

Undersøgelserbaseret matematikundervisning



Rune Hansen,
UCSyddanmark



Povl Hansen,
UCSyddanmark

Abstract: *Undersøgelserbaseret matematikundervisning er en velkendt undervisningsmetode i matematikfaget. Artiklen tager udgangspunkt i de udfordringer som lærere og lærerstuderende står over for når de vil inddrage metoden i deres undervisning. I artiklen redegøres der for metoden hvorefter der fokuseres på hvad der kan virke hæmmende for lærere/lærerstuderende i at praktisere en undersøgelserbaseret tilgang til matematikken i deres undervisning. I artiklen udvikles desuden en række stilladserende redskaber der kan understøtte en proces hvor lærere/lærerstuderende kan bevæge sig fra en lærerstyret undervisning mod en elevstyret problem- og undersøgelserbaseret undervisning.*

Indledning

At arbejde undersøgende i matematik er ikke et nyt fænomen i dansk matematikundervisning. Undersøgelserlandskaber (Skovsmose, 2003) og matematisk modellering (Blomhøj, 2003) er eksempler på undersøgende tilgange der blev udviklet og indoptaget i dansk matematikdidaktisk diskurs op gennem 1990'erne. Sådanne tilgange er ofte blevet præsenteret som modpol til en lærebogs- og opgavestyret undervisning hvor begreber og metoder formidles til eleverne forud for at de øver færdigheder og regner tilhørende standardopgaver. Rundtom på skolerne er der givetvis mange matematiklærere der i deres praksis anvender undersøgende arbejdsformer. Der er imidlertid ingen forskningsmæssig kortlægning af i hvilket omfang der anvendes undersøgende arbejdsformer i matematikundervisningen.

Nyere undersøgelser peger dog på at *“en stor del af undervisningen mange steder handler om at indøve færdigheder ved at træne eleverne i standardalgoritmer”* (Danmarks Evalueringsinstitut, 2006, s. 25). Kun omkring 15 % anvender eksperimenterende arbejdsformer (Danmarks Evalueringsinstitut, 2006, s. 48f.). Lærebogen har en central rolle i matematikundervisningen. Mange lærere gennemgår simpelthen lærebogen i undervisningen (Mogensen, 2011, s. 322). Danmarks Evalueringsinstituts undersøgelse

af lærerens brug af Fælles Mål betoner at det er lærebogen som er målsættende for undervisningen, og ikke Fælles Mål eller matematiklæreren (Danmarks Evalueringsinstitut, 2012, s. 31, 42).

Selvom undersøgende arbejdsformer har spillet en markant rolle i matematikdidaktisk henseende, har de formentlig kun en beskedne rolle i den sædvanlige undervisningspraksis.

Der er således en afstand og et spændingsfelt mellem på den ene side didaktiske teorier og officielle beskrivelser af faget og på den anden side en undervisningspraksis hvor undersøgende tilgange kan have trange kår. Når det fra teoretisk og officiel side er blevet betonet at der er en række potentialer ved at arbejde undersøgende i matematikundervisning, kan følgende spørgsmål rejses: *Hvorfor er implementering af undersøgende undervisningsformer i praksis så vanskelig?*

Der kan være flere bud, men en tese kan være at den undersøgende undervisningsform i matematik måske er inden for mange matematiklæreres "nærmeste udviklingszone", men uden for den "aktuelle udviklingszone". Hermed signaleres at mange lærere nok er opmærksomme på behovet for og har ønske om at anvende mere undersøgende tilgange, men at de har behov for støtte til udvikling af deres praksis.

I denne artikel vil vi gennem en afklaring af aspekter ved undersøgende undervisningsformer fremkomme med bud på nogle stilladserende tilgange og redskaber til udvikling af undersøgende matematikundervisning. Redskaberne er blevet udviklet i forbindelse med lærerstuderendes arbejde med matematikundervisning i praksisnære situationer. Det er et bevidst valg at fokusere på lærerens perspektiv da det har stor betydning for at implementere en bestemt undervisningsmetode (Hargreaves, 2000).

På baggrund af problemstillingen "*Hvordan kan vi i læreruddannelsen under inddragelse af praktikken skabe grundlag for at de studerende som kommende lærere kan tilrettelægge og gennemføre undersøgelsesbaseret matematikundervisning?*" har vi over to år gennemført et udviklingsprojekt om undersøgende matematikundervisning på to linjefagshold (både "ældste" og "yngste") ved UC Syddanmarks lærerafdeling i Haderslev. Der har været tilknyttet to folkeskolelærere som har udviklet og afprøvet aktiviteter i deres klasser. Gennem hele forløbet er der afholdt møder hvor udfordringerne har været grundigt drøftet, og udviklingen af begreber og modeller har fundet sted. Arbejdet har været knyttet til PRIMAS-projektet i et samarbejde med Morten Blomhøj (PRIMAS, 2012). PRIMAS-projektet er et europæisk projekt der udspringer af anbefalingerne fra Rocard-rapporten. Her fremhæves en undersøgelsesbaseret tilgang som et middel til at nytænke undervisningen. Men hvad det egentlig omhandler, er ikke entydigt i europæisk sammenhæng selvom det er et stærkt forfulgt politisk mål (Michelsen, 2011).

Undersøgelserbaseret matematikundervisning

En undersøgelserbaseret matematikundervisning er ofte karakteriseret med ord som “dialogbaseret”, “problemorienteret”, “eksperimenterende” og “kreativ”. I denne artikel søger vi at gå bag om disse begreber.

Faghæfterne set gennem en undersøgelseroptik

Det begyndte allerede dengang faget hed regning/matematik i 1976. I det gule faghæfte står der i afsnittet “Mål” vedrørende elevens arbejdsformer “... *et mål, at den enkelte elev kommer til at indtage en eksperimenterende holdning ved indlevelsen i matematiske områder, som er nye for ham*” (Undervisningsministeriet, 1976, s. 10f).

Disse tanker bliver i faghæftet fra 1995 ophøjet til et centralt kundskabs- og færdighedsområde (Undervisningsministeriet, 1995, s. 11). Allerede i 2001 kommer Klare Mål hvor der i delmålet i CKF’et Problemløsning og arbejdsmetoder står at vi forventer at eleverne arbejder eksperimenterende og undersøgende (Undervisningsministeriet, 2001, s. 15).

De klare mål var ikke bindende, men i 2003 kommer der Fælles Mål hvor det i undervisningsvejledningen tydeliggøres at KOM-projektet (Niss & Jensen, 2002) nu er med til at skabe en fælles referenceramme for matematikundervisningen. I Fælles Mål 2009 bliver de matematiske kompetencer en del af trinmålene. Desuden står der i stk. 2 i fagformålet fra 2009 at eleverne kan erfare “*at arbejdet med matematik fordrer og fremmer kreativ virksomhed...*” (Undervisningsministeriet, 2009, s. 3). Dermed kan vi med en vis ret hævde at en undersøgende tilgang er en forudsætning for at leve op til fagets formål.

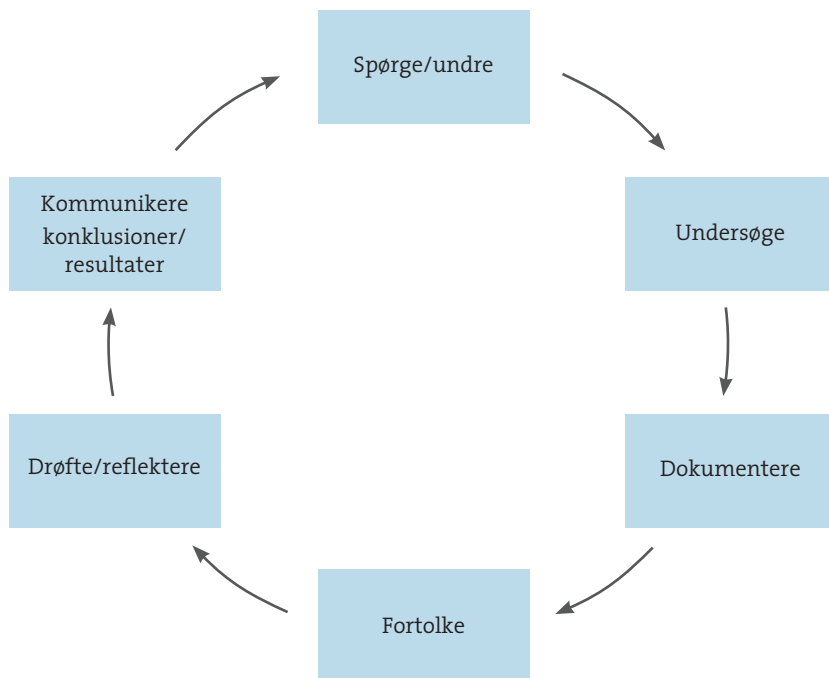
Set i det lys bliver Evalueringsinstituttets undersøgelse *Fælles Mål i folkeskolen* sat i perspektiv. Afstanden mellem det ønskede i formålet for faget og det realiserede i undervisningen er blevet stadig større fra 1976 til i dag – et problem som vi gennem vores udviklingsarbejde prøver at forholde os til.

En cyklisk model for undersøgelser

Gennem vores undervisning på læreruddannelsen har vi afprøvet aktiviteter og studeret andres tanker og projekter. Det har været interessant at sammenstille faghæftets tanker om en undersøgende tilgang med beskrivelsen fra PRIMAS-projektet.

“Inquiry-based learning aims to develop and foster inquiring minds and attitudes that are vital for pupils being able to face and manage uncertain futures. Fundamentally, learning is based on pupils adopting an active, questioning approach” (PRIMAS-team, 2012).

Den undersøgelserbaserede tilgang til undervisning kan blandt andet karakteriseres ved beskrivelser af de forskellige processer der kan indgå i elevernes arbejde. Udgangs-



Figur 1. Prototypisk cyklisk model for en undersøgende tilgang (Grødum et al., 2010).

punktet er et problem eller en undren – noget der kalder på en nærmere undersøgelse. Det er en pædagogisk pointe at denne undren etableres for den enkelte elev, og den skal være styrende for processerne i undersøgelsen. Generelt modelleres en undersøgelsesproces ofte didaktisk med en cyklisk model som vist i figur 1.

Man begynder med en undren der efterfølges af en hypotesedannelse. Dernæst bliver hypotesen undersøgt hvorefter eleverne dokumenterer deres undersøgelse, idéer og erfaringer. På baggrund af dokumentationen fremkommer de med fortolkninger hvilket skaber rum for at kunne drøfte og reflektere over hypotesens gyldighed i forhold til deres erfaringer. For at fastholde indtrykkene og sikre en almengørelse af centrale pointer efterfølges dette af kommunikative handlinger. De kan føre tilbage til den oprindelige undren, men også mod en ny undren der rummer nye spørgsmål. Herved etableres et fælles erfaringsgrundlag hos eleverne som læreren kan udnytte til at støtte elevernes tilegnelse af centrale faglige begreber og pointer der har været i spil i deres undersøgende arbejde. Læreren kan med andre ord institutionalisere matematisk viden baseret på elevernes oplevelse af dens relevans og støttet af deres tænkning i de konkrete situationer hvor de har anvendt denne viden.

Den cykliske model leder tankerne hen på Skovsmoses beskrivelse af undersøgelseslandskaber (Alrø & Skovsmose, 2005). Det samme gør sig gældende for matematisk modellering (Blomhøj, 2003; Højgaard Jensen, 2007) hvor eleverne inddrages i under-

søgelses-, udviklings- og kritikfaser. Undersøgelser baseret matematikundervisning opfatter vi som en form for overbegreb til tilgange som modellering og undersøgelseslandskaber. Den centrale pædagogiske pointe ved en undersøgelsesbaseret tilgang – at der i undervisningen skabes en situation hvor eleverne er optagede af at finde ud af noget i eller ved hjælp af matematik – træder hermed tydeligt frem. Men det bliver samtidig klart at der kan være forskellige didaktiske udfordringer knyttet til undersøgelsesbaseret matematikundervisning alt efter hvilke læringsintentioner der forfølges.

Praksisteori

Vi har forsøgt at udvikle stilladserende hjælpemidler for den usikre matematiklærer udi undersøgende matematikundervisning. Som begrundelser for disse redskaber har vi haft brug for at udvikle vores egen forståelse for teorier der underbygger undersøgende matematikundervisning. De forskellige aspekter er søgt inddraget i forbindelse med udvikling af vores egen praksisteori (jf. Handal og Lauvås' tese om at enhver lærer har en "praksisteori" der beskriver hvordan undervisning og læring foregår (Lauvås, 2002)).

Syn på læring og forståelse

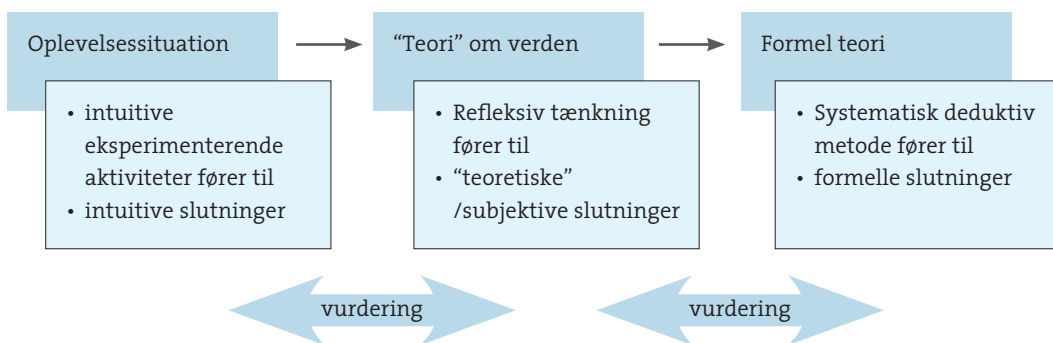
Som nævnt i indledningen har en undersøgende matematikundervisning svært ved at slå igennem. Forklæringsmodeller for noget sådant kan findes hos den engelske psykolog og didaktiker Skemp som udviklede en tænkning om *relational understanding* og *instrumental understanding* (Skemp, 1976, s. 20 f.; Skemp, 1979, s. 45). Her er den instrumentelle forståelse "*the ability to apply an appropriate remembered rule to the solution of a problem without knowing why the rule works*", og den relationelle forståelse er "*the ability to deduce specific rules or procedures from more general mathematical relationships*".

Med en vis ret kan det hævdes at en undersøgende matematikundervisning sigter mod en relationel forståelse. Derfor kan det være interessant at inddrage Skemps perspektiver på instrumentel og relationel undervisning. Måske kan vi her få et vink om hvorfor undersøgende matematikundervisning ikke er mere udbredt end det er.

Skemp konstaterer at mange lærere underviser instrumentelt – et billede som genfindes i EVA-rapporten fra 2006 (Danmarks Evalueringsinstitut, 2006). Skemp prøver som en slags Djævlens advokat at se på fordele ved instrumentel undervisning og ved relationel undervisning. Om den instrumentelle undervisning skriver han at undervisningen er lettere at forstå, og dermed er det lettere at levere de rigtige svar. Han betoner at vi ikke må undervurdere følelsen af at have succes i og med matematik. Det er dejligt som elev at "fabrikere" en side med rigtige svar. Om relationel

undervisning fremhæver Skemp paradokset at det er sværere at lære relationelt, men lettere at huske, da man ikke bare lærer en regel, en metode eller et begreb instrumentelt, men evner at relatere reglen, metoden eller begrebet til nye problemer. Desuden påpeger Skemp at relationel læring ofte er båret af en indre motivation og dermed medvirkende til at eleverne aktivt opsøger nye problemer og udforsker nye områder (Skemp R. , 1976, s. 23f).

Ud over en instrumentel og en relationel forståelse arbejder Skemp også med *“two modes of mental activity: Intuitive and reflective”* (Skemp R. , 1976). Denne tænkning genfindes hos den tyske fagdidaktiker Eric Wittmann der prøver at beskrive sammenhængen mellem en intuitiv, en personlig refleksiv og en formel proces i arbejdet med matematiske problemer. Wittmann prøver at fange tænkningens idé i en model der kan kobles til undersøgende matematikundervisning. Her lavet frit efter (Wittmann, 1981):



Figur 2. Fra det intuitive over det refleksive til det formelle.

Den undersøgende samtale

Når det undersøgende aspekt i nogle sammenhænge får en rolle i matematikundervisning, kommer der automatisk øget fokus på elevernes kommunikative handlinger. Samtalen er et nødvendigt led i forbindelse med udviklingen af elevernes relationelle forståelse for den undersøgende tilgang til matematikken. *“For mathematical inquiry to take place students and teachers must learn to carry on a mathematical discussion – they must learn to speak inquiry math”* (Richards, 1991, s. 17).

Det foregående tydeliggør at undersøgelserbaseret undervisning ofte hænger sammen med en dialogorienteret undervisning. Hvordan når man som lærer derhen? Det er tydeligt at dialogen ikke bare følger automatisk når man bringer en undersøgende matematisk aktivitet i spil. Selvom en dialog er karakteriseret ved at være uforudsigelig og risikofyldt, bør matematiklæreren i forberedelsen til undervisningen gøre sig overvejelser om relevante spørgsmål. John Richards pointerer at lærerne i

deres forberedelse bør opstille relevante mål og spørgsmål der kan bringes ind i den matematiske samtale for at udfordre elevernes forståelser (Richards, 1991). Læreren forberedte spørgsmål kan aktiveres i forbindelse med den konkrete undervisningssituation hvis vedkommende ser et didaktisk potentiale ved at anspore eleverne i forbindelse med et bestemt aspekt.

Modeller og undersøgende læringsmiljøer

Den undersøgende samtale bliver katalysatoren for processen hvor man bevæger sig fra det intuitive over det refleksive til det formelle (jf. fig. 2). Intentionen med udviklingsarbejdet har været at udvikle redskaber som de lærerstuderende kan anvende i arbejdet med at tilrettelægge og gennemføre en undersøgelsesbaseret matematikundervisning. Ved at anvende en model for opmærksomhedsfelter, et metodeark og en iagttagelsesmodel bliver den lærerstuderende bevidst om sit didaktiske fokus, om sin rolle og om mulige tiltag.

Inspireret af Katie Makars arbejde med undersøgende matematiske aktiviteter (Makar, 2012) har vi udviklet en model der udpeger centrale opmærksomhedsfelter.

De lærerstuderendes tilbagemelding efter praktikperioder har tydeliggjort at de mødte elever der havde svært ved at håndtere den åbne tilgang i den undersøgelsesbaserede matematikundervisning. Det havde en afsmittende effekt på deres egen undervisning hvor de søgte tilbage mod de mere trygge rammer inden for opgavediskursen og den instrumentelle tilgang (jf. Skemp). Der er ikke tale om et enkeltstående fænomen (Folke Larsen, Hein & Wedege, 2006). Der er med andre ord identificeret en didaktisk udfordring knyttet til at komme i gang med en undersøgelsesbaseret matematikundervisning. Det kan blandt andet handle om hvordan man sætter scenen for elevernes arbejde, og at undersøgelsesbaseret undervisning må være nøje tilrettelagt i forhold til undervisnings- og læringsmål, rammerne for elevernes arbejde, dialogen med eleverne undervejs og den fælles opsamling af erfaring og resultater. Lærerstuderende fra Haderslev har anvendt figur 3 i forbindelse med deres praktikundervisning. Nogle studerende har forklaret at modellen var med til at kvalificere deres didaktiske overvejelser samt gøre dem i stand til at håndtere elevernes spørgsmål i undersøgende læringsmiljøer. Med afsæt i modellen havde de forberedt spørgsmål der kunne aktiveres i den konkrete undervisningssituation.

Gennem projektet er vi blevet opmærksomme på at en del praktiserende matematiklærere er stødt ind i lignende udfordringer når de har forsøgt sig med undersøgelsesbaseret undervisning. Det fører til en interesse for hvorledes den usikre, men interesserede lærer kan tilgå den undersøgende dimension i undervisningen. Det kan hurtigt blive problematisk hvis læreren springer ud i en undersøgende undervisning og mislykkes med det. Derfor begyndte vi at overveje hvorledes lærere og lærerstuderende kunne arbejde med undersøgende tilgange i en form for progression fra lærerstyrede

Faser	Lærerens didaktiske fokus	Lærerens rolle i denne fase bliver at ...	Læreren kan i denne fase arbejde med tiltag, såsom ...
Opdage/ udfordre	Overdragelse af udfordringen til eleverne.	Iscenesætte en aktivitet eller et emne der fanger elevernes opmærksomhed og interesse. Med udgangspunkt i iscenesættelsen skal eleverne kunne etablere relationer mellem aktivitetens mere generelle karakter og mulige matematiske elementer.	At have blik for situationer som rummer interessante matematiske aspekter. Opstille eksplicite undervisningsmål. Overveje hvilke elementer eleverne muligvis kunne finde på at inddrage.
Planlægge/ matematisere	Formidling og afstemning af intentioner i læreprocessen.	Vejlede elever i deres arbejde med at matematisere et problem, opstille hypoteser og planlægge et undersøgelsesdesign.	Sammen med elevgrupperne opstille læringsmål og udpege elementer som de synes er interessante. Få eleverne til at ekspliciteres deres hypoteser på en sådan måde at de kan vende tilbage til dem.
Undersøge	Elevernes behov for stilladsering. Se læringspotentialer i elevudsagn m.m.	Understøtte eleverne i deres undersøgelse ved at hjælpe dem med at systematisere deres undersøgelser. Hjælpe eleverne med at revidere deres planer.	Fremkomme med spørgsmål der kan hjælpe eleverne med at systematisere deres undersøgelse. Opfordre til at benytte forskellige matematiske repræsentationer. Være formidler i forhold til et specifikt matematisk begreb som eleverne eventuelt støder på. Få eleverne til at ekspliciteres deres viden ved at opfordre til at dokumentere arbejdsprocessen.
Pointer	Sikre en almen-gørelse.	Give eleverne mulighed for at formulere konklusioner og gå i dialog med andre om deres resultater samt sikre at der sker en almen-gørelse af væsentlige pointer.	Stille spørgsmål til elevernes arbejde med at verificere/falsificere. Gentage matematiske pointer som eleverne fremkommer med. Koble elevernes opdagelser til den oprindelige situation, fx ved at inddrage undervisningsmål og læringsmål.

Figur 3. Model for opmærksomhedsfelter.

undersøgelser hen mod friere rammer for elevernes undersøgende aktiviteter. Her blev koblingen til naturfag interessant idet der siden 1960'erne har været beskrevet forskellige niveauer af en undersøgende tilgang (Bell, Smetana, & Binns, 2005). *“We’ve found a four-level continuum – confirmation, structured, guided, open – to be useful in classifying the levels of inquiry in an activity”* (Banchi & Bell, 2008).

Vi mener at der også i undersøgende matematikundervisning er tale om et kontinuum hvor den lærerstyrede undervisning efterhånden afløses af elevstyrede aktiviteter – fra den bekræftende undersøgelse over strukturerede og guidede til den åbne undersøgelse.

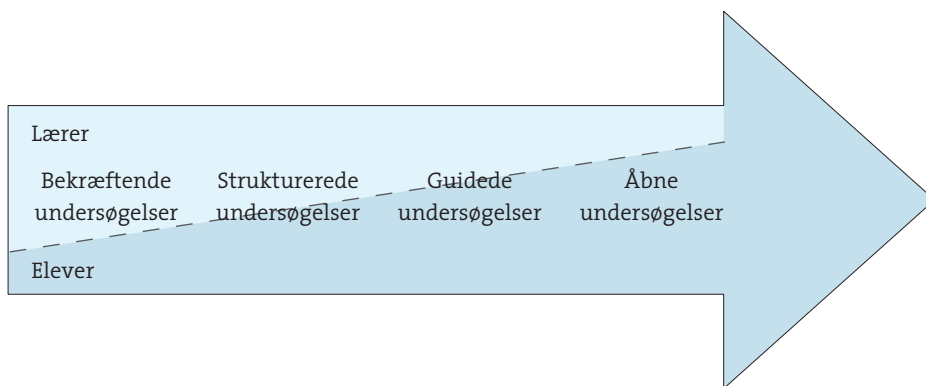
Bekræftende undersøgelser er karakteriseret ved et undersøgende element der er bundet op på lærerens forestillinger om læringsudbyttet. Opmærksomheden bør rettes mod at stille spørgsmål til elevernes opdagelser, få dem til at fremkomme med matematiske forklaringer samt anspore eleverne til selv at stille yderligere spørgsmål.

Der er tale om få frihedsgrader.

I strukturerede undersøgelser fremkommer læreren fortsat med spørgsmål og fremgangsmåder, men nu skal eleverne ikke bare stille spørgsmål, men de skal selv udvikle forklaringsmodeller der understøttes af erfaringer som de har gjort i undersøgelsen.

Hvor de to foregående undersøgelsesformer kun berører elementer af den cykliske model for undersøgende tilgange til matematik, bringer guidede undersøgelser hele den cykliske model i spil. Her skal eleverne arbejde ud fra et lærerstillet spørgsmål, men de skal selv foretage valg med hensyn til undersøgelsesdesignet. Dette kan faciliteres ved at læreren skaber en iscenesættelse for undervisningen. På den måde skabes rum for elevernes intuitive slutninger (jf. Wittmann, fig. 2).

Ved åbne undersøgelser gennemløber eleverne den cykliske model hvor de selv stiller spørgsmålene og planlægger og gennemfører en undersøgelse som de forholder sig reflekterende til. Eleverne er i et undersøgelseslandskab (jf. Skovsmose).



Figur 4. Forholdet mellem lærer- og elevstyring i undersøgende forløb.

Figur 4 søger at indfange den glidende overgang mellem de forskellige undersøgelsesformer og prøver at visualisere at lærer- og elevrollerne ændres i takt med frihedsgraderne i undersøgelsen. For en matematiklærer der ofte tilrettelægger undervisningen med afsæt i lærebogen, kan de åbne undersøgelser virke afskrækkende. Her tydeliggør modellen at der også er potentialer ved at arbejde med mere lærerstyrede undersøgelser. Eleverne får erfaringer med aspekter ved en undersøgende matema-

<p>Hvad ved vi? Fortæl hinanden hvad aktiviteten handler om.</p>	
<p>Hypotese Kan I se noget matematik i aktiviteten? Hvad tror I der vil ske? Kom med et bud/gæt.</p>	
<p>Plan Lav en plan for hvordan I vil undersøge om jeres bud/gæt er rigtigt. Overvej/skriv hvad I allerede ved. Hvad vil I gerne vide?</p>	
<p>Undersøge I forbindelse med jeres undersøgelse skal I beslutte hvordan I vil huske jeres resultater.</p>	
<p>Undersøgelse</p>	
<p>Dokumentere I kan fx skrive ting ned, tage eller tegne billeder, lave tabeller ...</p>	
<p>Sammenligne Hvad fandt I frem til? Hænger det sammen med jeres bud/gæt fra starten? Hvis ja, var I så bare heldige i starten, eller ...? Hvis nej, kan I så forklare hvor jeres bud/gæt ikke var helt rigtigt?</p>	
<p>Præsentere Hvordan vil I forklare andre hvad I har fundet ud af? Hvad er vigtigt at de andre i klassen får at vide fra jeres undersøgelse?</p>	

Figur 5. Metodeark.

tikundervisning, erfaringer der kan føre til friere undersøgelser hvor eleverne mere og mere tager ansvaret for undersøgelsesdesignet. Med andre ord: Man kan godt arbejde med undersøgende elementer gennem lærerstyret undervisning, men det er vigtigt at undervisningen tilgodeser flere aspekter fra den cykliske model.

Som tidligere beskrevet kan figur 3 bidrage med en række opmærksomhedsfelter i forbindelse med planlægningen af en undersøgende matematikundervisning. Modellen er tænkt som et planlægningsværktøj for læreren. I tillæg hertil udviklede vi et metodeark som den studerende kan bruge til at støtte eleverne i det undersøgende læringsmiljø. Arket er ikke tænkt som et mekanisk redskab hvor eleverne bare udfylder de forskellige felter. Idéen er at læreren og eleverne ved hjælp af arket kan beskrive faserne i et undersøgende forløb.

Undersøgelsesbaseret undervisning foregår ofte i grupper. Når eleverne ekspliciterer deres forståelser i ovenstående ark, får læreren et udgangspunkt for den undersøgende samtale. Læreren kan spørge ind til matematiske aspekter der tager afsæt i elevudsagn (jf. afsnittet om den undersøgende samtale).

Modellen for opmærksomhedsfelter og metodearket kan være en støtte for læreren i forberedelsesfasen og i undervisningssituationen. Men spørgsmålet er hvordan vi hjælper den lærerstuderende med at blive en "refleksiv praktiker"? Her kommer vurderingspilene i modellen på figur 2 i spil. I den forbindelse har vi udviklet en iagttagelsesmodel hvor medstuderende kan bruge deres iagttagelser til at tilpasse/ændre undervisningen (se bilag 1). Her har vi stillet didaktiske spørgsmål taksonomisk op i et forsøg på at hjælpe den studerende med at blive bevidst om hvad der skal til for at kunne tilrettelægge og gennemføre undersøgelsesbaseret matematikundervisning.

I den sammenhæng har vi lagt vægt på at følgende fire aspekter indgik i læringsmiljøet/undervisningen før vi ville kalde det for undersøgelsesbaseret undervisning:

- *Isenesættelse* af den undersøgende virksomhed som rammesætter aktiviteten ved at virke motiverende og eventuelt målbeskrivende.
- *Eksperimenter med* og/eller undersøgelser af fænomenet.
- Der indgår vidensprodukter i forbindelse med *kommunikative handlinger* om hvad elever/studerende har erfaret gennem forløbet (fx logbøger fra de studerendes praktik, præsentationer af undersøgende aktiviteter, videooptagelser af undersøgende læringsituationer og udarbejdelse af hjemmesider til undersøgende udematematik).
- Der anvendes *en stilladseringstilgang* hvor eleverne/studerende får mulighed for at gøre sig erfaringer og refleksioner gennem anvendelse af systematiske iagttagelser som de uden metodearket (fig. 5) ville have svært ved (van Joolingen & Zacharia, 2009).

Afprøvning af undersøgende matematikundervisning i læreruddannelsen

Struktureret undersøgelse

Et eksempel på en struktureret undersøgelse kan være en undersøgelse af stregkoder. Stregkoder er et kendt fænomen fra dagligdagen som rummer bestemte karakteristika. Iscenesættelsen kunne være Fakta-reklamen hvor ekspedienten sidder og læser højt: "Tynd, tynd, tyk – mellemtynd ..." Dette fører frem til et lærerstillet spørgsmål som kunne være: *Hvad består en stregkode egentlig af? Og hvordan er den opbygget?*

Forløbet er afprøvet i læreruddannelsens matematikundervisning¹. De studerende får udleveret en række stregkoder hvorefter de i grupper går i gang med at undersøge dem. Typiske opdagelser vil være stregernes længde og tykkelse, opdelingen på midten og specielle tal som går igen. Fx konstaterede en studerende at de alle var opdelt i to områder. En anden begyndte at tælle antallet af streger i de forskellige koder, og en udbryder: "Der er altid 13 cifre, og alle begynder med 5" – en begyndende erkendelse af systemet i koderne.

Gennem dette arbejde får underviseren dem til at dokumentere deres opdagelser i metodearket med henblik på det videre forløb. Nogle studerende får formuleret nogle hypoteser på baggrund af deres undersøgelse (jf. "Teori" om verden, fig. 2).

Med afsæt i deres opdagelser styres undervisningen hen mod sammenhængen mellem tal og streger. Underviseren introducerer de studerende for metoden til at afkode cifre til streger og omvendt ved at udlevere afkodningstavler. Nu bliver de stillet over for spørgsmålet: *Er der altid en kobling mellem stregerne og cifrene – og kan vi ud fra det ene komme til det andet?* Igen skal de studerende undersøge stregkoderne på baggrund af en given fremgangsmåde hvor de skal dokumentere deres opdagelser.

Eksemplet skitserer et undersøgende forløb hvor lærerstuderende får mulighed for at arbejde på en struktureret måde med et specifikt begreb. Som ved den bekræftende undersøgelse kan denne tilgang anvendes til at gøre de lærende trygge ved undersøgende arbejdsformer i en fastsat ramme. Ved at rette opmærksomheden mod elementer fra den cykliske model vil de blive vænnet til at inddrage disse i deres matematiske løsningsprocesser. Dermed banes vejen for en mere åben undersøgende tilgang til matematiske begreber og idéer (jf. fig. 4).

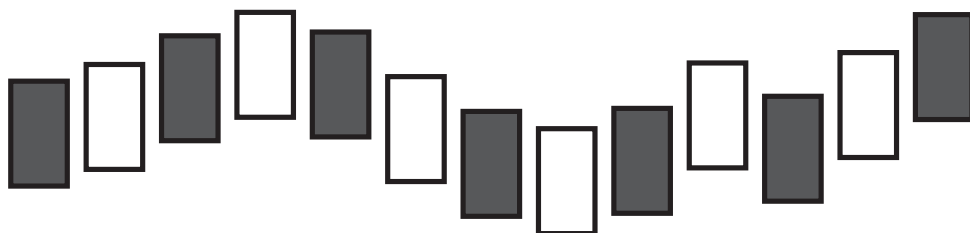
1 Forløb rettet mod folkeskolen kan findes på www.emu.dk/elever7-10/fag/mat/stregkoder.html.

Guidet undersøgelse

Et eksempel på et lille guidet undersøgelsesforløb fra naturvidenskabsfestivalen hvor de lærerstuderende fik elever fra 5. klasse til at spille. Det vil sige at iscenesættelsen var en spilsituation hvor det drejede sig om at vinde.

Spilbeskrivelsen var som følger:

På gulvet ligger en sti af 13 stykker papir: syv sorte og seks hvide.



Figur 6. "Spilleplade".

I hver ende står en elev. På skift går de et eller to skridt frem. På et tidspunkt vil de mødes stående på hvert sit papir. Den der står på et sort papir, har vundet.

Læreren sikrer sig at reglerne for spillet er forstået, sætter spillet i gang og kontrollerer at der spilles efter reglerne. For at sikre at eleverne kom omkring processerne i den undersøgende tilgang (se fig. 1), var eleverne delt i to hold hvor én elev fra hvert hold skulle kæmpe mod hinanden. Men efter hvert forsøg var der rådslagning på holdet. På den måde kom diskussions- og kommunikationsfaserne virkelig i spil. Hvordan var det gået? Hvilken strategi havde han brugt? Hvornår kunne man se at han ville vinde/tabbe? Dokumenteringen kom helt af sig selv, for de skulle jo huske de forskellige "åbninger".

A: "Når jeg står på en sort, og der er fire felter tilbage, så skal jeg gå et skridt frem. Så vinder jeg altid."

B: "Hvordan det?"

A forklarede derefter sin strategi – og læreren opfordrede til nye undersøgelser.

L: "Hvad nu hvis der var 17 stykker papir?"

Stilladsering fra lærerens side kunne også være at lægge op til at se på de to sidste skridt fra begge deltagere hvis eleverne ikke af sig selv kom ind på en mere systematisk analyse af "slutspillet". Hvis eleverne havde et bud på en vinderstrategi, kunne

lærerens rolle være at komme med modspørgsmål (jf. afsnittet om den undersøgende samtale).

Den ovenstående beskrivelse af en guidet undersøgelse har forhåbentlig været medvirkende til at tydeliggøre at selvom eleverne får en større grad af frihed til at designe deres egen læreproces, har læreren ikke en passiv rolle. Men den går fra at være formidlende/styrende til at være vejledende/faciliterende. Det er via vejledningen at læreren med udgangspunkt i elevernes forslag (hypoteser) kan guide eleverne i deres arbejde med at verificere/falsificere deres hypoteser (jf. vurderingspillene i fig. 2).

I forbindelse med matematikundervisningen ved læreruddannelsen i Haderslev er der arbejdet med forskellige undersøgende tilgange.

	Bekræftende	Strukturerede	Guidede	Åbne
Geometriske undersøgelser (GeoGebra)	Vinkelsummen i en trekant	Halvering af figurer	Midtpunkter i bevægelse	Spirograf (cykloider)
Stokastiske eksperimenter	Kast med to terninger	Udforskning af terningen i 1. klasse	BM's andespil	Kan du smage forskel (hvor gode er jeres sanser)?
Talundersøgelser	Sammenhænge	Får og gæs	De få farver	Hvad koster jeg?

Tabel 1. Skematisk oversigt over andre forløb fra projektet².

Observationer fra arbejdet med undersøgende forløb i læreruddannelsen

Som tidligere anført er den åbne undersøgelse ikke uproblematisk. Den fordrer at eleverne er vant til at arbejde undersøgende. Men vores tese er at hvis eleverne gennem de andre undersøgelsesformer bliver vænnet til at agere inden for en undersøgende ramme, vil de også kunne håndtere denne frihed. Spillet med de 17 stykker papir kunne være en indgangsvinkel til en større åben undersøgelse hvor eleverne selv vælger aspekter de vil gå ind og undersøge. Igen bliver lærerens rolle central da eleverne vil møde en række udfordringer i forhold til deres hypotesedannelse, undersøgelsesdesign m.m. Her skal læreren vejlede dem i forhold til deres intentioner hvilket kræver overblik som metodearket (fig. 5) kan bidrage til.

² Kortfattede beskrivelser kan ses på <https://sites.google.com/site/inqhaderslev/>.

Arbejdet har tydeliggjort at når man vil introducere undersøgende tilgange i matematikundervisningen i en klasse, kan det være en god idé at man indtænker en form for progression. I stedet for at kaste eleverne ud i den åbne undersøgelse, begynder man med et velplanlagt forløb hvor eleverne stifter bekendtskab med elementerne i den cykliske model. Det kan være aktiviteter såsom undersøgelse af stregkoder. Samtidig er det væsentligt at betone at hensigten med undersøgende undervisningsformer ikke er at eleverne når et stadie hvor de kun anvender den åbne tilgang til undersøgelser. Det kan med fordel inddrages i undervisningen, men andre undervisningsformer har ligeledes en relevant rolle for elevernes udvikling af matematiske kompetencer. Metoden er en af mange der med fordel kan anvendes i en varieret matematikundervisning. Der er ikke tale om "den eneste" eller "den bedste" metode.

I den undersøgende virksomhed får eleverne mulighed for at påtage sig et ansvar for egen læring da de bliver medbestemmende og initiativtagende i forhold til de elementer der inddrages i forbindelse med at undersøge, eksperimentere og indsamle data. Den undersøgende tilgang fordrer at eleverne danner ny forståelse ved at tage afsæt i deres erfaringer og skabe forbindelser til deres allerede etablerede forståelser af matematiske begreber. Dermed ikke sagt at enhver undersøgelse skal tage udgangspunkt i hvad der interesserer eleverne. Det er ikke tilfældet. Den undersøgelsesbaserede undervisning bør relateres til de officielle beskrivelser for matematikfaget. Her kan læreren som tidligere beskrevet med fordel rammesætte aktiviteterne i en form for struktureret undersøgelse som ved undersøgelsen af stregkoder. Hermed også antydning at man skal være opmærksom på at der ikke opstår en form for dikotomi mellem proces og indhold (Cobb & McClain, 2006).

Den cykliske model er en idealmode for et undersøgende forløb. I praksis vil man ofte komme ud for at elevernes læreproces ikke vil følge den cykliske model, men i stedet kommer omkring mange af de forskellige faser i en form for iterativ proces. Fx kan eleverne vende tilbage til hypotesefasen eller afprøvningsfasen midt i forløbet (de Jong, 2006).

Perspektivering

Projektet har tydeliggjort at lærerstuderende kan hjælpes med at udvikle et undersøgende blik i matematikundervisning. Erfaringerne fra læreruddannelsen i Haderslev er at de beskrevne modeller kan hjælpe de lærerstuderende med at etablere en reflekterende tilgang til undersøgelsesbaseret matematikundervisning. Ofte er dette sket i kontekster hvor der har været flere studerende til at planlægge og observere praksis. Men vi må også konkludere at implementering af en undersøgelsesbaseret matematikundervisning rummer en række udfordringer. Selvom undersøgelsesbaseret matematikundervisning er på den politiske dagsorden, er den ikke nødvendigvis

på lærernes. Derfor skal der etableres muligheder for at matematiklærerne kan gøre erfaringer med og blive interesserede i undersøgende læringsmiljøer. Metoden skal forankres i deres daglige undervisningspraksis. Her kan det være en hjælp at tænke i den glidende overgang mellem de forskellige undersøgelsesformer hvor lærerens undervisningspraksis langsomt, men sikkert ændres til et mere åbent læringsmiljø. I vores optik er stilladseringen af læreren i denne proces ofte blevet negligeret. Derfor har vi udviklet modeller der er tænkt som en form for støttende stillads for den lidt usikre matematiklærer udi undersøgelsesbaseret matematikundervisning. Det er først når modellerne er internaliseret at det bliver naturligt for læreren at arbejde undersøgende.

Referencer

- Alrø, H. & Skovsmose, O. (2005). *Undersøgende samarbejde i matematikundervisningen – udvikling af IC-Modellen*. Aalborg: Institut for Uddannelse, Læring og Filosofi, Aalborg Universitet.
- Banchi, H. & Bell, R. (October 2008). The Many Levels of Inquiry. *Science and Children*, s. 26-29.
- Bell, R.L., Smetana, L. & Binns, I. (oktober 2005). Simplifying Inquiry Instruction. *The Science Teacher*, s. 30-33.
- Blomhøj, M. (2003). Modellering som undervisningsform. I: M. Blomhøj & O. Skovsmose, *Kan det virkelig passe?* København.
- Cobb, P. & McClain, K. (2006). Guiding Inquiry-Based Math Learning. I: K. Sawyer (red.), *Cambridge Handbook in the Learning Sciences* (s. 171-186). New York: Cambridge University Press.
- Danmarks Evalueringsinstitut. (2012). *Fælles Mål. En undersøgelse af lærernes brug af Fælles Mål*. Danmarks Evalueringsinstitut.
- Danmarks Evalueringsinstitut. (2006). *Matematik på grundskolens mellemtrin – Skolernes arbejde med at udvikle elevernes matematikkompetencer*. Danmarks Evalueringsinstitut.
- De Jong, T. (2006). Scaffolds for Computer Simulation Based Scientific Discovery Learning. I: J. Elen & R.E. Clark, *Handling Complexity in Learning Environments: Theory and Research* (s. 107-128). London: Elsevier Science Publishers.
- Folke Larsen, A., Hein, M. & Wedege, T. (2006). Undersøgende læringsmiljø i matematik. *MONA*, (4), s.13f.
- Grørdum, R., Hallandvik, M.-A., Kjellingland, E., Klungland, L.T. & Mørelrø, L. (2010). "Æ har to matter hjemme". *Tangenten*, (4), s. 21-25.
- Hargreaves, A. (2000). *Nye lærere, nye tider – lærerarbejde og lærerkultur i en postmoderne tid*. Forlaget Klim.
- Højgaard Jensen, T. (2007). *Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt – hvorfor ikke?* IMFUFA-tekst nr. 458.
- Lauvås, G.H. (2002). *På egne vilkår – en strategi for vejledning med lærere*. Aarhus: Klim.

- Makar, K. (2012). The Pedagogy of Mathematics Inquiry. I: R. Gillies (red.), *Pedagogy: New Developments in the Learning Sciences* (s. 371-397). Hauppauge, USA: Nova Science Publishers.
- Michelsen, C. (2011). IBSME – Inquiry-Based Science and Mathematics Education. *MONA* (3), s.72-77.
- Mogensen, A. (2011). *Point-Driven Mathematics Teaching. Studying and Intervening in Danish Classrooms*.
- Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.
- PRIMAS. (21. oktober 2012). Hentet fra PRIMAS: www.primas-project.eu.
- PRIMAS-team. (18. oktober 2012). *What Exactly Does Inquiry-Based Learning Mean?* Hentet fra www.primas-project.eu: www.primas-project.eu/artikel/en/1302/What+exactly+does+inquiry-based+learning+mean/view.do?lang=en.
- Richards, J. (1991). Mathematical Discussions. I: E. v. Glasersfeld (red.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (s. 13-51). New York, Boston, Dordrecht, London, Moskva: Kluwer Academic Publishers.
- Skemp, R.R. (1979). Goals of Learning and Qualities of Understanding. *Mathematics Teaching*, 88, s. 44-49.
- Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, s. 20-26.
- Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I: M. Blomhøj & O. Skovsmose, *Kan det virkelig passe?* København.
- Undervisningsministeriet. (2003). *Fælles Mål – Matematik*. København: Undervisningsministeriet.
- Undervisningsministeriet. (2009). *Fælles Mål 2009 – Matematik*. København: Undervisningsministeriet.
- Undervisningsministeriet. (2001). *Klare Mål – Matematik*. København: Undervisningsministeriet.
- Undervisningsministeriet. (1995). *Matematik*. København: Undervisningsministeriet.
- Undervisningsministeriet. (1976). *Regning/matematik*. København: Undervisningsministeriet.
- Van Joolingen, W.R. & Zacharia, Z.C. (2009). Developments in Inquiry Learning. I: N. Balacheff, S. Ludvigsen, T. de Jong, A. Lazonder & S. Barnes, *Technology-Enhanced Learning* (s. 21-37). Springer.
- Wittmann, E. (Aug. 1981). The Complementary Roles of Intuitive and Reflective Thinking in Mathematics Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), s. 389-397.

Iagttagelser i forbindelse med undersøgende matematikundervisning	Faglige aspekter (emne)	Matematiske arbejdsmåder	Matematiske kompetencer	Elevens almene udvikling
Hvad laver eleven?	Viser eleven initiativ ved at gå i gang med aktiviteten (ser det ud til at de har forstået hvad de skal, eller er de afventende på lærerens instruktioner)?	Opstiller eleven læringsmål for arbejdet?	Identificerer, samler, vurderer og anvender eleven information, teknologi og andre ressourcer (fx konkrete materialer) til arbejdet med aktiviteten?	Tager eleven ansvar for aktiviteten? Accepterer eleven forskellige roller og fordeler arbejdsopgaver?
Hvad siger eleven?	Taler eleverne om emnet så de signalerer en forståelse for det aktuelle emne/aktivitet?	Forsøger eleven at sætte sig ind i de andre elevers forslag til at undersøge og systematisere ved at spørge ind til andres ud-sagn?	Indgår eleven i dialog med andre elever? Anvender eleven forskellige repræsentationer m.m. til at udtrykke sig om matematiske elementer?	Fremkommer eleven med tilkendegivelser (pos./neg.)? Deler eleverne informationer og ressourcer, og udfordrer de hinandens tænkning?
Hvad oplever eleven (fortolkning af elevens ageren i lyset af de ovenstående aspekter)?	Oplever eleven matematiske pointer?	Bruger eleven matematiske arbejdsmåder?	Oplever eleven kompetencer?	Oplever eleven flow i arbejdsprocessen?
Er eleven bevidst om sin oplevelse (metakognition)?	Bliver eleven bevidst om de matematiske pointer?	Bliver eleven bevidst om hvornår man kan benytte de forskellige tilgange/arbejdsmåder?	Bliver eleven bevidst om rækkevidden af sine kompetencer?	Bliver eleven bevidst om faktorer der fremmer flow (herunder "læringsstile")?

Bilag 1. Iagttagelsesmodel

Engelsk abstract

Inquiry-based mathematics education is a well known method of teaching in the subject of mathematics. This article is based on the challenges that teachers and student teachers face trying to incorporate the method in their teaching. The article outlines the method, focusing on what could discourage teachers / student teachers in practicing an inquiry-based approach to mathematics in their classroom. Furthermore this article develops a series of scaffolding tools, which can support a process in which teachers / student teachers can move from teacher-led instructions to a student-directed problem- and inquiry-based education.