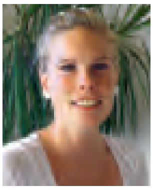
# Tidlig algebra


Tina Otykier Petersen


Ulla Christina Mortensen, *UCN*

**Abstracts.** *Med udgangspunkt i et empirisk studie i en 2.-klasse undersøger vi hvordan aspekter af algebra og algebraisk tænkning er mulige at indføre allerede tidligt i elevernes skolegang. At flytte den traditionelle algebraundervisning ned i indskolingen fører i sig selv ikke til at eleverne bliver bedre til algebra og til at tænke algebraisk. Det drejer sig derimod om at tænke i nye baner og indføre tidlig algebra. Forholdet mellem algebra og aritmetik (regning) bør revurderes. Algebra skal ikke ses som efterfølger til aritmetik, men aritmetik bør derimod ses som en del af algebra.*

*Based on an empirical study in a second grade, we investigate how aspects of algebra and algebraic thinking are possible to introduce in an early stage of the students' education. Repositioning the teaching in traditional algebra to the introductory years of the elementary school does not itself improve students' algebraic skills or their algebraic thinking. One should rather promote innovation that comes with the introduction of Early Algebra. The relationship between algebra and arithmetic should be reconsidered. Algebra should not be viewed as a successor to arithmetic; on the contrary, arithmetic should be seen as a subset of algebra.*

## Indledning – algebravanskeligheder

Artiklen er skrevet med baggrund i specialeprojektet "Tidlig algebra" udarbejdet af Ulla Christina Mortensen og Tina Otykier Petersen med Lena Lindenskov som vejleder.

Algebra er ofte den del af matematikken som volder flest problemer for elever i grundskolen (Mortensen & Petersen, 2011; OECD, 2003; OECD, 2009). Algebra virker ofte meget abstrakt og uvedkommende for eleverne, og mange tager på forhånd afstand fra denne del af matematikken (Bergsten et al., 1997).

Resultaterne fra PISA 2003 og 2009 viser at mange elever i grundskolens udskoling har store vanskeligheder med netop emnet algebra. Undersøgelserne giver et kvantitativt argument for at elever i den danske grundskole ikke ligger i toppen når det drejer sig om algebra. Generelt ligger de danske elevers samlede matematikpræstationer lige over OECD-gennemsnittet, men når det drejer sig om algebrarelaterede opgaver, præsterer de desværre under gennemsnit (Weng & Lindenskov, 2004).

For mere specifikt at undersøge hvilke algebravanskeligheder elever i udskolingen har, udarbejdede vi i forbindelse med vores speciale et kvalitativt spørgeskema hvor eleverne skulle genkende forskellige algebraiske symboler og begreber samt forklare hvad de forstod ved de enkelte symboler (Mortensen & Petersen, 2011). Vores fokus var begreberne variable og konstanter, hvor eleverne blev præsenteret for dem både i form af naturligt og algebraisk skriftsprog. Spørgeskemaundersøgelsen viste at over halvdelen af eleverne i de fire udvalgte 9.-klasser som deltog i undersøgelsen, havde vanskeligheder med disse fundamentale begreber. Vi konkluderede derfor at de udvalgte 9.-klasser havde vanskeligheder med denne del af algebraen, og at mange af elevernes forklaringer tydede på en proceduremæssig forståelse af algebra og ikke en begrebsmæssig forståelse.

PISA-undersøgelserne fra 2003 og 2009 samt vores kvalitative spørgeskemaundersøgelse illustrerer at der findes et behov for nye tiltag i forbindelse med undervisning i algebra. Tiltaget som vi ser nærmere på i denne artikel, er *tidlig algebra* som går ud på at algebra skal indføres tidligere i grundskolen på en måde som adskiller sig fra den traditionelle algebra. Med traditionel algebraundervisning mener vi en undervisning i algebra hvor hovedvægten lægges på symbolmanipulationer, især i form af bogstavregning. Der fokuseres i denne undervisning ofte på generaliserede regler, men ikke nødvendigvis på hvorfra reglerne er generaliseret. Undervisningen kommer derfor til at bygge på udenadslære og tidlig formalisering.

Vi vil i denne artikel belyse algebra som generaliseret aritmetik (regning) som er et af de mange aspekter af algebra og algebraisk tænkning, samt gennem et konkret eksempel undersøge om det er muligt at indføre tidlig algebra i indskolingen hvor vægten lægges på elevernes begyndende forståelse af begrebet variable. Herunder en begyndende accept af at man i matematik ikke altid søger efter et talfacit. I arbejdet med algebra som generaliseret aritmetik skal eleverne benytte forskellige repræsentationer, herunder tegninger og algebraisk og naturligt sprog (og i vores forsøg slikbokse), samt arbejde med forholdet mellem repræsentationerne som hjælp til at opnå ovenstående mål.

Undersøgelsen er udarbejdet med inspiration fra design research (Cobb et al., 2003), hvor kvalitative forskningsmetoder anvendes til indsamling af datamateriale vedrørende indførelsen af tidlig algebra i en 2.-klasse. Design research skal forstås som et praktisk konkret design som inkluderer intervention og har et intentionelt mål om forandring. Designprocessen inkluderer bl.a. en bevidst udvikling af designet hvori der indgår redesign.

Forsøget illustrerer at implementering af tidlig algebra i grundskolens indskoling, med fokus på algebra som generaliseret aritmetik, er mulig. Vi håber at vores projekt kan tjene som et konkret eksempel på hvordan danske lærere kan indføre algebra tidligere på en ny og alternativ måde.

I de følgende afsnit er hensigten at give læseren en forståelse af hvordan vi forstår og anvender begreberne *aritmetik* og *algebra* samt *tidlig algebra* og *præ-algebra*. Derefter følger en beskrivelse af forsøget som vi har gennemført i en 2.-klasse, efterfulgt af en analyse.

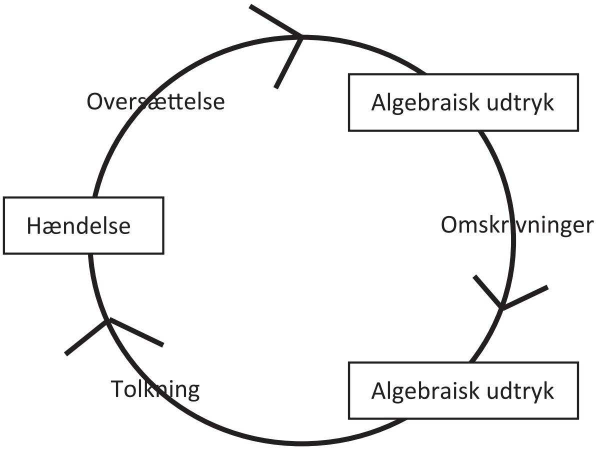
## Algebra og aritmetik

Som nævnt er algebra et af de områder som eleverne i grundskolen har de største vanskeligheder med. I dette afsnit gives der derfor en begrundelse for hvorfor algebra alligevel skal være for alle. Endvidere gives der en definition på begreberne aritmetik og algebra.

Det er vigtigt at have fokus på emnet algebra i grundskolen af flere grunde. Først og fremmest er algebra et værktøj der kan bruges til at beskrive forskellige fænomener. Fx kan befolkningstilvæksten beskrives og analyseres algebraisk ved hjælp af en eksponentialfunktion (Bergsten et al., 1997, s. 15), og et hus' grundfladeareal ved hjælp af formler for arealberegninger. Det algebraiske sprog kan derfor opfattes som et standardværktøj til at præcisere håndteringen af tal og funktioner. Derudover giver algebra som værktøj også mulighed for at opdage komplekse sammenhænge.

Matematiske modeller anvendes mere eller mindre synligt på alle niveauer (Bergsten et al., 1997). For at følge, forstå og aktivt kunne tage stilling til samfundsdebatter, bl.a. økonomisk politik, skal man derfor kunne forstå og anvende formler, tabeller og diagrammer hvilket er blevet en nødvendig demokratisk kompetence (Bergsten et al., 1997).

I den traditionelle algebraundervisning fokuseres der, som tidligere nævnt, ofte på algebraiske omskrivninger, hvilket kan give eleverne et skævt billede af hvad algebra er. På den måde går muligheden for at se den rolle matematikken spiller på alle lag i samfundet, tabt. Algebra indeholder jo ikke blot algebraiske omskrivninger – se figur 1.




**Figur 1.** *Den algebraiske cirkel (Bergsten et al., 1997, s. 15).*

Der skal i undervisningen lægges vægt på at eleverne skal kunne håndtere alle faserne (oversætte, omskrive, fortolke). Hver fase har sin problematik selvom de alle handler om at "oversætte". I fasen *"oversættelse"* sker oversættelsen fra enten ord eller billeder til symboludtryk. I fasen *"omskrivning"* oversættes der fra ét symboludtryk til et andet, og i fasen *"tolkning"* fra symboludtrykket til enten ord eller billeder. I forsøget, som vi senere vil komme nærmere ind på, lægges der hovedsageligt vægt på oversættelsesfasen fra ord/billede til et symboludtryk.

Lad os definere aritmetik og give et eksempel på aritmetisk tænkning inden vi dykker ned i definitionen på algebra og algebraisk tænkning. Aritmetik (regning) betyder læren om tal og er den gren af matematikken som studerer de fundamentale principper ved visse operationer på tal (Schliemann et al., 2007). Er man aritmetisk tænkende, betragter man fx 4 + 5 som hvad det bliver, nemlig 9 (Bergsten et al., 1997).

Med den traditionelle algebraundervisning opfattes algebra ofte synonymt med bogstavregning, og den synlige adskillelse mellem aritmetik og algebra for eleverne er at man regner med bogstaver i stedet for tal (Bergsten et al., 1997).

Den måde man vælger at definere algebra på, har stor indflydelse på hvordan man som lærer, forsker, curriculumudvikler, politiker m.fl. griber det an. Som definition på algebra vil vi anvende Van Ameroms fire perspektiver på algebra (Van Amerom, 2003): *algebra som generaliseret aritmetik*, *algebra som et problemløsende værktøj*, *algebra som studiet af funktioner* og *algebra som studiet af strukturer*. I artiklen her lægges hovedvægten på algebra som generaliseret aritmetik da det er denne tilgang til algebra der anvendes senere i forsøget.

Algebra som generaliseret aritmetik bygger på generaliseringer ud fra aritmetik som den primære vej til arbejdet med algebra. Dette inkluderer bl.a. aritmetiske operationer og deres egenskaber samt ræsonnementer om mere generelle relationer. Det indebærer desuden at man skal betragte aritmetiske udtryk på en ny måde, således at man ser på udtrykkets form og ikke dets resultat (Kaput, 2008). Algebra som generaliseret aritmetik inkluderer endvidere det at bygge generaliseringer op omkring mønstre, fx at summen af to ulige tal altid vil give et lige tal (Kaput, 2008).

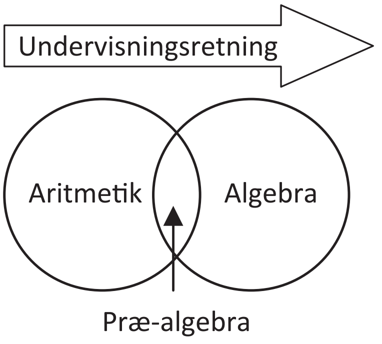
Algebra som et problemløsende værktøj er et perspektiv der retter sin opmærksomhed mod anvendelsesperspektivet. Bednarz & Janvier beskriver at både aritmetik og algebra skal forstås som værktøjer hvor algebraen blot giver os mennesker mulighed for at beregne mere komplekse problemstillinger og giver nogle bud på mere generelle løsningsmodeller (Bednarz & Janvier, 1996). Algebra som studiet af funktioner og strukturer involverer en bestemt form for generalisering, nemlig at konstruere funktioner. Her udtrykkes generaliseringen som en beskrivelse af systematisk variation gennem fx et domæne (Kaput, 2008).

Endelig adskiller algebratænkende sig fra aritmetisk tænkende på følgende måde: Den aritmetisk tænkende fokuserer sin opmærksomhed på tallene og gennemfører operationerne på disse, mens den algebratænkende betragter selve operationerne med tallene og på den måde arbejder med aritmetikkens struktur. Eksemplet med 4 + 5, som den aritmetisk tænkende betragter som 9, betragter den algebraisk tænkende som et specifikt eksempel på operationen a + b (Bergsten et al., 1997).

## Præ-algebra

Præ-algebra og tidlig algebra er to forskellige tilgange til algebraundervisningen i folkeskolens indskoling. Det er i definitionen af forholdet mellem *aritmetik og algebra* at præ-algebra og tidlig algebra adskiller sig fra hinanden.

Præ-algebra er den almene betegnelse for emnet der behandler elevers forberedelse til algebra. Præ-algebraen bygger på den opfattelse at algebra bør følge efter aritmetik. Aritmetik og algebra bliver på den måde to adskilte emner hvor aritmetik afløses af algebra når eleverne kommer op i de større klasser – “arithmetic is ‘ending’ and algebra is ‘beginning’” (Carraher et al., 2006, s. 89). Der bliver derfor en overgang fra aritmetik til algebra som eleverne ofte finder meget vanskelig.




**Figur 2.** *Præ-algebraisk tænkning om aritmetik og algebra.*

Figur 2 illustrerer hvordan aritmetik og algebra ses som to adskilte enheder hvor kun enkelte idéer, teknikker og repræsentationer er fælles for begge. Aritmetik og algebra har derfor brug for at blive forenet, og det er her der tales om præ-algebra. Den præ-algebraiske tilgang har til formål at lette den bratte overgang mellem algebra og aritmetik (Linchevski & Herscovics, 1996). Der stræbes derfor efter at forstærke, supplere og udvide betydningen og brugen af matematiske symboler, såsom $+$, -, $\times$, $\div$ og $=$, som bruges i algebraiske udtryk og ligninger.

Elevernes vanskeligheder forklares umiddelbart med den naturlige forskel der er mellem aritmetik og algebra, som Linchevski & Herscovics kalder den kognitive kløft.

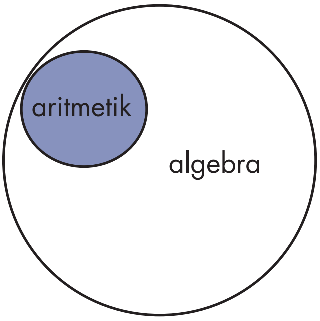
Denne kognitive kløft er karakteriseret ved elevernes manglende evne til at operere spontant med ubekendte. Selvom Linchevski & Herscovics erkender at de yngre elever rutinemæssigt løser problemer som indeholder ubekendte størrelser, som fx i ligningen 5 +? = 8, argumenterer de for at elever løser sådanne problemer uden at skulle *repræsentere* ubekendte størrelser. I stedet bruger de tælleprocedurer eller inverse operationer til at finde et resultat.

Vi finder det opsigtsvækkende at mange af dem der udviklede overgangsmåderne til algebra, ikke stiller spørgsmål til rækkefølgen med aritmetik først og algebra senere, selvom de erkender at en del af problemet stammer fra elevernes tidligere erfaringer med aritmetik. Hvorfor overvejes der ikke alternative tilgange til algebra i indskolingen, såsom at arbejde med algebra og aritmetik samtidig?

## Tidlig algebra

Tidlig algebra handler ikke så meget om hvornår algebra skal indføres, men mere om hvad, hvorfor og hvordan den indføres. Det vedrører endvidere et andet syn på aritmetik, algebra og hvordan de er relateret til hinanden, jf. figur 3. Samtidig handler det om at skabe en progression i algebraundervisningen fra indskolingen til udskolingen. I en tidlig algebra-tilgang arbejdes der hovedsageligt med at eleverne skal forstå operationerne og begreberne bag algebraen.

Tilhængere af den tidlige algebra erkender at matematiske symboler bruges forskelligt inden for aritmetik og algebra (Carraher & Schliemann, 2007). Desuden anerkender de at mange unge har betydelige vanskeligheder med algebraen. Endvidere benægter de ikke at algebra bevæger sig mod mere og mere abstrakte objekter og relationer og kommer til at afhænge af stadig mere omfattende teknikker og repræsentationsformer. De mener dog at vanskelighederne som udvises af eleverne i udskoling og på gymnasiet i algebra, i vid udstrækning skyldes utilstrækkelig aritmetik og mere grundlæggende mangler i den generelle elementære matematik.




**Figur 3.** *Aritmetik som en del af algebra.*

Tilhængere af tidlig algebra-tankegangen mener at aritmetik har en gennemgående algebraisk karakter på den måde at aritmetik omhandler generelle tilfælde og strukturer som kan indfanges af algebraisk notation. Endvidere tales der om at algebraisk notation kan støtte matematiske ræsonnementer, selv hos de mindre elever: "Even in early grades, algebraic notation can play a supportive role in learning mathematics." (Carraher et al., 2006, s. 88). Tanken er at *aritmetik er en del af algebra*, nemlig den del der har med talsystemer, tallinjer, simple funktioner osv. at gøre (Schliemann et al., 2007). Med dette syn får vi en ny model af forholdet mellem aritmetik og algebra, som illustreret på figur 3.

Målet med tidlig algebra er altså ikke at skubbe udskolingens og gymnasiets algebra ned i indskolingen. Det går ikke ud på at lære færdigheder til brug i algebraiske procedurer, herunder regler til at manipulere symboler. Til gengæld er målet at udvikle algebraisk tænkning. Under algebraisk tænkning hører bl.a. at man arbejder med og udvikler elevernes forståelse af det matematiske lighedstegn, "=". Elever der har fulgt den traditionelle undervisning med aritmetik først og algebra efterfølgende, har ofte en forforståelse af at "=" er den direkte vej til at skrive svaret på beregningerne på højre side. Lighedstegnet får derfor betydningen "afkaster" eller "producerer" for eleverne i stedet for "ækvivalent" (Schifter et al., 2008). Men lighedstegnet indeholder jo ikke blot denne forståelse. Eleverne bør derfor bl.a. komme igennem eksempler som 12 = 9 + 3 og 5 + 7 = 9 + 3 i den tidlige matematikundervisning. Talsætninger som disse udtrykker refleksive egenskaber (a = a) af lighedstegnet. Disse har eleverne ifølge Carraher og Schliemann ikke problemer med at acceptere. Dog er det med talsætninger også muligt at udtrykke de symmetriske og transitive egenskaber af lighedstegnet. Arbejdet med talsætninger er et eksempel på en af de aktiviteter der kan være med til at fremhæve samspillet mellem aritmetik og algebra.

Idéen bag tidlig algebra er altså at udviklingen af algebraiske ræsonnementer i de mindre klasser er afgørende for at forbedre matematikundervisningen. Forståelse tager lang tid at udvikle, og derfor bør algebraisk tænkning opbygges og udvikles over en udvidet periode der starter i indskolingen. Adskillelsen af aritmetik og algebra som der tales om i præ-algebraisk tænkning, kan være med til at fratage eleverne muligheden for at udvikle nogle mentale skemaer der går på tænkningen i og om matematik, i de mindre klasser.

De to centrale elementer i tidlig algebra er at lave generalisationer og at bruge symboler til at repræsentere matematiske idéer og til at repræsentere og løse problemer. Eleverne skal derfor ifølge Carpenter & Levi (2000) opmuntres til at udarbejde idéer og konstruere måder at repræsentere disse idéer på så der kan tænkes og kommunikeres om dem. Eksempler på disse idéer kan være: "Når du lægger 0 til et tal, vil summen altid være tallet" eller "Når man lægger tre tal sammen, er det lige meget hvilke to tal der først lægges sammen".

Den tidlige algebra har desuden sit fundament i problemorienterede kontekster hvor algebraens formelle notation introduceres (Carraher et al., 2008). Udgangspunktet er derfor at se algebraen som et problemløsende værktøj hvor hverdagsrelaterede situationer kan tages op til diskussion, hvilket umiddelbart også giver mulighed for at eleverne kan arbejde med algebraen som et modelleringsværktøj. Den formelle notation skal introduceres gradvist og veldisponeret for at undgå en forhastet formalisering. Man kan dog ikke forvente at eleverne skal genopdage algebraen på egen hånd uden vejledning.

Tidlig algebra bør endvidere sammenflettes med eksisterende emner inden for tidlig matematik og kan være med til at etablere tætte bånd mellem diverse emner inden for matematikken. Fx opfordres der til at arbejde med geometriske tegninger i arbejdet med algebra (Carraher et al., 2008).

Den præ-algebraiske tankegang har præget den danske algebraundervisning i mange år. Med denne tilgang er det praktisk talt umuligt at indføre algebra i de mindre klasser da udgangspunktet med denne tilgang jo netop er at arbejde med aritmetik inden arbejdet med algebra kan begynde. Vi mener at tidlig algebra er en god alternativ løsning da eleverne på den måde allerede tidligt møder algebraiske notationer og repræsentationer. Endvidere kan algebraen i visse situationer også være med til at støtte elevernes forståelse af aritmetik.

## Tidlig algebra i indskolingen

Det empiriske materiale som denne artikel bygger på, er en del af vores undersøgelse i specialeprojektet "Tidlig algebra" (Mortensen & Petersen, 2011). Forsøget tager udgangspunkt i at eleverne primært skal opbygge generaliseringer ud fra aritmetik og herigennem arbejde sig frem mod en begyndende forståelse af variabelbegrebet. Forsøget foregik i en 2.-klasse med 20 elever, en lærer og en pædagog. Undervisningen er gennemført i efteråret 2009 og forløb over fire lektioner a 45 minutter.

Eleverne arbejder hovedsageligt med to arbejdsformer: klassesamtaler og elevaktiviteter. Klassesamtaler karakteriseres ved samtaler hvor alle elever og læreren involveres, mens elevaktiviteter karakteriseres som de aktiviteter hvor eleverne arbejder selvstændigt, enten alene eller sammen med en klassekammerat, og læreren hjælper og vejleder.

## Forsøgsundervisningen: slikbokseforsøget

Hensigten med forsøget er primært at undersøge om det er muligt at introducere og arbejde med variable i grundskolens indskoling ud fra tilgangen "algebra som generaliseret aritmetik". I det tilfælde introduktionen af variable i indskolingen virker, kan det bl.a. give eleverne en tidlig oplevelse af at matematik ikke altid omhandler talfacitter.

Forsøgsundervisningen omhandler to personer (Ulla Christina og Tina) der hver får en slikboks. Eleverne kan ikke se hvad der er i slikboksene, men får at vide at der er lige mange bolsjer i hver. Dog er den ene slikboks udstyret med tre bolsjer mere end den anden som ligger oven på slikboksen. Elevernes opgave er at finde frem til hvordan man kan udtrykke hvor mange bolsjer hhv. Ulla Christina og Tina har. Gennem diskussioner og aktiviteter skal eleverne nå frem til en løsning på problemet. Aktiviteterne består bl.a. af udarbejdelsen af egne repræsentationer for situationen, tabeller, arbejdsark, tegninger samt fællesdiskussioner.

I det følgende relaterer vi forsøgsmålene til trinmålene efter 3. klassetrin i Fælles Mål 2009. Disse trinmål omfatter bl.a.:

Matematik i anvendelse:

- Vælge og benytte regningsarter i forskellige praktiske sammenhænge
- Erhverve en begyndende forståelse af matematik som beskrivelsesmiddel.

Matematiske arbejdsmåder:

- Arbejde eksperimenterende og undersøgende med inddragelse af konkrete materialer
- Modtage, arbejde med og videregive enkle skriftlige og mundtlige informationer som indeholder matematikfaglige udtryk
- Indgå i dialog om matematik hvor elevernes forskellige idéer inddrages.

Matematiske emner:

- Bestemme antal ved hjælp af addition, subtraktion … inden for de naturlige tal.

Endvidere skal der arbejdes særligt med symbolbehandlings- og repræsentationskompetencen. Symbolbehandlingskompetencen defineres kort som *"afkode og anvende enkle matematiske symboler, herunder tal og regnetegn, samt forbinde dem med dagligdags sprog"*, og repræsentationskompetencen som *"danne, forstå og anvende forskellige repræsentationer af matematiske objekter, begreber, situationer eller problemer"* (Undervisningsministeriet, 2009, s. 4).

Forsøget er derfor begrundet i trinmålene efter 3. klassetrin. Det betyder naturligvis ikke at der direkte stilles krav om at gennemføre en undervisning svarende til dette forsøg, men en sådan undervisning er mulig inden for rammerne af Fælles Mål 2009.

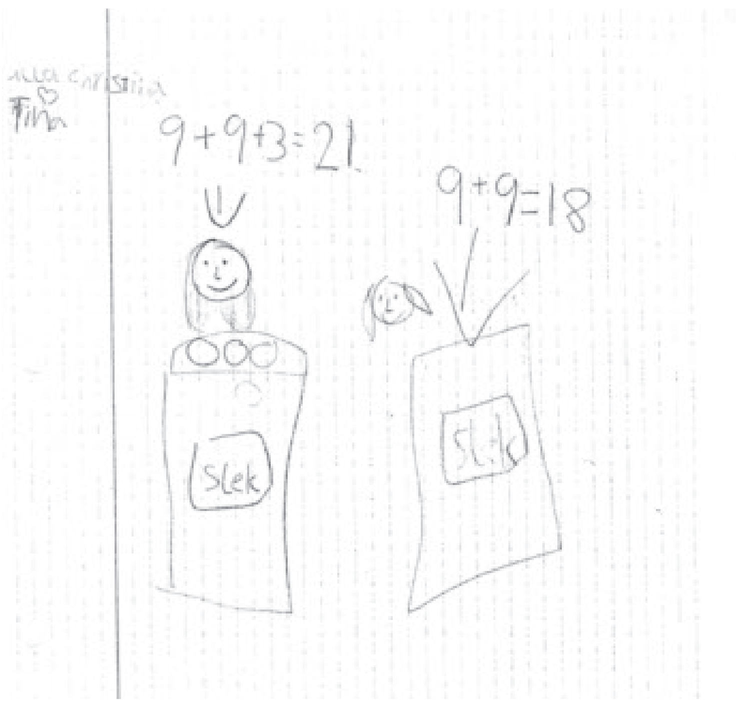
Inden gennemførelsen af forsøget havde vi visse overvejelser af denne art: "Vil eleverne være imødekommende over for idéen om at introducere dem for variabelbegrebet?", "Er det overhovedet kognitivt muligt for eleverne at opnå en begyndende forståelse af variabelbegrebet? Hvis ja, hvem vil have lettest ved at håndtere tankegangen?" og "Hvordan vil undervisningens rammer påvirke eleverne?". En naturlig tanke vil være at elever med faglig styrke i den daglige undervisning også vil have fordele i arbejdet med forsøgsundervisning. Dette viste sig dog efterfølgende ikke at være tilfældet, idet flere elever som i den daglige undervisning blev betragtet som fagligt stærke, sad tilbagelænet og stirrede rådvildt på aktivitetsarkene. Disse elever gav i deres mundtlige begrundelser udtryk for at have svært ved at rumme opgavens struktur og åbenhed. Det overraskende i denne situation var at elever som i den daglige undervisning blev betragtet som fagligt svage, fandt denne åbenhed og struktur inspirerende og pludselig blev førende inden for den, for dem, mere "abstrakte" matematik. Disse elever oplevede en begyndende tillid til sig selv og deres evner inden for matematik samtidig med at læreren erfarede hvilken slags opgaver disse elever bedre kunne håndtere.

Forsøgssituationen var den at der var tre personer som kunne besætte hver sin rolle i dataindsamlingsprocessen. De tre roller kan beskrives som læreren, kameraføreren og dataindsamleren. Hver rolle havde sit formål. Fx filmede kameraføreren dialoger i arbejdet med de forskellige aktiviteter, læreren foretog de praktiske foranstaltninger såsom introduktionen, gennemgangen af forsøget og vejledning af eleverne, og dataindsamleren observerede og tog notater af klassediskussionerne samt diskussionerne eleverne og lærer-elev imellem.

## Fra konkret til generel

For at eksemplificere hvordan yngre elever kan forstå variable og variationer i matematik, vil vi beskrive vores oplevelser og erfaringer i forbindelse med forsøgsundervisningen. Læreren starter timen med at spørge til en tidligere undervisningslektion hvor eleverne arbejder med regnehistorier. Baggrunden for at rette elevernes opmærksomhed mod denne særlige aktivitet er at flytte elevernes tanker til anderledes og mere kreative tankegange samt at give eleverne en følelse af noget kendt de kan holde fast i når de videre bliver introduceret for det nye.

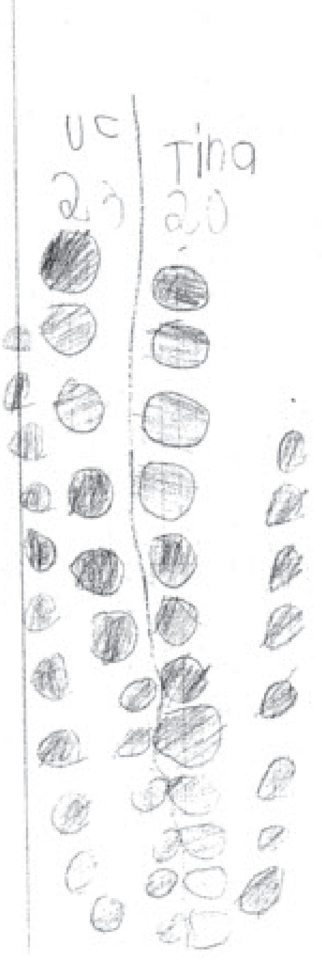
Læreren fortæller eleverne en lille historie om Ulla Christina og Tina som har fået hver sin slikboks af Tinas mor. Da Ulla Christina er gæst hos Tina, skal hun have tre bolsjer mere end Tina. Læreren viser de to medbragte slikbokse frem så eleverne kan betragte de to slikbokse samtidig med at historien bliver fortalt. På den måde skal eleverne arbejde med en problemstilling som de reelt bør kunne forholde sig til. Eleverne får at vide at der er lige mange bolsjer i slikboksene, men at man ikke ved hvor mange der er i hver. Herefter stiller læreren følgende spørgsmål: “Hvor mange




**Figur 4.** *En elevs repræsentation af Tinas og Ulla Christinas bolsjer.*

bolsjer vil I gætte på Ulla Christina har i alt?", "Hvor mange vil I gætte på Tina har i alt?" og "Hvem har flest?". Disse spørgsmål skal eleverne forholde sig til ved at hver enkelt elev udarbejder en tegning eller beskrivelse over deres gæt på hvor mange bolsjer Tina og Ulla Christina hver især har.

Denne udfordring håndterer eleverne meget forskelligt (se fx figur 4 og 5). Én elev foreslår at man kan lave en masse regnestykker på bagsiden af papiret da man jo ikke kender til det eksakte antal bolsjer. En anden mener at man kan måle et af Ulla Christinas fritliggende bolsjer og på den måde finde frem til hvor mange bolsjer der må være i boksen (se figur 4). Denne løsningsstrategi finder vi interessant idet eleven udviser en konkret og "målbar" måde at tackle et øjensynligt uoverskueligt problem på. Umiddelbart behandler denne elev matematikken som et problemløsende værktøj, hvilket er et af algebraaspekterne som tidligere er nævnt.




**Figur 5.** *En elevs repræsentation af Tinas og Ulla Christinas bolsjer.*

En tredje elev gætter på at Ulla Christina har 28 bolsjer i alt, og tæller derefter baglæns for at få Tinas antal bolsjer.

Mens eleverne arbejder med at svare, bliver slikboksene sendt rundt så de kan se og føle på dem. Eleverne er meget optaget af at mærke godt efter inden de gætter. I den forbindelse bliver slikboksene målt, vejet og rystet. Eleverne vil tydeligvis ikke nøjes med delvise observationer. Her kommer matematik som et undersøgende og udforskende fag til sin ret. Eleverne er i første omgang af den overbevisning at hvis deres gæt skal vise sig at være forkert, skyldes det at de ikke har undersøgt og udforsket slikboksene godt nok.

Elevernes individuelle besvarelser bliver samlet ind hvorefter elevernes gæt bliver taget op til diskussion i fællesskab. En elev vælger at forklare sit gæt på følgende måde:

Læreren: "Christian."
Christian: "Jaa. Øh ... Ved Tina fik jeg 15, og ved Ulla Christina fik jeg 18."
Læreren: "Hvordan gjorde du det?"
Christian: "Jeg gættede."
Læreren: "Du gættede. Hvem gættede du først på?"
Christian: "Det var Ulla Christina."
Læreren: "Hvad gjorde du så for at finde antallet for Tina?"
Christian: "Der minusede jeg tre fra."
Læreren: "Så gættede du ikke hele vejen."
Christian: "Nej, kun næsten."

Denne dialog mellem læreren og Christian giver indtryk af hvordan Christian har tænkt. Desuden ses det at læreren forsøger at skabe en underliggende forståelse af at Christian kun gætter på det ene tal og ikke det andet. Det er på dette stade af forsøget fundamentet for den videre forståelse af afhængige og uafhængige variable kan inddrages.

## Fra en konkret situation til mange mulige situationer

Alle elevernes gæt for mulige udfald for hhv. Tinas og Ulla Christinas antal bolsjer plottes ind i en tabel (figur 6) hvorefter læreren tegner en tredje kolonne som hun kalder forskelskolonnen. Hensigten med at skitsere alle elevernes gæt i en tabel er at vise eleverne at der er mange mulige situationer koblet til slikboksene. Opgaven lægger derfor op til at eleverne skal arbejde med variable selvom der er et endeligt antal bolsjer i boksene, hvilket betyder at eleverne egentlig arbejder med konstanter.

| Navn | Tina | UC | Forskel |
|---|---|---|---|
| | 10 | 13 | 3 |
| | 18 | 21 | 3 |
| | 20 | 23 | 3 |
| | 27 | 30 | 3 |
| | 23 | 26 | 3 |
| | 20 | 23 | 3 |
| | 27 | 30 | 3 |
| | 12 | 15 | |
| | 25 | 28 | |
| | 25 | 28 | |
| | 15 | 18 | |
| | 15 | 18 | |
| | 15 | 18 | |
| | 23 | 26 | |
| | 20 | 40 | |
| | 15 | 18 | |
| | 40 | 43 | |
| | 30 | 33 | |
| | 27 | 30 | |

**Figur 6.** *Elevernes gæt af antallet af bolsjer som Ulla Christina og Tina besidder.*

Læreren foreslår at forskelskolonnen kan udfyldes ved at trække Tinas bolsjer fra Ulla Christinas hvilket giver eleverne en oplevelse af at der er en form for struktur i tallene. Denne subtraktion af Tinas bolsjer fra Ulla Christinas bliver i fællesskab udført for omtrent fem af elevernes gæt indtil en elev ivrigt rækker hånden op og siger:

Kim: "Den giver tre."
Læreren: "Hvordan ved du det?"
Kim: "Man tager Tinas og lægger bare tre til."
Læreren: "Hvorfor gør vi det?"
Kim: "Fordi der er tre over Ulla Christinas."
Læreren: "Og hvad var det vi vidste om de her slikbokse?"
Kim: "At der var lige mange i dem, men der er tre mere i Ulla Christinas, altså dem der er ovenpå."

## Fra mange mulige situationer til en generel notation af alle situationer

Denne samtale udvikler sig til en fællesdiskussion som bliver taget op på klassen. Læreren starter med at tegne en skitse af de to slikbokse på tavlen hvorefter læreren foreslår at man kan kalde mængden af bolsjer i Tinas slikboks for "N". Efterfølgende beder læreren eleverne forklare hvad "N" betyder, eller hvad de forstår ved "N". En elev foreslår at "N" står for "nisse". En anden foreslår at "N" kan stå for et spørgsmålstegn, og begrunder det med at antallet af bolsjer i boksene er ukendt. Som resultat af denne elevs besvarelse bliver det konstateret at ingen ved hvor mange bolsjer der er i slikboksene, og at man umiddelbart kan betegne antallet som et spørgsmålstegn.

Klassediskussionen slutter af med at læreren fortæller at "N" i denne situation står for et tal som både kan være et lille og et stort tal, hvilket man ikke kan sige noget om da vi jo ikke må åbne boksene for at tjekke. Efter klassediskussionen får eleverne udleveret et aktivitetsark (figur 7) hvor de med hjælp og vejledning fra læreren skal finde frem til hvad man kan kalde antallet af Ulla Christinas bolsjer. Eleverne får derved udleveret et forslag til hvad man kan kalde antallet af Tinas bolsjer, og skal ud fra denne oplysning finde frem til hvad antallet af Ulla Christinas bolsjer kan kaldes.


**Figur 7.** *Aktivitetsarket til eleverne.*


**Figur 8.** *Elevbesvarelsen "N + 3".*


**Figur 9.** *Elevbesvarelsen "Q".*

Eleverne kommer med mange forskellige bud på hvad antallet af Ulla Christinas bolsjer kan kaldes, heriblandt "N + 3", "Q", "bolsje" og "3". De hyppigst forekommende besvarelser er hhv. "N + 3" og "Q" (figur 8 og 9), hvilket vi vælger at karakterisere som besvarelser der ligger tæt på den algebraiske tankegang. Umiddelbart overrasker besvarelsen "Q" os da vi ikke på forhånd har taget sådan en besvarelse i betragtning, og vi i første omgang ikke helt er med på hvordan eleverne har fundet frem til dette resultat. Det viser sig imidlertid at de elever som vælger at betegne Ulla Christinas antal bolsjer med "Q", har talt tre frem, fra "N" til "Q", i alfabetet, og eleverne med betegnelsen "N + 3" har adderet de tre ekstra bolsjer til den algebraiske notation (N) man allerede kender. Men besidder elever som giver de to forskellige svar, samme opfattelse af bogstavet "N"? Vi er af den overbevisning at de elever som betegner

Ulla Christinas antal bolsjer med "Q", identificerer dette med et ubekendt tal, altså en pladsholder hvor eleverne som betegner Ulla Christinas antal med "N + 3", identificerer "N" som en variabel.

Afslutningsvis samles der op i klassen hvor eleverne fortæller hinanden hvad de er kommet frem til. På den måde får eleverne formuleret sig med det matematiske sprog eller med det naturlige sprog omhandlende noget matematisk, hvilket resulterer i at de ligeledes skal forsøge at følge andres forklaringer og ræsonnementer. Desuden arbejdes der med det mest grundlæggende inden for symbolmanipulation, det at udforme et symboludtryk.

Som afslutning på forsøgsundervisningen åbnes slikboksene for eleverne. Det kan diskuteres hvorvidt dette er den bedste afslutning, da der både er fordele og ulemper ved at åbne slikboksene til sidst. Ulemperne ligger i at elevernes illusion om at der er alt og intet i boksene, ødelægges. På den anden side giver det en fuldendthed af undersøgelsen for eleverne at få lov til at åbne slikboksene. Endvidere giver det mulighed for at eleverne efterfølgende kan sætte det konkrete antal ind på N's plads i udtrykkene "N" og "N + 3" og derved få mulighed for at opdage nogle sammenhænge.

## Opsamling af resultaterne fra datamaterialet

Hovedformålet med forsøget var at undersøge om det er muligt at implementere generaliseret aritmetik, herunder introduktionen af en begyndende forståelse af variabelbegrebet, i indskolingen, samt at få indskolingens elever til at arbejde med forskellige repræsentationer for samme begreb. Kort sagt viste forsøget sig at være relativt vellykket. Dog stødte vi på nye udfordringer, fx det at eleverne opfattede bogstavernes anvendelse forskelligt ("N + 3" og "Q").

Vi fandt samtidig ud af at introduktionen af den såkaldte mere "abstrakte" matematik fungerede tilfredsstillende i indskolingens undervisning. Når vi mener at vi i forsøgsundervisningen arbejdede med algebra som generaliseret aritmetik, skal der tages udgangspunkt i at hensigten med undervisningen bl.a. var at rykke eleverne kognitivt fra udelukkende at tænke på det konkrete og over til det mere generelle, nemlig fra deres gæt i form af talværdier over til algebraiske notationer. Eleverne arbejdede således med forskellige repræsentationer for samme begreb, nemlig talværdier, tegninger, det naturlige sprog, bogstavudtryk samt det konkrete materiale (slikboksene).

Eleverne der valgte at betegne Ulla Christinas antal bolsjer med "Q", spurgte vi hvordan de havde fundet frem til netop dette bogstav som værende løsningen. De fortalte at de blot havde talt tre frem, fra N til Q, i alfabetet. Eleverne med betegnelsen "N + 3" som løsning havde adderet forholdet til det element de allerede kendte. Spørgsmålet er om det er den samme opfattelse af bogstavet eleverne umiddelbart udtrykte? "Q" var en betegnelse der gav os stof til eftertanke, for hvordan betragtede eleverne egentlig bogstavernes anvendelse? Hvad betød det for dem? Ville resultatet have set anderledes ud hvis vi havde arbejdet med N-tallinjer, som beskrives i afsnittet "Øvrige kommentarer", inden forsøget, og ville eleverne da have foreslået løsningen "Q"?

I efterbehandlingen af empirien blev vi i tvivl om hvorvidt det at åbne slikboksene var det rigtige at gøre, da vi ved at åbne dem på sin vis ødelagde elevernes illusion om at boksene kunne indeholde alt og ingenting. Desuden oplevede vi at eleverne igen var optaget af hvem der havde gættet antallet af bolsjer rigtigt.

Vi valgte at gennemføre forsøget i én klasse og over en kort tidsperiode på fire lektioner, hvilket selvfølgelig har konsekvenser for resultaterne. Den kortvarige forsøgsundervisning kan opfattes som urealistisk smal når man ser det i et udviklingsperspektiv. Det bliver derfor svært at sige om de fire lektioner kan være med til at fremme elevernes påbegyndende algebraiske tænkning, da opbyggelsen af forståelse kræver en længere tidsperiode.

## Øvrige kommentarer

Det her beskrevne forsøg er blot én af mange metoder til at lade indskolingseleverne stifte bekendtskab med tidlig algebra. Andre muligheder er fx at lade eleverne arbejde med tallinjer og udvide disse tallinjer til at omfatte variable. Jess et al. (2008) forklarer princippet i en sådan variabellinje, med "N" som nulpunkt, hvor eleverne kan lægge til og trække fra som de vil. Jess et al. foreslår endvidere at man kan lægge variabeltallinjen oven på en standardiseret tallinje, således at eleverne kan trække paralleller til de færdigheder de allerede har i at benytte sig af tallinjer.

Endvidere kan man arbejde med funktionspapkasser der går ud på at en elev anbringes i en stor papkasse og får oplyst en funktionsforskrift. De andre elever i klassen putter tal, altså den uafhængige variabel ind til eleven. Eleven i kassen skal så finde ud af hvad den afhængige variabel skal være, og skriver det på en lap papir der kommer ud af maskinen. Alle resultater bliver skrevet ned hvorefter eleverne skal finde en struktur i tallene.

## Konklusion

Forsøget viser at elever i indskolingen kan motiveres til at arbejde med den, for dem, "abstrakte" del af algebra på en alternativ måde. Endvidere viser det at eleverne kan håndtere arbejdet med mere abstrakte begreber, såsom ubekendte og variable. Dog viser det sig at eleverne muligvis sidder inde med forskellige opfattelser af bogstavets anvendelse. Dette ses i elevernes bud på hvor mange bolsjer Ulla Christina i alt har, hvor eleverne gætter på hhv. "Q" og "N + 3".

Formidlingen af denne forsøgsundervisnings resultater har til hensigt at give undervisere, særligt i grundskolen, et konkret bud på hvordan man kan indføre tidlig algebra i indskolingen. Vi håber at artiklen her kan vække underviseres nysgerrighed og gåpåmod mht. nye tiltag inden for algebraundervisningen i den danske grundskole.

## Referenceliste


Arcavi, A. (November 1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, s. 24-35.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problemsolving: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. I: N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee, *Approaches to Algebra* (s. 115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). Algebra i 1-12-perspektiv. *Nämnaren tema: Algebra för alla*, s. 9-32.

Carpenter, T.P. & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades.* NCISLA/Mathematics & Science.

Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (20. april 2002). Empirical and Logical Truth in Early Algebra Activities: From Guessing Amounts to Representing Variables1. *NCTM*, s. 1-13.

Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. I: Frank Lester (red.), *Handbook of Research on Mathematics Education* (s. 669-705). Information Age Publishing.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J.L. (2008). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. I: J.J. Kaput, D.W. Carraher & M.L. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (s. 235-302). New York: Taylor & Francis Group.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., Brizuela, B. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, s. 87-115.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (Januar/februar 2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, s. 9-13.

DR. (1. december 2010). *DR2 Deadline Talknuserne*. Lokaliseret den 2. december 2010 på: www.dr.dk/DR2/deadline2230/Talknuserne/verdensdyrestefolkeskole.htm.

Driscoll, M. (1999). Smoothing the Transition to Algebra Through Algorithmic Thinking. I: M. Driscoll, *Fostering Algebraic Thinking – A Guide for Teachers Grades 6-10* (s. 20-46). Portsmouth: Educational Development Center, Inc.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. I: G. Frizsimmons, *Educational Studies in Mathematics* (s. 103-131). Springer.

Finansministeriet. (November 1997). *4. Effektivitet – hvor dyre er danske uddannelser?* Lokaliseret den 29. november 2010 på: www.fm.dk/FM/GamlePub/dkuddan/kap4.htm.

Jensen, T.H. (2007). *Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt – hvorfor ikke?* Roskilde University, Department of Science, Systems and Models, IMFUFA.

Jess, K., Skott, J., Hansen, H. & Schou, J. (2008). Algebra. I: K. Jess, J. Skott, H. Hansen & J. Schou, *Matematik for lærerstuderende – Epsilon – 1.-6. klasse* (s. 195-236). Samfundslitteratur.

Kaput, J.J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? I: J.J. Kaput, D.W. Carraher & M.L. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (s. 5-18). NCTM.

Kilpatrick, J. & Izsák, A. (2008). A History of Algebra in the School Curriculum. I: C. E. Greens & R. Rubenstein, *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (s. 3-19). NCTM.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithemetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations. *Educational Studies in Mathematics*, s. 39-65.

Lindenskov, L. & Weng, P. (2007). *15 Matematikopgaver i PISA*. København NV: Danmarks Pædagogiske Universitetsskole.

Mortensen, U.C. & Petersen, T.O. (2011). *Tidlig algebra.*

OECD. (2003). *PISA Country Profiles – Programme for International Student Assessment*. Lokaliseret den 26. november 2010 på: http://pisacountry.acer.edu.au/index.php.

OECD. (2004). *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003.*

OECD. (2009). *PISA 2009 Assessment Framework – Key Competencies in Reading, Mathematics and Science.*

OECD. (2010). *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I).*

Paludan, K. (2000). *Videnskaben, Verden og Vi.* Aarhus Universitetsforlag.

Radford, L. & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical Forms og Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics*, s. 145-164.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S.J. & Bastable, V. (2008). Early Algebra: What Does Understanding the Laws of Aritmetic Mean in the Elementary Grades? I: J.J. Kaput, D.W. Carraher & M. L. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (s. 413-448). New York: Taylor & Francis Group, LLC.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. & Brizuela, B.M. (2007). Preface: Rethinking Early Mathematics Education. I: A.D. Schliemann, D.W. Carraher & B.M. Brizuela, *Bringing Out the Algebraic Character of Aritmetic* (s. ix-xviii). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

TV 2. (8. december 2010). *Sputnik*. Lokaliseret den 8. december 2010 på: http://sputnik.tv2.dk/play/go-morgen-danmark-25794/.

Undervisningsministeriet. (2009). *Fælles Mål 2009 – Matematik, Faghæfte 12.* Undervisningsministeriet.

Van Amerom, B.A. (2003). Focusing on Informal Strategies when Linking Arithemetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, s. 63-75.

Weng, P. & Lindenskov, L. (2004). Matematisk kompetence. I: J. Mejding, *PISA 2003 – Danske unge i en international sammenligning* (s. 35-96). København NV: Danmarks Pædagogiske Universitetsforlag.