hører til det andet perspektiv. I vores 2.-klasse påvirker fx de sociale normer i høj grad elevernes individuelle forestillinger om deres egen og andres rolle i matematikundervisningen, men omvendt er klassens sociale normer samtidig opbygget af lærerens og elevernes individuelle forestillinger om hvad "det går ud på" at have matematik i skolen. Elevernes og lærerens individuelle forestillinger om hvordan de skal have matematikundervisning sammen, kan være med til at opretholde eller ændre de fælles sociale normer som så igen kan påvirke nogle af deltagernes individuelle forestillinger osv. Der er altså tale om en gensidig påvirkning – eller, med Cobbs og Yackels ord, en *refleksiv relation* mellem de sociale normer og elevernes og lærerens individuelle forestillinger. I denne refleksive relation spiller læreren (naturligvis) en central rolle, men det er ikke alene lærerens forestillinger om den generelle karakter af matematisk aktivitet i skolen der former de sociale normer. Det er fx ikke sådan at hvis en lærer underviser i to forskellige klasser, så vil begge klasser nødvendigvis have de samme sociale normer – elevernes individuelle forestillinger spiller med i etableringen af en klasses sociale normer.

På tilsvarende vis er der en refleksiv relation mellem de sociomatematiske normer og elevernes og lærerens individuelle forestillinger og værdier knyttet til matematikfaget. Og der er en refleksiv relation mellem klassens matematiske praksisser og hver enkelt elevs faglige forståelser i forbindelse med konkrete fagområder. I forbindelse med vores 2.-klasse kan man fx forestille sig at elevernes deltagelse i dialogen om regnemetoder til addition bidrager til både klassens sociomatematiske normer og den matematiske praksis for addition som efterhånden opbygges gennem klassens arbejde. Og omvendt er de forklaringer eleverne giver, og den faglige forståelse som eleverne hver især opbygger, også påvirket af klassens sociomatematiske normer og matematiske praksisser.

Opbygning af en matematisk praksis i 2. klasse

Vi valgte at tage udgangspunkt i den skitserede fortolkningsramme i vores forsøg på dels at undersøge hvordan vi kan gøre rede for elevers begrebsmæssige faglige udvikling som den finder sted i klasserum, dels at undersøge hvordan læreren kan understøtte denne faglige udvikling.

I de fire uger vi observerede matematikundervisningen i 2. klasse, arbejdede klassen bl.a. med addition som det fremgår af de klip vi foreløbig har set. I en del af forløbet var det lærerens intention at eleverne skulle blive i stand til at addere tocifrede tal med "tierovergang", og at de skulle kunne forstå hvorfor deres metode(r) "virker".

Til formålet brugte læreren opgavesider fra en lærebog og forskellige repræsentationer for tallene og regneoperationen. Eleverne arbejdede både med klodser som repræsentationer for tierne og enerne i tallene ("tierstænger og enerklodser"), og de arbejdede med tallinjen og med en taltavle. I begyndelsen af forløbet brugte de disse repræsentationer i forbindelse med addition af tocifrede tal uden tierovergang. Fx arbejdede klassen i en af de første timer vi observerede, med addition på en taltavle. Læreren forsøgte at indlede en dialog om hvordan fx 12+36 kunne regnes ved hjælp af en taltavle – fx ved at "stille sig" i 12 og tælle 36 frem. De 36 kunne opdeles i tre "tierskridt" (op) og seks "enerskridt" (til højre). Og uanset om "turen" blev tilbagelagt med "enerskridtene" eller "tierskridtene" først, ville man havne på resultatet, 48.

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Figur 1. *En taltavle.*

I klassediskussionen blev det tydeligt at tallene mellem 1 og 100 og opdelingen i tiere og enere blev betragtet som "taken as shared", men det blev også tydeligt at mange elever havde svært ved at forbinde addition med "skridt" på taltavlen. Dialogen kom på ingen måde til at handle om argumenter for hvorfor en metode virker, men kom til at fokusere på om eleverne i det hele taget kunne huske hvordan man kan bruge taltavlen "til plus". Det blev i sidste ende læreren som forklarede hvordan eleverne kunne "skyde genvej" ved hjælp af tierskridt, og at de skulle bruge sådanne genveje til opgaverne på hele side 42 i elevbogen.

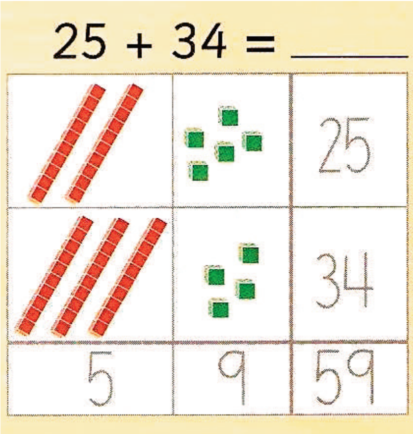
Hvis vi tillader os at se isoleret på de sociale og de sociomatematiske normer der kom til udtryk i den konkrete undervisningssituation, tegner der sig et billede af matematik som et fag hvor læreren forklarer metoder mens eleverne lytter, og et fag hvor det centrale er at kunne huske metoder og lave opgaver. Den matematiske forklaring der blev knyttet til de eksempler som blev regnet fælles, kom slet ikke til at omfatte en argumentation for resultatet, men kun en opskrift på at finde resultatet – selvom det på ingen måde var lærerens intention med oplægget.

I det efterfølgende individuelle elevarbejde skulle eleverne i deres bog tegne de omtalte genveje på taltavler i tilknytning til regnestykker som var formuleret i symbolsprog. Vi fulgte Villy og Kira som ikke havde svært ved at opdele addenderne i tiere og enere, men som havde svært ved at huske om tierskridt var opad eller til siden. Det viste sig at Villy nok havde en fornemmelse af at noget var galt. "Jeg tror ikke at 22+37 kan blive til 95," sagde han, men tierskridt til højre og enerskridt opad havde ført ham til 95. Efter et stykke tid udviklede Villy og Kira en praksis hvor de huskede at "det forreste tal" viste skridt opad, og "det bagerste tal" viste skridt til højre. Med denne huskeregel kunne de hurtigt lave opgaven færdig, men Villy fastholdt at han ikke forstod "det med taltavlen". Selvom det var vigtigt for ham at færdiggøre opgaverne på siden, var det tilsyneladende ikke tilfredsstillende for ham.

Det var ikke alle elever i klassen der havde de samme typer problemer med taltavlen som Villy og Kira. Nogle "oversatte" tilsyneladende ubesværet additionsstykkerne til bevægelser i taltavlen, og de fik på den måde fx mulighed for at se at det ikke spiller nogen rolle om tiere adderes før enere eller omvendt i disse additionsstykker uden tierovergang – det er jo ligegyldigt om man først går op eller til højre i taltavlen – man havner samme sted. Men opdagelser af denne art blev aldrig til en del af klassens matematiske praksisser. Læreren valgte at forlade taltavlen som repræsentation og i stedet at inddrage "tierstænger" og "enerklodser" i det følgende arbejde med addition.

En uge senere havde eleverne hjemme lavet en opgave med addition af to tocifrede tal uden tierovergang. Regnemetoden havde været fri, og klassen brugte i begyndelsen af timen en del tid på at forklare hinandens metoder. Klippene i tekstboks nr. 1 og 3 er fra denne time, og som bemærket i forbindelse med klippene er det her helt anderledes sociale og sociomatematiske normer der kommer til udtryk. I denne situation (og i mange andre) var det en naturlig og væsentlig del af matematikundervisningen at forklare og begrunde sine løsninger og at forsøge at forstå og forholde sig til de forklaringer og begrundelser som andre elever kom med. I sin dialog med eleverne lagde læreren generelt vægt på at elevernes forklaringer var meningsfulde i forhold til det additionsstykke de talte om. Hun accepterede fx ikke forklaringer som "Jeg regnede det bare ud i hovedet" eller "Jeg talte på fingrene". I forbindelse med disse forklaringer insisterede hun på at eleverne forklarede *hvordan* de regnede i hovedet eller på fingrene, og på at disse forklaringer var meningsfulde i forhold til tallene. På den måde kan man sige at læreren guidede klassens sociomatematiske normer – hun viste hvad hun betragtede som gode og ikke gode matematisk forklaringer.

Efter dialogen om hjemmeopgaverne så klassen i fællesskab vha. en projektor på et regneeksempel fra deres elevbog. 25+34 var illustreret med tierstænger og enerklodser.



Figur 2. *Et regneeksempel fra elevbogen (Jensen et al., 2005, s. 44).*

"Hvad har de gjort for at regne det ud?" spurgte læreren, og Sigurd forklarede:

Tekstboks 4 – Sigurds forklaring

Sigurd: Se, der står 25 der (peger på de to tierstænger og de fem enerklodser), så er de …
Lærer: Ja.
Sigurd: Og så tre 10'ere, det giver jo 30. Med fire 1'ere giver det 34.
Lærer: Rigtigt, og hvad så når man skal lægge dem sammen?
Sigurd: Øhm, så gør man fx sådan 10, 20, 30 … 1, 2, 3, 4.
Lærer: Ja, så giver det 34, det er rigtigt.
Hvad så hvis jeg skal lægge 25 og 34 sammen?
Hvordan gør de det … lægger alle de der kuber og 10'er-stænger sammen?
Sigurd: Nej, de lægger ikke bare alle sammen …
Se, her er der en række (peger på kolonnen med tier-stænger). Så er der 1, 2, 3, 4, 5 … Så skriver man 5 der.
Lærer: Ja.
Sigurd: Og der er der en række af dem (peger på kolonnen med enere). 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Så skriver de 9 der.
Lærer: Ja.

Bemærk i forbindelse med klippet i tekstboks 4 at opgavetypen kan regnes uden reference til meningsindhold i tallene eller i additionen, og at Sigurds forklaring på hvordan "de havde gjort i bogen", heller ikke omfatter en begrundelse for metoden. Opgaverne kan i princippet regnes ved at tælle stænger og klodser og ikke bekymre sig om at give tallene mening. Men læreren udnyttede det efterfølgende individuelle arbejde til at tale med de elever der ikke havde forklaret deres regnemetoder fælles i klassen. I disse dialoger lagde hun på samme måde som i den fælles dialog vægt på argumentationen for hvorfor metoderne virker.

Der tegnede sig i klassen et billede af en etableret matematisk praksis vedrørende addition af tocifrede tal uden tierovergang. Eleverne kunne generelt forklare og begrunde en metode og finde frem til de rigtige resultater – selvom der selvfølgelig var forskel på den forståelse som kom til udtryk i de forskellige elevers forklaringer, og på deres formåen i forbindelse med hovedregning som spillede en central rolle i praksissen.

I den følgende matematiktime to dage senere forsøgte læreren at udvikle eller udvide den etablerede matematiske praksis til at omfatte addition af tocifrede tal med tierovergang. Fra timens begyndelse havde hun skrevet additionsstykket 32+49 på tavlen. Klippet i tekstboks 2 viser de første elevreaktioner på dette stykke. Efterhånden som timen udviklede sig, kom der i den fælles dialog flere og flere regnemetoder på banen. Efterfølgende arbejdede eleverne selvstændigt med en side i deres matematikbog der handlede om addition af tocifrede tal med tierovergang. Jeg fulgte Anton og Villy der arbejdede sammen i en del af timen, og bad dem da de var færdige med opgaverne i bogen, om at regne endnu et stykke og forklare deres metode (tekstboks 5).

Tekstboks 5 – Anton og Villy regner 34+27

Thomas: Kan jeg få jer til at regne det her (34+27) og fortælle mig hvordan I gør?
Anton: 61.
…
Villy: Ja, 61.
Der er 50 (peger på 3-tallet og 2-tallet).
Så tager man …
Hvis man lægger 4 til 7, så bliver det 10 … Faktisk bliver det 11 … Hvis man tager 10 først, så er det 60 … Så 1 til …
Det er 61.

Det var fælles for de regnemetoder som blev præsenteret i denne time, at de refererede til et meningsindhold i tallene. Og det var karakteristisk for dem alle at de byggede på en opdeling af addenderne i tiere og enere, og at de "foregik i hovedet". Selvom det ikke var alle eleverne der præsenterede metoder i løbet i timen, kan man, efter vores opfattelse, sige at der i klassen viste sig en "begyndende" matematisk praksis der harmonerede med lærerens oprindelige intention – at eleverne skulle blive i stand til at addere tocifrede tal med "tierovergang", og at de skulle forstå hvorfor deres metode(r) "virker". Det var i hvert fald tydeligt at mange af eleverne opfyldte dette mål.

Hvordan udvikler elever sig fagligt i matematiske klasserum?

Spørgsmålet er hvordan den beskrevne faglige udvikling er opstået? Hvis vi fokuserer på Villy, var der en situation i forbindelse med addition ved hjælp af 100-tavlen hvor der ikke var mange tegn på den form for læring som var lærerens intention. Men cirka en uge senere forklarede han meningsfyldt sin egen beregningsmetode til et additionsstykke med tierovergang. Hvordan kan vi forklare hans faglige udvikling?

Der kan helt sikkert findes mange mulige "forklaringsdele". Fx virkede det som om taltavlen på ingen måde støttede Villys tankegang, mens tierstængerne og enerkuberne stod i direkte forbindelse med hans forståelse af talsystemets tiere og enere. Det kan også tænkes at de forskellige aktiviteter Villy har været involveret i, har været mere eller mindre befordrende for hans faglige udvikling. Fx kan man sige at aktiviteten med at forklare sin egen beregningsmetode står i mere direkte sammenhæng med målet for undervisningsforløbet end aktiviteten hvor han skulle tegne genveje i taltavlen. Men efter vores opfattelse er disse individuelt orienterede forklaringer ikke dækkende. For os er det tydeligt at både klassens sociale og sociomatematiske normer og klassens matematiske praksisser har været stærkt medvirkende til at forme de læringsmuligheder som har ligget i de forskellige undervisningssituationer, og at normerne og praksisserne må medtænkes hvis vi vil forstå sammenhængen mellem læringsmulighederne og elevernes individuelle læring. Når Villy er i stand til – uden en algoritme – at foretage "springet" fra addition uden tierovergang til addition med tierovergang, er det også fordi det er en del af hans matematiske praksis at opdele addenderne i tiere og enere og en del af hans sociomatematiske normer at bygge sin tænkning på cifrenes begrebsmæssige betydning. Denne matematiske praksis og disse sociomatematiske normer er etableret igennem hans deltagelse i klassens faglige fællesskab.

Som tankeeksperiment kan vi forestille os hvordan læringsmulighederne ville have ændret sig i de forskellige undervisningssituationer hvis det *ikke* havde været en social norm i klassen at forklare og begrunde sin tankegang i forbindelse med additionsstykkerne. Gennemgangen af hjemmearbejdet kunne i stedet for have fokuseret på korrekte facitter, og læreren kunne have forklaret at den næste side i elevbogen kunne laves ved at tælle tierstænger og enerkuber og skrive resultaterne de rigtige steder i bogen. Klassen ville på den måde have arbejdet med nøjagtig de samme begreber og metoder, men på en måde som ikke ville give eleverne mange muligheder for at give regneoperationerne mening.

Vi kan også forestille os hvordan læringsmulighederne ville have ændret sig i situationen hvor eleverne skulle forklare deres forskellige beregningsmetoder, hvis det *ikke* havde været en sociomatematisk norm at forklaringerne skulle være meningsfulde i forhold til tallene. En korrekt forklaring på beregning af fx 17+12 kunne jo også være at de forreste tal skal lægges sammen og skrives, og de bagerste tal skal lægges sammen og skrives derefter. Denne forklaring er bare udtryk for en helt anden sociomatematisk norm end i eksemplet. Klassen kunne med de sidst skitserede sociomatematiske normer stadig have arbejdet med elevernes forklaringer af deres egne beregningsmetoder – men læringspotentialet ville have været et helt andet.

Endelig kan vi forestille os hvordan læringsmulighederne ville have ændret sig hvis *ikke* det havde været en matematisk praksis i klassen at opdele addenderne i tiere og enere. Det er vanskeligt at tænke sig at eleverne uden denne etablerede praksis ville have kunnet udvikle beregningsmetoder der bygger på vores talsystems egenskaber og have kunnet foretage "springet" fra addition uden tierovergang til addition med tierovergang.

Disse overvejelser understøtter Cobbs pointe om at de læringsmuligheder som opstår i en klasse der arbejder med matematik, altid er forbundet med klassens sociale og sociomatematiske normer og med klasserummets matematiske praksisser. Det giver med andre ord ikke meget mening at fastholde et rent psykologisk, individuelt perspektiv på en analyse af elevers begrebsmæssige faglige udvikling i et klasserum – det individuelle, psykologiske perspektiv må sammentænkes med et socialt perspektiv. Omvendt kan Villys faglige udvikling heller ikke forstås hvis den kun ses fra et socialt perspektiv. Hans deltagelse i klassens faglige fællesskab har skabt nogle bestemte læringsmuligheder, men hans faglige udvikling er samtidig et resultat af en personlig konstruktionsproces – ellers ville det være svært at forklare hvorfor alle elever i klassen ikke har haft den samme faglige udvikling som Villy.

En redegørelse for elevers begrebsmæssige faglige udvikling som den forekommer i den sociale kontekst som et klasserum udgør, må derfor have både sociale og individuelle perspektiver. Den må både bestå af beskrivelse og analyse af interaktionen i undervisningssekvenser og af elevernes deltagelse i disse. Det er vores opfattelse at Cobbs og Yackels fortolkningsramme i den forbindelse kan være et konstruktivt redskab.

En sådan tilgang til forskning i elevers læring står i skærende kontrast til den tilgang som var kendetegnende for hovedparten af de projekter som vores kortlægning og kategorisering af eksisterende forskningsresultater omfattede. I disse projekter blev elevers faglige udvikling målt på testresultater og tilsyneladende oftest forstået som et direkte resultat af lærerens handlinger. Elevernes faglige udvikling blev således ikke forbundet med hverken den konkrete interaktion i klasserummene eller de enkelte elevers deltagelse i interaktionen (Plauborg & Kaas, 2009).

Udvikling af elevernes sociomatematiske normer

Når en klasses sociale og sociomatematiske normer har afgørende betydning for de læringsmuligheder som skabes i klasserum, er det oplagt at udviklingen af "hensigtsmæssige" normer er af stor betydning. Vores projekt viser nogle eksempler på hvordan læreren kan søge at guide udviklingen af sociomatematiske normer i et klasserum.

I den 2.-klasse vi besøgte, var det især klassesamtaler hvor elevernes forskellige metoder blev sat til diskussion, der åbnede for lærerens muligheder for at guide normerne. Alene ved at lægge vægten på elevernes forklaringer og argumentation frem for resultaterne af deres beregninger viste hun noget om hvad der i hendes timer kan betragtes som en lødig matematisk aktivitet – matematik er et fag hvor forklaring og argumentation er centralt. Hun kunne bl.a. engagere eleverne i dialogen ved at "genforklare" nogle af elevernes argumenter for klassen og på den måde søge at signalere at alle skulle søge at forstå hinandens tænkning, eller ved at spille forskellige forklaringer og argumenter ud mod hinanden – hvordan kan det fx være at både Samuels og Mads' metode giver det rigtige resultat? Ved at legitimere forskellige argumenter viste hun at matematik også er et fag hvor der ikke kun er "én vej at gå", men samtidig kunne hun igennem sine spørgsmål signalere at argumentationen ikke kan bestå af hvad som helst – det handler om at bygge sin argumentation på den begrebsmæssige betydning af cifrene i tallene. I andre situationer valgte hun at fremhæve særlig gode argumenter eller argumenter som knyttede sig til aktiviteter klassen tidligere havde arbejdet med – fx hvilke additionsstykker der giver 10 ("gode tiervenner").

De metoder som 2.-klassens lærer benyttede sig af, er naturligvis kun eksempler til inspiration til hvordan en lærer kan søge at bidrage til udviklingen af sociomatematiske normer i et klasserum, og skal ikke forstås som "en opskrift". Pointen her er blot den at der specielt i udviklingen af de sociomatematiske normer i et klasserum ligger et stort potentiale i forbindelse med understøttelse af elevers begrebsmæssige faglige udvikling.

Referencer

Bauersfeld, H., Krummheuer, G. & Voigt, J. (1988). Interactional Theory of Learning and Teaching Mathematics and Related Microetnographical Studies. I: H.G. Steiner & A. Vermandel (red.), *Foundations and Methodology of the Discipline of Mathematics Education* (s. 174-188). Antwerpen, Belgien: Proceedings of the TME Conference.

Cobb, P. (1999). Individual and Collective Mathematical Development: The Case of Statistical Data Analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1(1)*, s. 5-43.

Cobb, P. (2000). The Importance of a Situated View of Learning to the Design of Research and Instruction. I: J. Boaler (red.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (s. 45-82). Westport, CT: Ablex.

Cobb, P. & Steffe, L.P. (1983). The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, s. 83-94.

Cobb, P. & Yackel, E. (1995). *Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research*. Washington, D.C.: National Science Foundation. A paper presented at the Seventeenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education.

Jensen, H.N., Møller, M.T., Lindhardt, B., Andersen, M.W. & Weng, P. (2005). *Kontext 2A: Elevbog*. København: Alinea

Plauborg, H. & Kaas, T. (2009). *Kortlægning og kategorisering af forskningsresultater*. Notat i forbindelse med projektet "Lærerhandlinger og elevers læring". Professionshøjskolen UCC, Afdelingen for udvikling, forskning og efter- og videreuddannelse. Ikke publiceret. Kopi kan fås ved henvendelse til forfatteren af nærværende artikel.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, s. 1-36.

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H.C. (2008). *Matematik for lærerstuderende: Delta, Fagdidaktik*. Frederiksberg C: Forlaget Samfundslitteratur.

von Glasersfeld, E. (1984). An Introduction to Radical Constructivism. I: P. Watzlawick (red.), *The Invented Reality* (s. 17-40). New York: Norton.