

# Når pointer styrer matematikundervisning



Arne Mogensen,  
Læreruddannelsen i Århus,  
VIA University College

**Abstract:** *Har danske matematiklærere en "pointe"? I artiklen undersøges og defineres begrebet en matematisk pointe, og der rapporteres fra et forskningsprojekt i hvilket omfang danske matematiklærere i folkeskolen fremhæver sådanne punkter i deres undervisning. Således er 50 tilfældigt udvalgte matematiklærere filmet i en 8.-klasses-matematiklektion, og dialogen undersøgt. Undersøgelsen identificerer store variationer og mange indflydelsesrige komponenter. Der er plads til forbedringer.*

## Det kigger vi på

Forskere og undervisere der søger evidens for mål- eller pointestyring i undervisning, kan hente data gennem videooptagelser. Og det er blevet meget almindeligt. Men som påpeget af Staub, så varierer de metoder der anvendes ved identifikation af rutiner og mønstre i en klasserumskultur, meget. Han stiller bl.a. dette grundlæggende metodiske spørgsmål:

*Based on what unit of analysis are the video recordings of teaching to be analyzed (whole lesson, episodes or sequences of lessons)?* (Staub, 2007, s. 320)

I TIMSS Video Study (TIMSS Videotape Classroom Study, 1999; Stigler & Hiebert, 1999), hvor et stort antal klasseværelser (50-100) blev tilfældigt udvalgt som nationalt repræsentative, blev der i analysen af én lektion pr. skole identificeret såkaldte nationale "scripts" for matematikundervisning. Tyske, japanske og amerikanske lærere viste sig at have nationale karakteristika når de blev observeret "udefra". Det senere TIMSS-R Video Study (Teaching Mathematics in Seven Countries, 2003) nuancerede dog til en vis grad denne opfattelse af nationale "scripts".

The Learners Perspective Study, LPS (Clarke, Keitel & Shimizu, 2006), er en anden international undersøgelse. Her var tre dygtige matematiklærere (efter lokal afgørelse) udvalgt i hvert land, og disse læreres undervisning blev så videofilmert i ti på hinanden

følgende lektioner. Fx blev det undersøgt i hvilket omfang den enkelte lærer varierer sin pædagogiske tilgang i et undervisningsforløb (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006). LPS' data er siden analyseret for mange tværnationale karakteristika (Clarke, 2004; Clarke & Xu, 2008).

I det danske projekt Point-Driven Mathematics Teaching var hensigten at beskrive omfang og art af matematiske pointer i 8.-klassers matematikundervisning. Derfor blev der foretaget en omhyggelig stratificering<sup>1</sup> af 50 skoler og klasser, og én lektion derpå valgt som enhed for analyse. Før de efterfølgende interventionsstudier blev syv af de 50 lærere særligt interviewet for en mere grundig analyse af læreres motiver, valg og handlinger (Mogensen, 2011).

## Og hvorfor så det?

I Danmark anbefalede udvalget til forberedelse af en handlingsplan for matematik i folkeskolen at:

*Det er de overordnede faglige mål, målene for de enkelte undervisningsforløb samt de didaktiske pointer læreren fokuserer på, der skal være styrende for planlægningen. Ved en didaktisk pointe for et forløb forstår vi det klimaks i form af en tilspidset indsigt ("aha-oplevelse") i et fagligt begreb eller resultat, en faglig metode eller teknik, i sammenhængen mellem forskellige begreber eller emner m.v. som tilstræbes ved afslutningen af forløbet (Niss et al., 2006, s. 28)*

I et forskningsprojekt afsluttet med en ph.d.-afhandling (Mogensen, 2011) satte jeg mig bl.a. for at undersøge i hvilket omfang og hvordan danske lærere fremhæver sådanne pointer i matematikundervisning.

## Pointe – hverdagsudtryk og didaktisk begreb

Ordet "pointe" har synonymmer som: essens og sagens kerne. Det indgår i sammensatte ord som: hovedpointe og pointestyret. Og det bruges i kollokationer som: en væsentlig pointe, at forstå pointen, at glemme sin pointe eller at komme til pointen. Ifølge Ordbog over det Danske Sprog kan pointe være en "tilspidset" afslutning eller et kernepunkt:

1 Skolerne var tilfældigt valgt blandt alle kommunale skoler med 8. klasse i 41 af de 96 danske kommuner. I de fire største byer blev 2-5 skoler udvalgt – ellers kun 1 skole pr. kommune. Hvis en skole afslog at deltage, blev den næste af kommunens skoler i en alfabetisk sorteret liste spurgt. På hver skole var det matematiklæreren i 8A (eller den første alfabetisk lignende) der var valgt. Skoler der ikke kunne møde dette kriterium, blev fravalgt, bortset fra meget få tilfælde hvor skolelederen kunne garantere vilkårlighed.

**Pointe**, en. flt. -r. (fra fr. *pointe*, egl.: *spids*, af lat. *puncta*, til *pungere*, *stikke*; jf. *Point*, *pointere(t)*) **vittig(t)**, **satirisk**, **bidende indfald**, **bemærkning**; **brod** (I.4.3); *spec. om en elegant, "tilspidset" afslutning paa et epigram, en anekdote oln.*; nu ogs. (ved sammenblanding m. *Point* 3) om **kernepunktet**, "**det springende punkt**" i en fremstilling (en vittighed) ell. en sag. (<http://ordnet.dk/ods/ordbog?query=pointe>)

I udtryk som "Get to the point" eller "Jeg forstod ikke hendes pointe!" forstås pointer også som afgørende for mundtlig, interpersonel kommunikation. I mange sammenhænge er pointen en afsluttende overraskelse, en konklusion, en morale eller en løsning.

I matematikundervisning afspejler det oprindelsen af ordet "point" hvis pointen er en "udpeget" eller formuleret indsigt i et centralt emne i en matematisk tekst eller proces.

Hvis ikke det *endelige* formål med en redegørelse eller en aktivitet er at høre, se eller opleve pointen, kan det være et afgørende sted undervejs, et nødvendigt "mellemresultat". Fokuspunkter – eller altså pointer – kan være relevante mellemstationer for det hverv der (skal kunne) udføres, eller den indsigt der (skal kunne) erhverves. Dette fokus er forudsætning for transport af registreret tænkning fra korttids- til langtidshukommelse og den fortsatte anvendelse:

*information that is heeded during performance of a task, is the information that is reportable, and the information that is reported is information that is heeded* (Ericsson & Simon, 1993, s. 167)

En forstået/erkendt pointe kan således støtte erindring og gentagelse af slutningskæder. Jeg har foreslået denne definition:

**En matematisk pointe er et udsagn, der udgør et klart afgrænset og betydende matematisk indhold eller resultat** (Mogensen, 2011, s. 60)

Fire slags matematiske pointer er identificeret som relevante og tilstrækkelige i forhold til den matematik der undervises i i folkeskolen: *begrebsmæssige*, *metodemæssige*, *resultater* og *fortolkninger*. Valget er baseret på vurdering af de matematiske kompetencer, arbejds måder og emner som aktuelt beskrives i faghæftet for matematik: Fælles Mål 2009. Det er fx almindelig vurdering og praksis at skelne mellem *conceptual* og *procedural knowledge* (Hiebert & Lefevre, 1986), og i det danske faghæfte har *Matematik i anvendelse* givet særlig status til beskrivelse og fortolkning. Men det har også været mit ønske at forenkles analysearbejdet ved at begrænse antallet af kategorier. Nogle definitioner og eksempler følger.

## Begrebspointer

Et matematisk begreb kan defineres som en abstrakt eller generisk idé generaliseret i en definition fra særlige tilfælde eller hændelser. Fx er både begreberne antal, funktion og sandsynlighed samt begreberne fem, en lineær funktion og et udfaldsrum mulige begrebsmæssige pointer når de defineres, beskrives eller anvendes. Nogle matematiske begreber er også overordnede i forhold til andre. Fx er antalsbegrebet vigtigere end tallet fem-begrebet på grund af generalitet. Andre sondringer kan være mellem matematiske aksiomer, objekter og strukturer eller begreber i mængde- og talteori versus begreber i geometri.

*Et matematisk begreb er en matematisk pointe* hvis det er væsentligt, dvs. hvis det har eller kan forventes at få betydning, og hvis det også er klart afgrænset i definition, gennem symboler eller anvendelser, hvad begrebet er, og hvad det ikke er. Begrebsnavne eller symboler må ikke forveksles med selve begreberne, men er nødvendige for at forstå og anvende dem. Symbol-, repræsentations- og formalismekompetence bliver derfor afgørende for håndtering af begreber, og det antyder flere niveauer af begrebsforståelse og -beherskelse.

## Metodepointer

En matematisk metode (procedure eller algoritme) kan defineres som en bestemt sekvens af trin, beslutninger, beregninger og/eller operationer som når de foregår i en bestemt rækkefølge, giver et matematisk produkt eller resultat. Med andre ord har en gennemført metode også et klart mål.

*En matematisk metode er en matematisk pointe* hvis den er væsentlig, dvs. har eller kan forventes at få betydning gennem mulig anvendelse, og når den klart anviser de trin der skal udføres for at anvende den.

Kompetencer i problembehandling, modellering, ræsonnement samt brug af forskellige former for værktøjer bliver afgørende når der indføres flere niveauer af metodemæssige færdigheder og beherskelse. Fx er fremgangsmåden i at vælge og beregne sæt af samhørende  $(x,y)$ -værdier for det grafiske billede af en lineær funktion et eksempel på en væsentlig matematisk metode, dvs. en metodepointe. Også når den demonstreres i et eksempel.

## Resultatpointer

Et matematisk resultat kan defineres som et resultat der fås ved en matematisk undersøgelse. Udledte formler og sætninger eller validering af en metode er eksempler på matematiske resultater. Kulminerende tankeprocesser, algoritmer og generelle, ikke simple beregninger betragtes altså som resultater.

*Et matematisk resultat er en matematisk pointe* hvis det er væsentligt pga. nødvendighed eller nytte i videre arbejde med matematik som en formel, en sætning eller en vigtig metode, og når dette resultat er klart beskrevet ved betingelser og kontekst.

Fx er formelen for arealet af en trekant og Pythagoras' sætning væsentlige matematiske resultater, dvs. resultatpointer, når de udvikles eller præsenteres i undervisning.

## Fortolkningspointer

En matematisk fortolkning kan defineres som tildeling af betydning til matematiske begreber, modeller eller parametre eller forklaring på et resultat. Fortolkningen kan suppleres med et godt eksempel, en anvendelse eller en sammenligning af repræsentationer.

*En fortolkning er en matematisk pointe* hvis den er væsentlig, dvs. har eller kan forventes at få betydning som en vigtig model, et vigtigt resultat eller en sammenligning af repræsentationer – og når den tydeligt kobles til en kontekst.

Kompetencer i matematisk tankegang og kommunikation bliver afgørende og angiver flere niveauer i arbejdet med fortolkning. Fx er sammenligningen af de to repræsentationer 1) det algebraiske udtryk  $y = ax + b$  og 2) den rette linje med hældning  $a$  og skæringspunktet  $(0, b)$  med  $y$ -aksen i et koordinatsystem en væsentlig matematisk fortolkning, dvs. en fortolkningspointe.

## Didaktiske pointer

Når en matematisk pointe forfølges eller præsenteres med hensigt i planlægning og udførelse af matematikundervisning, bliver den en didaktisk idé uafhængigt af om den var eksplicit på dagsordenen, og om den formuleres af lærer eller elever.

Pointestyret eller pointedrevet undervisning bliver således forløb hvor undervisningen ledes af og mod pointer der forhåbentlig også forstås og formuleres af elever. Pointer kan her indramme og styre undervisningens mål, indhold, metode og organisation og repræsentere passende højdepunkter eller faser i en længere kæde af tanker eller forklaring mod løsning af et mere komplekst, eventuelt åbent problem.

I en pointedrevet undervisning bliver de matematiske pointer altså didaktiske.

Denne forståelse er forskellig fra Sleep der definerer en matematisk pointe:

*to include the mathematical goals for an activity, as well as the connection between activity and its goals* (Sleep, 2009, s. 13)

og undervisning "to the mathematical point" som:

*being composed of three different types of work: articulating the mathematical point; orienting the instrumental activity; and steering the instruction toward the mathematical point* (Sleep, 2009, s. 175)

Sleep henviser til de to første former for arbejde som matematisk "purposing".

I min forståelse kan mål i matematiktimer også handle om elevers selvstændige arbejde eller vurdering og omfatter altså ikke altid artikulation eller læring af matematiske pointer.

Det er ikke indlysende at matematikundervisning drives med eller mod pointer. Shulman (Shulman, 1986) har i sin udvikling af begreberne *Content Knowledge*, *Pedagogical Content Knowledge* og *Curricular Knowledge* beskrevet hvad det bl.a. kommer an på. Også Ma understreger efter sin sammenligning af kinesiske og amerikanske lærere at det helt afhænger af lærerens egen matematikforståelse hvilke former for matematisk tænkning der *kan* finde sted i klasserummet (Ma, 1999, s. 153). Og når elever formulerer sig, så beskriver Franke, Kazemi & Battey *revoicing* som en af lærerens muligheder for at afklare eller styrke elevernes idéer. Lærere synes at kunne gøre det med respekt for elevernes idéer og samtidig tilføre retning og styrke ved at orkestrere den fælles samtale (Franke, Kazemi & Battey, 2007, s. 234).

## At kode pointer

Som allerede anført af Ericsson & Simon (Ericsson & Simon, 1993) kan verbalisering afspejle og også påvirke kognition. Derfor er både lærernes og elevernes artikulation af pointer registreret i det danske projekt. I analysen er disse data trianguleret med spørgeskemaer til matematiklæreren, undervisningsmaterialer og mine memoer for at øge validiteten af resultaterne.

Kodningens kategorier er inspireret af de allerede omtalte rammer der skelner mellem begrebsmæssig viden og metodisk viden (Hiebert & Lefevre, 1986) og mellem lærernes matematiske og undervisningsfaglige viden (Shulman, 1986; Stigler & Hiebert, 1999; Ma, 1999; Niss & Jensen, 2002; Krauss et al., 2008), og omfattende videostudier som:

TIMMS og

TIMSS-R: Læreres elicitation (lokkedialog), information, hints, supplement og svar (TIMSS Videotape Classroom Study, 1999; Teaching Mathematics in Seven Countries, 2003).

LPS: Læreres "matome" (opsummering), "kikan-shido" (mellem borde-instruktion) og mundtlighed (Shimizu, 2006; Clarke, 2004; Clarke & Xu, 2008).

LMT: Læreres fejl, upassende respons, rigdom, passende respons og matematisk sprog (Hill et al., 2008).

Matematiklektioner blev altså videofilmte i tilfældigt udvalgte 8.-klasser på kommunale skoler fordelt i hele Danmark. Hver videooptagelse blev suppleret med kopi af anvendt undervisningsmateriale fra lektionen. Desuden blev hver matematiklærer i et spørgeskema bedt om at give faktuelle oplysninger om sin læreruddannelse og erfaring og en kort beskrivelse af bl.a. målet for den registrerede lektion og de to tilstødende. Hertil kom et forskermemo med supplerende information og indtryk noteret umiddelbart efter hvert skolebesøg.

Sådanne data frembyder selvfølgelig kun et øjebliksbillede af matematikundervisningen i danske skoler i dag da hver lærer blev filmet i blot én lektion. Men 50 tilfældige lektioner er tilstrækkelig mange til en statistisk analyse, så materialet har også gjort det muligt at søge mønstre knyttet til lektioners struktur, læreres køn og anciennitet eller skolens størrelse.

Disse beskrivelser blev anvendt i kodningen af pointer:

Pointetype	Beskrivelse
<b>Begrebspointe</b>	En lærer eller en elev præsenterer og kommenterer et matematisk begreb med definition, symbol eller anvendelse.
<b>Metodepointe</b>	En lærer eller en elev præsenterer og kommenterer en regel eller en metode i en anvendelse eller et eksempel.
<b>Resultatpointe</b>	En lærer eller en elev udvikler eller præsenterer og kommenterer et matematisk resultat som en formel, en sætning eller en algoritme.
<b>Fortolkningspointe</b>	En lærer eller en elev fortolker en model eller et resultat eller sammenligner repræsentationer.

Fx er følgende dialog kodet med en begrebspointe:

### Eksempel på begrebspointe

Lærer: Mathilde?

Elev: Den der udregning der, kalder man den udregning af en ret linje eller hvad? Eller har den et specielt navn?

Lærer: Altså den her, som jeg skriver i tide og utide, den her  $f(x) = ax + b$  (skriver det på tavlen), det er FORMLEN for en ret linje.

Det er ligesom hvis du har formelen for, hvad brugte vi i sidste uge som eksempel? Formlen for en cirkel, eller hvad (viser omkredsen med hænderne). Hvis vi har diameteren gange pi. Den der formel, den kan vi ikke bruge til noget før vi ved hvad diameteren den er.

Den her formel (peger igen på  $f(x) = ax + b$ ), den kan vi heller ikke tegne en ret linje ud fra før vi ved hvad a og b er. Vi er nødt til at have a- og b-værdier for at kunne tegne den rette linje.

Andre koder blev anvendt til fx lærernes brug af lokkedialog (elicitering), hints, repetition og opsummering. Læreres værdier og overbevisninger er søgt afdækket i den kvalitative analyse af transskribering og andre data, men for en fyldig rapportering henvises til afhandlingen (Mogensén, 2011).

### Statistik fra 8.-klasserne

Undersøgelsen viste følgende:

I 44 % af lektionerne formulerede læreren pointer for hele klassen, dvs. at 56 % af lektionerne var uden blot én fælles lærerpointe!

I 30 % af lektionerne var der pointer fra læreren til enkeltelever eller grupper.

I 52 % af lektionerne var det elever der inviteret af læreren formulerede pointer, enten i en classesamtale eller i lærerens vejledning af en gruppe eller eleven selv.

Pointetype:	Begreb	Metode	Resultat	Fortolkning
Lærer → klasse	7	18	3	13
Lærer → elev	1	12	-	7
Elev	12	13	4	11

**Tabel 1.** Antal lektioner ud af 50 med en formuleret lærer- eller elevpointe.



I første omgang kan det overraske at der ikke var flere begrebspointer. Matematikfaget byder på mange begreber, og lærere og bogsystemer præsenterer dem vel tilsvarende tydeligt. Men præsenteres begreber overvejende ved introduktion af et nyt fagligt emne, hvor de fleste lektioner så derefter handler mere om at løse opgaver med brug af det etablerede begreb? I hvert fald var de fleste pointer i undersøgelsen netop metodepointer, som det ses af tabellen. Resultatpointer forekom næsten ikke, mens der var en del fortolkningspointer.

Pointers omfang kan også måles ved pointeholdige dialogers procentvise andel af lektioners længde eller ved antal referencer i den enkelte lektion. Men mange pointer blev kortvarigt fremført, forekom ikke planlagt eller var så lokale at de bestemt ikke kunne siges at "styre" den aktuelle lektion. Og næsten halvdelen af de 50 lektioner var helt *uden* en pointe formuleret af læreren.

### *Indikerer det problemer?*

Det kan i hvert fald undre! For når jeg i mit spørgeskema til alle lærere spurgte om det vigtigste man som lærer vil have eleverne til at lære i lektionen, så noterede næsten alle et matematisk begreb eller emne, som fx brøker eller koordinater. Tit var det også overskriften på et kapitel eller opslag i klassens matematikbog.

Men i klasserummet blev lektionsmålet typisk beskrevet ved aktivitetslister, ofte noteret på tavlen som opgaver. Og i de allerfleste af de 50 lektioner synes undervisningen således reelt at være planlagt og styret af en bog.

## Undervisningens faser

Rutiner i dansk matematikundervisning blev sidst kortlagt i 1980 (Hansen, 1980). Her blev der gennemført to timer lange interviews med fire erfarne matematiklærere (valgt af skoleledere) på en tilfældigt udvalgt skole i hver af dengang 18 kommuner omkring København. I alt medvirkede 71 lærere med matematiktimer i 1.-10. klasse. Data fra disse interviews var om lærernes erfaringer, organisation, pædagogiske strategier og materialer. Men der var ingen observation af undervisning. Rapporten handler primært om lærernes variation i tilrettelæggelse af undervisning, og blandt resultaterne var at matematiklærere primært organiserer traditionel klasseundervisning i tre faser: (1) retning af hjemmearbejde, (2) præsentation af nyt indhold og (3) individuel opgaveregning. Gruppearbejde og eksperimentelt arbejde forekom sjældent. Klasser blev holdt sammen om de samme opgaver. Når dialogen fandt sted i fase 2, var det mellem enkelte elever og læreren. Lærerne brugte en "tjekdialog" hvor elevernes muligheder for at opfinde svar og bruge gæt var sparsomme da de kun vil have en rimelig mulighed for dette i en anderledes progressiv dialog.

Sådanne faser er også identificeret i TIMSS Video Study i 1999 (2003, s. 35-66) Teaching Mathematics in Seven Countries. Og nu har jeg så interesseret mig for tilrettelæggelsen af dansk matematikundervisning i 2009. For selvom et overblik over lektioners struktur ikke var hovedformålet med min forskning, er det relevant for at forstå og forklare evt. forekomst af eller mangel på pointer.

Af kodningen fremgår det fx hvornår undervisningen starter. Videoptagelsen starter når lektionen starter (som regel ringer det), men der går ofte lidt tid før alle elever (eller læreren) er parat. Og måske skal der gives beskeder af ikkematematisk art før matematikundervisningen. Denne fase er kaldt ankomst i oversigten herunder.

De angivne fem faser forekommer ikke alle i hver lektion og evt. i en anden rækkefølge. Tit skiftes der nemlig frem og tilbage mellem lærerens fælles præsentation eller repetition af matematiske forhold og så elevernes oftest individuelle opgaveregning.

De fem faser der er statistisk beskrevet efterfølgende, er disse:

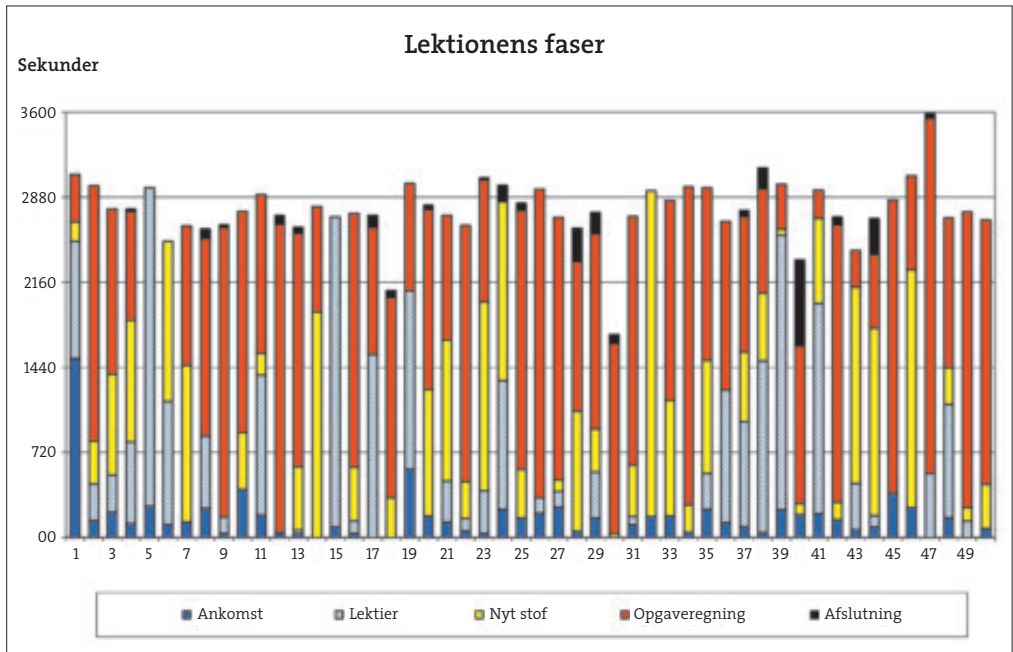
1. **Ankomst** (inkl. beskeder).
2. **Lektier** (inkl. rettelæring og returnering af opgaver eller prøver)
3. **Nyt stof** (inkl. repetition af tidligere lært)
4. **Opgaveregning** eller elevstyrede undersøgelser
5. **Opsummering** (inkl. afslutning og beskeder).

Tabel 2 viser hvor mange minutter der i alt medgår til hver type aktivitet i de 50 lektioner. Lektionerne var typisk 45-50 minutter lange. At de ikke altid var på 45 minutter, skyldes at 17 optagelser foregik i den ene halvdel af en dobbeltlektion, som oftest den første. Her placerede læreren en evt. pause under hensyn til det planlagte i lektionen.

Tid	Ankomst	Opsummering	Tid	Lektier	Tid	Nyt stof	Opgaveregning
0	6	27	0	17	0	11	5
]0; 1]	9	9	]0; 5]	10	]0; 5]	9	1
]1; 2]	8	5	]5; 10]	7	]5; 10]	13	3
]2; 3]	10	3	]10; 15]	3	]10; 15]	2	5
]3; 4]	9	0	]15; 20]	6	]15; 20]	6	6
]4; 5]	4	1	]20; 25]	1	]20; 30]	6	14
5+	4	5	25+	6	30+	3	16
I alt	50	50	I alt	50	I alt	50	50

**Tabel 2.** Antal lektioner ud af 50 med et bestemt tidsforbrug pr. fase.

Figur 1 viser hvordan tidsforbruget i hver af de 50 lektioner er fordelt på de fem faser. Alle faser forekommer som nævnt ikke i alle lektioner og heller ikke altid i den rækkefølge grafen synes at indikere. Ofte vendes der i løbet af lektionen tilbage til en tidligere aktivitet i fælles klassesamtaler. For en nærmere karakteristik henvises til afhandlingen (Mogensen, 2011, s. 135).



Figur 1. Længden af fem faser i hver af de 50 lektioner.

Andre koder blev anvendt til fx lærernes brug af lokkedialog (elicitation), hints, repetition og opsummering. Jeg kalder det fx en lokkedialog når læreren stiller spørgsmål til en klasse eller enkeltelever i forventning om bidrag eller svar. Det skete i 78 % af lektionerne. Man kan måske undre sig over at det ikke forekommer i alle lektioner. Mange danske matematiklærere synes at være utilpasse ved denne matematiske samtale! Hints er kodet i 22 % af lektionerne, men vanskeligt at skille fra lokkedialogen, så jeg kan ikke insistere på reliabilitet her. Endelig indeholdt blot 4 af de 50 lektioner en egentlig opsummering i afslutningsfasen. Det anser jeg for direkte bekymrende!

Jeg har set mange lektioner hvor klasser engageres overbevisende i faglig dialog. Men på en rejse rundt i landet til tilfældigt valgte lærere ser man altså *også* det modsatte, desværre. Fx lærere der ikke selv er sikre i stoffet og/eller hurtigst muligt (sådan forekommer det næsten) deler opgaver ud til eleverne og så vælger at støtte par eller enkeltelever i resten af lektionen – ofte med et tilsyneladende mistet overblik for resten.

Det er fristende at se på forekomsten af pointer sammenlignet med bl.a. skolernes størrelse samt lærernes anciennitet, køn og evt. linjefag. Tabel 3 viser sådanne sammenhænge:

Skolestørrelse	Pointer i % af lektionslængde	Antal lektioner	Antal lektioner med pointer
Lille (< 400)	7,5	12	9 ≈ 75 %
Mellemstor	9,6	20	12 ≈ 60 %
Stor (> 600)	14,2	18	16 ≈ 89 %

Læreranciennitet	Pointer i % af lektionslængde	Antal lektioner	Antal lektioner med pointer
0-4 år	9,2	8	6 ≈ 75 %
5-14 år	8,6	14	12 ≈ 86 %
15+ år	11,5	23	15 ≈ 65 %
Ingen information	16,1	5	4 ≈ 80 %

Lærers køn	Pointer i % af lektionslængde	Antal lektioner	Antal lektioner med pointer
Kvinde	9,3	21	15 ≈ 71 %
Mand	11,8	29	22 ≈ 76 %
Gennemsnit	10,8	50	37 ≈ 74 %

Linjefag	Pointer i % af lektionslængde	Antal lektioner	Antal lektioner med pointer
Ja	13,6	23	20 ≈ 87 %
Nej	7,7	12	8 ≈ 67 %
Ingen information	8,9	15	9 ≈ 60 %

**Tabel 3.** Antal lektioner ud af 50 sorteret efter forskellige parametre.

I tabellerne har jeg markeret tre forhold hvor der synes indikation for en sammenhæng. På de store skoler med mere end 600 elever er en forholdsvis større andel af

lektionerne med matematiske pointer. Er lærerne mon dygtigere på de store skoler, eller er det mulig sparring eller samarbejde om faget i et større team der slår igennem? Det kunne være fristende at undersøge nøjere.

Det ser også ud til at der er en sammenhæng mellem matematik som linjefag og forekomsten af pointer. Alt andet måtte vel også undre.

Endelig ser anciennitet ud til at have en betydning. I hvert fald har lærere med nogen anciennitet, men ikke for megen, oftere pointer i deres lektioner end andre. Jeg har endnu ikke haft mulighed for at lede efter sammenhænge mellem fx faserens vægtning og undervisernes anciennitet. Men måske lægger mange erfarne lærere mere vægt på rutiner med individuel opgaveregning end fælles pointeholdig samtale og refleksion? Og måske er mange yngre lærere så udfordret af klasseledelse at de også vælger at indfri elevens tænkte forventning til en didaktisk kontrakt hvor matematikundervisning overvejende bliver til opgaveregning.

Andre faktorer ser ikke ud til at have signifikant betydning. Fx har lærerens køn ingen betydning. I 45 af de 50 lektioner var der tydelig reference til et skolebogssystem, men der er heller ikke nogen evidens for at det har sammenhæng med forekomsten af pointer. Egentlig er det vel tilfredsstillende nok at denne del af kvaliteten er lærer-afhængig!

I artiklen her har jeg redegjort for iagttagelser der er fyldigt dokumenteret andetsteds (Mogensen, 2011). Fx er to interventionsstudier også gennemført for at undersøge hvordan man så kan styrke forekomsten af og den rolle pointer har i matematikundervisning:

- Først med en fokusgruppe på 7 af de oprindelige 50 lærere fra hver sin skole i en periode med kollegial sparring med mig
- Dernæst med alle 18 matematiklærere på én skole i et *lesson study*-forløb der indeholdt et kort kursus, og hvor jeg således arrangerede aktionsforskning.

Studierne med de to lærergrupper peger på forskellige muligheder og udfordringer:

Især forekommer *lesson study* meget lovende. I det aktuelle forløb vægtede lærerne den fælles planlægning af studielektioner, og de anså kollegial sparring efter hver af disse lektioner for værdifuld. Studiet viste at læreres vilje til at handle med professionalisme på den samme skole kan bygge bro på tværs af eventuelle "*teaching gaps*" mellem fagkolleger.

Derfor anbefaler jeg at *alle* skoler snarest udnævner en *matematikvejleder* med ansvar og mulighed for at tilbyde eller arrangere kollegial sparring og vejledning, herunder at matematiklærere i *fagteam* sætter kollegial sparring i system som *lesson study*.

Det kan bygge på de kvaliteter der klart er i dansk matematikundervisning. Men udfordringerne har vi været for tilbageholdende med at håndtere. Det haster.

## Referencer

- Clarke, D. & Xu, L.H. (2008). Distinguishing between Mathematics Classrooms in Australia, China, Japan, Korea and the USA through the Lens of the Distribution of Responsibility for Knowledge Generation: Public Oral Interactivity and Mathematical Orality. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 40, s. 963-972.
- Clarke, D. (2004). *Kikan-Shido – Between Desks Instruction*. Paper præsenteret på symposiet "Lesson Events as the Basis for International Comparisons of Classroom Practice", US: San Diego. Lokaliseret 28. april 2012 på [http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/lps/assets/Clarke\\_Kikan-shido.pdf](http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/lps/assets/Clarke_Kikan-shido.pdf).
- Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E. & Mok, I.A.C. (2006). *Making Connections: Comparing Mathematics Classrooms around the World*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Clarke, D., Keitel, C. & Shimizu, Y. (red.). (2006). *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Ericsson, K.A. & Simon, H.A. (1993). *Protocol Analysis, Revised Edition: Verbal Reports as Data*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Fernandez, L. & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study. A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Franke, M.L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics Teaching and Classroom Practice. I: F.K. Lester (red.) (2007), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (s. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Hansen, K.F. (1980). *Regne/matematikundervisningen i Danmark. En undersøgelse af regne/matematikundervisningen i folkeskolen specielt med henblik på den svage elevgruppes situation*. København: Dansk Psykologisk Forlag.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I: J. Hiebert (red.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (s. 1-27). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hiebert, J. et al (2003) *Teaching Mathematics in Seven Countries*. Results from the TIMSS 1999 Video Study (Australia, the Czech Republic, Hong Kong SAR, the Netherlands, Switzerland and the United States + Japan data from 1995). US Department of Education.
- Hill, H.C., Blunk, M.L., Charalambous, C.Y., Lewis, J.M., Phelps, G.C., Sleep, L. & Ball, D.L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), s. 430-511. Kentucky, US: Routledge.
- Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W. & Baumert, J. (2008). *The Professional Knowledge of German Secondary Mathematics Teachers: Investigations in the Context of the COACTIV Project*. TSG-30 paper på ICME 11 Mexico. Lokaliseret 28. april 2012 på <http://tsg.icme11.org/tsg/show/30>.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Matematik på grundskolens mellemtrin – skolernes arbejde med at udvikle elevernes matematikkompetencer*. (2006). København: Danmarks Evalueringsinstitut.

- Mogensen, A. (2011). *Point-Driven Mathematics Teaching. Studying and Intervening in Danish Classrooms*. Ph.d.-afhandling. Roskilde Universitet, Danmark: IMFUFA. Lokaliseret 28. april 2012 på <http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/484web.pdf>.
- Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Lokaliseret 28. april 2012 på <http://pub.uvm.dk/2002/kom>. København, Danmark: Undervisningsministeriet.
- Niss, M., Andreasen, M., Foss Hansen, K., Matthiasen, J., Mogensen, A., Skånstrøm, M. & Holm, C. (2006). *Fremtidens matematik i folkeskolen*. København, Danmark: Undervisningsministeriet.
- Shimizu, Y. (2006). How do You Conclude Today's Lesson? The Form and Functions of "Matome" in Mathematics Lessons. I: D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka & I. Mok (red.), *Making Connections: Comparing Mathematics Classrooms around the World* (s. 127-146). Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), s. 4-14.
- Sleep, L. (2009). Teaching to the Mathematical Point: Knowing and Using Mathematics in Teaching. Ph.d.-afhandling. University of Michigan. Lokaliseret 28. april 2012 på [http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/64676/1/sleep1\\_1.pdf](http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/64676/1/sleep1_1.pdf).
- Staub, F.C. (2007). Mathematics Classroom Cultures. Methodological and Theoretical Issues. *International Journal of Educational Research*, 46, s. 317-326.
- Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap. Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: The Free Press.
- Stigler, J. et al (1999) *TIMSS Videotape Classroom Study*. Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States. US: Department of Education.

## English Abstract

*Do Danish mathematics teachers have a "point"? In this article the concept of a mathematical point is clarified and defined, and it is reported from a research project to what extent Danish mathematics teachers in lower secondary schools emphasize such points in their teaching. Thus, 50 randomly selected mathematics teachers are filmed in one grade 8 math lesson and the dialogue investigated. The study identifies large variations and many influential components. There is room for improvement.*