

# Tidlig algebra er på vej!



Peter Weng, *Institut for  
uddannelse og pædagogik  
(DPU), AU*

*Kommentar til T.O. Petersen og U.C. Mortensens "Tidlig algebra", MONA, 2011(3)*

I artiklen "Tidlig algebra" af T.O. Petersen og U.C. Mortensen (P & M) argumenteres der for en tidlig indføring i grundskolen af algebra og algebraisk tænkning gennem en "nytænkning". I denne "nytænkning" skal aritmetikken inddrages som en del af algebraen og ikke som noget der skal arbejdes med før algebraen kommer ind i undervisningen. Jeg vil kommentere dette ud fra et syn på algebraen som et sprog og et strategiredskab i problembehandlingen af matematikholdige problemer.

Det kniber stadig med at få implementeret de tanker om *early algebra* der internationalt er om algebraens indførelse i grundskoleundervisningen (se fx Kaput, 2008). Med henvisning til de kvantitative resultater som elever på 9. klassetrin præsterede i PISA 2003 og 2009, og deres egen kvalitative spørgeskemaundersøgelse af fire udvalgte 9.-klasser konkluderer P & M "at elever i den danske grundskole ikke ligger i toppen når det drejer sig om algebra, ..., at mange af elevernes forklaringer tydede på en procedurermæssig forståelse af algebra, og ikke en begrebsmæssig forståelse, ..., at der findes et behov for nye tiltag i forbindelse med undervisning i algebra". Om inddragelsen af ovennævnte undersøgelser er nødvendig som grundlag for en "nytænkning" på begyndertrinnet vedrørende algebra, kan diskuteres. Der er allerede igangsat "nytænkning", og der er spirende tegn på at udviklingen går i en retning af *tidlig algebra*, som det vil fremgå af det følgende.

I den danske rapport om danske elevers præstationer på 4. klassetrin i TIMSS 2007 (Allerup, 2007, s. 17) står der at "... Danske elever klarer sig godt i internationalt perspektiv ... Det passer godt med forestillingen om, at undervisningen i 4. klassetrin ikke fokuserer så meget på de automatiske færdigheder...". Udsagnene knytter sig til domænerne tal(teori), geometri og data hvori algebraen indgår, men ikke er med som et specifikt domæne på 4. klassetrin i TIMSS.

De nyere lærebogssystemer i det 21. århundrede, som fx *Flexmat* og *Kontext*, er i deres tilgang til læring af matematik på forkant med de tanker som P & M påpeger som ønskelige. Arbejdet med algebra fra skolestarten indgår i disse lærebogssystemer.

mer indirekte i den fokusering der er på begrebsforståelse hvor generalisering af det konkrete er centralt. Kompetencetænkningen trækker i samme retning, og denne har været undervejs siden starten af det 21. århundrede og er nu implementeret i *Fælles Mål 2009* (UVM, 2009). Specifikt er de tanker Bergsten et al. har om *tidlig algebra* (Bergsten et al., 1997), og som P & M refererer en del til i deres artikel, allerede blev indskrevet i *Fælles Mål 2009* hvor Bergstens "algebraiske cyklus" er gengivet direkte (UVM, 2009, s. 52). Ligeledes understreges det flere steder at tal og algebra skal tænkes sammen, som det fremgår af nedenstående citat:

*... hvordan arbejdet med tal og algebra på forskellige klassetrin kan indgå, når problemstillinger fra dagligdagen skal behandles. Dette kan ses i modsætning til en undervisning, der udelukkende tilrettelægges med den hensigt at kunne løse rene talopgaver og senere at kunne manipulere med bogstavsudtryk. (UVM, 2009, s. 52)*

### **Så nytænkningen i relation til arbejdet med tidlig algebra er gået i gang!**

*Præ-algebra* betegner traditionelt den lille fællesmængde der er mellem aritmetikken og algebraen i en undervisning der ved starten på skolematematikken lægger vægten alene på udviklingen af den aritmetiske tænkning. Undervisningen bliver ofte lig med procedureregning. Dette sker ud fra en idé om at beherskelse af aritmetikken er grundlaget for den mere generelle og abstrakte algebraiske tænkning – det vil sige som en forløber for en egentlig matematisk struktur- og sammenhængstænkning. Denne "rækkefølgetænkning" har været årsag til at mange elever har opgivet matematikken når algebra skulle læres isoleret.

*"– Algebra? Det där med x och y? Jag har ingen aning om vad det där handlade om. Jag hade alltid så svårt ved matten. – Algebra? Det minns jag inget av. Vad handlade det om? – Aldrig, men jag tyckte om problemlösning i skolan." (Persson, 2002, s. 24).*

Heroverfor står *tidlig algebra* for en tilgang til algebraen hvor denne allerede fra dag ét skal indgå i arbejdet med matematikken. Aritmetikken skal indgå som en del af algebraen så eleverne bliver mere bevidste om tallenes strukturer og de operationer der er mulige/ikke mulige med dem. Dette vil forebygge at algebraen senere hen bliver til en vanskelig udvidelse til "regning med bogstaver".

Et forsøg på at fremme en udvikling fra *præ-* til *tidlig algebra* som lægger vægt på en konstruktivistisk måde at udvikle algebraisk tænkning på fra 1. klasse, er beskrevet af Hejny & Littler (2002) i artiklen "The Beginnings of Algebraic Thinking". Deres tilgang til algebraen fokuserer både på undervisningsstrategier og de strategier eleverne anvender i deres problembehandling. De er af den opfattelse at algebraisk tænkning skal rodfæstes i skolestarten gennem elevernes arbejde med aritmetiske problemstil-

linger hvori begreber som ubekendt, parameter og variabel kommer til at indgå. De har opstillet en model der beskriver udviklingen fra elevers tidlige erfaringer med tal til det tidspunkt senere hen hvor de har udviklet en fortrolighed med algebraiske udtryk og ligninger. De beskriver denne udvikling i ti nummererede, men ikke lineære trin. De lægger i deres beskrivelse af modellen vægt på følgende trinbeskrivelse som værende grundlæggende for en tidlig udvikling af algebraisk tænkning:

*Our interest concerns the pre-algebraic and algebraic thinking. Therefore we will start with stage 5.*

*(5) The ability to grasp and analyse simple word problems and arithmetical schemas.*  
(Hejny & Littler, 2002, s.108)

Dette trin er et grundlæggende strategisk trin i en undervisning der skal stimulere algebraisk tænkning hos elever på begyndertrinnet. De beskriver tre forskellige eksempler på problemstillinger der viser hvordan en ren aritmetisk, en geometrisk og en "real life"-kontekst kan være "redskaber" i arbejdet med at fremme eleveres evne til at forstå og analysere simple tekster ved hjælp af algebraisk tænkning.

1. Summen af tre på hinanden følgende tal er 33. Hvilke tre tal er det?
2. Omkredsen af et kvadrat er 12. Kan man finde arealet af kvadratet?
3. Anne er 3 år gammel. Når hun bliver lige så gammel som Bent er i dag, vil han være 15 år. Hvor gammel er Bent i dag? Hvor gammel vil Anne være når Bent er 15 år?  
(Hejny & Littler, 2002, s. 108, forf. oversættelse)

For at understøtte udviklingen af den algebraiske tænkning fokuseres der på løsningsprocesserne. Informationer om hvorfor det netop er denne problemløsningsstrategi en elev anvender, bliver et centralt omdrejningspunkt i udviklingen af elevens algebraiske tænkning og lærerens støtte til denne. Hvis en elev ved den første opgave straks deler de 33 med 3 for at finde tallet i midten, er det så fordi eleven kan huske "metoden" fra tidligere eksempler uden at kunne redegøre for hvorfor han gør som han gør? Eller er det fordi han har en indsigt i den algebraiske struktur der kommer til udtryk i tre på hinanden følgende tal? En elev kan også opfatte problemstillingen som helt ny og gå i gang med en "forsøg og fejl"-strategi ved at starte med et mere eller mindre kvalificeret gæt på tre tal, fx 6, 7, 8, og så ræsonnere sig frem til tallene 10, 11, 12 gennem en analytisk tænkning. Erfaringer med sådanne problemstillinger vil kunne styrke udviklingen af ræsonnementskompetence og dermed også en større forståelse af algebraiske sammenhænge der kan føre frem til en abstrakt forståelse af at tre på hinanden følgende tal kan repræsenteres ved udtryk som  $(n-1)$ ,  $n$ ,  $(n+1)$ .

Herved fås en mere konstruktiv tilgang til arbejdet med symboler der er i modsætning til den mere traditionelle rene træning i symbolmanipulation som ikke har udspring i en kontekst der kan give mulighed for en større forståelse af symbolrepræsentationerne. Ovennævnte uddrag fra den model som Hejny & Littler har fremlagt, falder helt i tråd med de lærings- og undervisningssyn der ser problembehandling som noget helt centralt i elevens udvikling af matematiske begreber og deres anvendelse. Allerede fra 1. klasse bør eleverne arbejde med matematik i kontekster der kan give dem mulighed for at drøvtygge algebraiske begreber og strukturer. Generelt gælder det at en længere fordøjelsesproces af de matematiske begreber hos eleverne vil kunne styrke læringen af matematik. Det gælder ikke mindst algebra hvis sprogbrug mange elever har meget svært ved at benytte sig af. Derfor kan skabelse af et undervisningsmiljø fra skolestarten der fremmer classesamtaler, være med til at styrke elevernes evne til at kommunikere i, med og om matematik, således at matematiske tanker om relationer og strukturer bliver italesat. Repræsentation og symbolanvendelse bør inddrages såvel mundtligt som skriftligt i classesamtaler der giver mening for eleverne. Det må derfor være et af matematiklærerens fremmeste mål at være katalysator for sådanne samtaler så eleverne kan få mulighed for at udfordre deres egne forståelser ved at skulle forholde sig til klassekammeraternes forståelser og den måde disse bliver formuleret på. Det vil trække i den retning som er en del af idéen med *tidlig algebra*.

Et yderligere tegn på at *tidlig algebra* er på vej ind i undervisningen, kan findes i den udvikling der kan ses i lærebøger til brug i uddannelsen af fremtidens matematiklærere. Et eksempel på dette kan ses i lærebogen *Mathematical Reasoning for Elementary Teachers* (Long et al., 2011), som med udgangspunkt i Polyas fire principper for problembehandling gør rede for hvordan algebra kan ses som en strategi. Gennem hele bogen beskrives det hvordan man som lærer gennem arbejdet med problemstillinger der er åbne, kan arbejde med algebra både som sprog og strategi som grundlag for at udvikle den enkelte elevs kompetencer, med speciel vægt på problembehandlings-, ræsonnements- og kommunikationskompetence.

Et sidste tegn på at *tidlig algebra* er på vej ind i undervisningen af matematik, som skal nævnes i denne artikel, er *tidlig matematikindsats*. Det var Robert T. Wright som sammen med flere andre introducerede *tidlig matematikindsats* omkring starten af dette århundrede i Australien og andre lande med det formål at forebygge matematikvanskeligheder. Indsatsen baseres på visse tidlige indikatorer for elevens vanskeligheder med matematikken. Der er en beskrivelse heraf i *Early Numeracy Assessment for Teaching and Intervention* (Wright et al., 2005). Også i Danmark er der igangsat en forebyggende indsats gennem *tidlig matematikindsats* på flere og flere skoler (Lindenskov & Weng, 2010), hvori den tænkning der ligger bag *tidlig algebra*, er stærkt fremtrædende.

Hvis matematiklærere fra skolestarten lader de fire perspektiver på algebra som

Van Amerom beskriver (Van Amerom, 2003, s. 63-75), og som er omtalt af P & M – algebra som generaliseret aritmetik, som redskab i problembehandling, som studiet af funktioner og som studiet af matematiske strukturer – vil dette danne et godt grundlag for *tidlig algebra*. I disse specifikke perspektiver ligger der også kimen til et generelt syn på matematik der vil kunne styrke læring af matematik.

Ovennævnte viser at der er tegn på at udviklingen går i den retning! Vi er på vej fra *præ-algebra* til *tidlig algebra*.

Dog bør det bemærkes at trinmålsbeskrivelsen i læseplanen for arbejdet med tal og algebra på 1.-3. klassesetrin (UVM, 2009, s. 20) ikke direkte afspejler beskrivelsen af det faglig-didaktiske område tal og algebra (UVM, 2009, s. 51-52), hvilket ikke fremmer implementeringen af tidlig algebra. Det kan man så håbe på at artiklen af P & M vil medvirke til.

## Referencer

- Allerup, P. (2007). *Danske 4. klasseelever i TIMSS 2007*, København: Danmarks Pædagogiske Universitetsskole.
- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra i 1-12 perspektiv*. Nämnaren tema: Algebra för alla.
- Hejny, M. & Littler, G. (2002). *The Beginnings of Algebraic Thinking*. I: Bergsten, C. & Grevholm, B. (red.), *Challenges in Mathematics Education*. Linköping: SMDF nr. 2.
- Kaput, J.J. (2008). *What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning?* I: Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M., *Algebra in the Early Grades*. New York: NCTM.
- Lindenskov, L. & Weng, P. (2010a). Tidlig matematikindsats på Frederiksberg. TMF. *Matematik*, 3.
- Lindenskov, L. & Weng, P. (2010b). Tidlig matematikindsats på Frederiksberg. TMF. Moduler med eksempler. *Matematik*, 4.
- Long, C.T., De Temple, D.W. & Millman, R.S. (2011). *Mathematical Reasoning for Elementary Teachers*. Boston: Pearson.
- Mortensen, U.C. & Petersen, T.O. (2011). Tidlig algebra. *MONA*, 2011(3).
- Persson, P.-E. (2002). Behöver alla lära sig algebra? I: *Nämnaren* 29 (3), s. 24-31
- Van Amerom, B.A. (2003). Focusing on Informal Strategies when Linking Arithmetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, s. 63-75.
- Wright, R.J., Martland, J. & Stafford, A.K. (2005). *Early Numeracy. Assessment for Teaching & Intervention*. Los Angeles: SAGE.