

Brøker, fejlsvar og regnestrategier

– en analyse af fejlsvar i folkeskolens prøve i matematik



Pernille Ladegaard
Pedersen, VIA University
College



Christian Gregersen Brix,
VIA University College



Bent Sortkær, VIA
University College

Abstract: *Regnestrategier er vigtige for elevers matematiske udvikling, men forskning i strategier for rationale tal er begrænset. I denne artikel afdækker vi begrebet regnestrategier i relation til regning med brøker. Vi introducerer analysebegrebet fragmentbaseret metode og anvender dette i en analyse af fejlsvar knyttet til brøkopgaver i folkeskolens prøve i matematik uden hjælpemidler for 9. klasse. Analysen af fejlsvar viser omfanget af en mangelfuld talforståelse, og at der anvendes en fragmentbaseret metode. Undervisningen i brøker bør have som mål, at eleverne udvikler deres regnestrategier inden for brøker, så de mestrer et bredt udsnit af strategier og kan anvende disse adaptivt og fleksibelt.*

Introduktion

Forskningen inden for talbaserede regnestrategier med de naturlige tal har i de seneste år fyldt en del i det didaktiske landskab i Danmark (fx Jóelsdóttir & Sunde, 2024; Sunde, 2022) såvel som internationalt (fx Hickendorff et al., 2019; Geary et al., 2004; Verschaffel, 2023). Idéerne om regnestrategier har derfor også en central plads i den danske grundskole. I læseplanen for matematik fra 2019 står der bl.a.:

“Det er centralt, at læreren udfordrer og støtter de enkelte elever på en måde, så eleverne udvikler deres regnestrategier på baggrund af deres talforståelse frem for at lære procedurer for opstilling og udregning. Der sigtes ikke mod opøvelsen af standardiserede algoritmer” (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a, s. 15).

Afsættet for udviklingen af regnestrategier som beskrevet i læseplanen bør være funderet i elevernes talforståelse, og det er vigtigt at understrege, at udviklingen af regnestrategier ikke nødvendigvis er begrænset til de naturlige tal, men også gælder fx rationale tal, som denne artikel fokuserer på. I denne artikel er der fokus på rationale tal skrevet som brøk, $\frac{a}{b}$, hvor a og b er naturlige tal. Dette indebærer en holistisk tilgang, der integrerer konceptuel forståelse med praktiske anvendelser (Hiebert & Carpenter, 1992; Kilpatrick et al., 2001). Dette styrker elevernes evne til at anvende deres matematiske viden i varierende kontekster. Derudover understreger undervisningsvejledningen, at arbejdet med regnestrategier ikke alene skal have til formål at fokusere på elevernes beregninger. I stedet bør fokus være på at fremme en dybere forståelse af tal og regning.

“Ambitionen er noget andet og mere, end at eleverne får præsenteret beregningsmetoder, som de efterfølgende øver sig på. Formuleringen hænger sammen med, at eleverne skal lære med forståelse. Det er med andre ord ikke hensigten, at eleverne reproducerer beregningsmetoder, men at de udvikler metoder, fordi en sådan udvikling kun kan foregå, når den er forbundet med forståelse af tallenes og regningsarternes egenskaber” (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019b, s. 27).

I erkendelse af at mange elever i udskolingen og på ungdomsuddannelserne føler sig usikre i forhold til at arbejde med brøker (fx Christiansen & Sorth-Olsen, 2017), er det vigtigt at undersøge de bagvedliggende årsager til denne udfordring. Når eleverne udtrykker, at de ikke kan huske reglerne eller kun har en vag forståelse af metoderne, kan det indikere, at vi i matematikundervisningen ikke har formået at lade eleverne udvikle den nødvendige dybde i talforståelsen af rationale tal.

I denne artikel undersøger vi, hvori elevernes vanskeligheder i arbejdet med rationale tal ligger. Vi analyserer fejlsvarene fra folkeskolens prøve i matematik uden hjælpemidler for 9. klasse (FP9) for årene 2021 til 2024 (Børne- og Undervisningsministeriet, 2021b, 2022b, 2023b, 2024b) for at identificere de mest almindelige fejltyper, som eleverne begår i forhold til regning med brøker. Afsættet for analyserne er rapporterne *Data fra folkeskolens prøver i skriftlig matematik* udgivet af Børne- og Undervisningsministeriet (2021a, 2023a, 2024a). Årsagen til, at 2022 ikke er inddraget, er, at brøkopgaverne dette år var teksttunge, og at elevernes fejl i disse opgaver i højere grad kunne handle om tekstforståelse, hvilket ikke er dette studies fokus. Analysen skal forsøge at afdække, hvilke tilgange eleverne anvender i arbejdet med brøker, for derigennem at få indsigt i deres talforståelse.

For at vurdere, om de tendenser og udfordringer, vi observerer i forhold til rationale tal, er unikke for dette emneområde, vil vi kontrastere vores fund med data fra arbejdet med naturlige tal. Artiklens overordnede forskningsinteresse er at udbygge

forståelsen af regnestrategier, så den også omfatter de rationale tal med særligt fokus på brøker. Artiklens forskningsspørgsmål er på denne baggrund:

Hvad fortæller elevers fejlsvar i folkeskolens prøve 2021-2024 i matematik uden hjælpemidler for 9. klasse om deres talforståelse i arbejdet med brøker?

Sammenfattende ønsker vi med afsæt i elevernes fejlsvar at bidrage med viden om, hvilke løsningsmetoder udskolings elever synes at anvende, når de løser brøkopgaver. Målet med analysen er at give indsigt i disse tilgange og elevernes talforståelse inden for brøker. Den nye viden retter sig foruden mod forskning også mod matematiklærere i grundskolen og kan potentielt bidrage med nye perspektiver til arbejdet med udviklingen af elevernes brøkbegreb i undervisningen.

Vanskeligheder ved regning med brøker

Studier har vist, at forståelse af brøker udgør et kritisk punkt i elevernes matematiske udvikling (Bailey et al., 2012; Siegler et al., 2012). Derudover har forskningen vist, at elevernes forståelse af rationale tal også er forbundet til deres algebraiske kunnen (Booth et al., 2014). Desværre oplever mange elever vanskeligheder med at udvikle deres forståelse af brøker (Tian & Siegler, 2017), og disse vanskeligheder fortsætter gennem deres skolegang (Jordan et al., 2017; Siegler et al., 2012). Fx påvirker elevernes forståelse af hele tal deres begrebsdannelse for rationale tal, herunder brøker (Ni & Zhou, 2005; Van Hoof et al., 2015).

At regne med brøker skaber nye indsigter i, hvordan aritmetiske operationer virker på de nye talstørrelser (Lortie-Forgues et al., 2015). Et amerikansk studie har vist, at unøjagtigheder i elevers divisionsregning med heltal er en stor prædikator for deres videre regning med brøker (Siegler & Pyke, 2013). Generelt viser forskningen konsekvent, at elevers forståelse af de naturlige tal har stor betydning for deres senere præcision inden for brøkrekning – selv når der kontrolleres for relevante baggrundsvariable såsom koncentrationsevne og generelle kognitive færdigheder (Bailey et al., 2014). Særligt forståelsen af brøkers størrelse har vist sig at være vigtig for at støtte elevernes brøkrekning. Denne forståelse af brøkers størrelse støtter forståelsen af, at $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{12}$ repræsenterer den samme værdi, når $\frac{1}{3}$ og $\frac{3}{4}$ skal adderes (Pedersen & Bjerre, 2021).

Elevernes fejl i brøkrekning indebærer ofte anvendelse af u hensigtsmæssige strategier, herunder fejl i valg af eller udførelse af algoritme. En af de mest udbredte fejl er, at eleverne behandler brøkernes tæller og nævner som to uafhængige heltal. Dette ses fx i fejl som $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{7}$, hvor eleverne adderer tællerne og nævnerne hver for sig. Her overfører de deres viden om heltal til brøker og opfatter beregningen som to separate additioner placeret over og under en brøkstreg. Dette fænomen betegnes

som en heltalsdistraktor i form af enten repræsentation eller regneoperation (Van Hoof et al., 2015).

Internationalt er der mangel på studier, som knytter regning med brøker til begrebet regnestrategier, idet regnestrategier primært knyttes til regning med de naturlige tal. Enkelte studier knytter dog regning med brøker sammen med talforståelse (number sense) (fx Bütüner, 2017).

Talbaserede regnestrategier

Regnestrategier er indikatorer for tal- og regneforståelse, og arbejdet med strategier bør sigte mod at udvikle adaptiv ekspertise, det vil sige, at eleven behersker et bredt udsnit af strategier og kan anvende disse *adaptivt* og *fleksibelt* (Sunde, 2022) (vi udfolder begreberne *adaptivitet* og *fleksibilitet* yderligere senere i artiklen). Det står i kontrast til en algoritme, som er en fast og ufravigelig procedure, der altid anvendes på samme måde og trin for trin (Siegler & Jenkins, 1989; Kamii & Dominick, 1997).

Talbaserede regnestrategier fokuserer på en dybere forståelse af tal og deres pladsværdier. Ifølge Jóelsdóttir og Sunde (2024) indebærer arbejdet med talbaserede strategier, at eleverne arbejder med pladsværdien af cifrene i tallene. Det vil sige en forståelse af, hvordan tal kan deles op i fx enere, tiere og hundreder. Dette er i modsætning til cifferbaserede metoder, hvor pladsværdien ignoreres og der således udelukkende arbejdes med tallene fra 0 til 9. Når man fx arbejder med additionen $91 + 19$, kan man med en talbaseret strategi betragte 19 som 1 mindre end 20 og 91 som 1 mere end 90, og derved kan regnestykket forstås som $90 + 20$. Det er blot én af mange strategier, man kan gå til opgaven med. Ved en cifferbaseret tilgang vil cifrene altid betragtes enkeltvis (enerne, $1 + 9$, og tierne, $9 + 1$), hvilket i mindre grad fører til en dybdegående forståelse af tallets samlede størrelse (Jóelsdóttir & Sunde, 2024).

Forskning indikerer således også, at elever, der har adgang til flere regnestrategier og evnen til at vælge imellem dem, ofte har en bedre indsigt i og forståelse af matematiske emner og begreber (Jóelsdóttir et al., 2024; Siegler & Jenkins, 1989; Verschaffel, 2023). Det understreger vigtigheden af at fremme, at eleverne udvikler et repertoire af regnestrategier i undervisningen; hvilket ikke blot hjælper eleverne med at løse opgaver her og nu, men også styrker deres generelle matematiske kompetencer. En væsentlig faktor i elevernes udvikling af talforståelse inden for rationale tal er, at de overkommer de såkaldte heltalsdistraktorer.

Heltalsdistraktorer

En af de største årsager til de problemer, elever oplever, når de arbejder med rationale tal, er det, som på dansk kaldes heltalsdistraktorer – på engelsk enten “natural

number bias” (Vamvakoussi et al., 2012) eller “whole number bias” (Ni & Zhou, 2005). Heltalsdistraktorer refererer til tendensen til, at vores viden om de naturlige tal i nogle tilfælde forstyrrer vores forståelse af og arbejde med de rationale tal (fx Meert et al., 2010; Ni & Zhou, 2005; Van Hoof et al., 2018). Fx vil nogle elever mene, at $\frac{1}{3}$ er større end $\frac{1}{2}$, fordi tallene i nævnerne sammenlignes, og 3 jo er større end 2. Forklaringen kan bl.a. findes i, at forskningen har vist, at der er mindst fem forskellige typer af heltalsdistraktorer, *repræsentation*, *tæthed*, *størrelse*, *regneoperation* og *ækvivalens*, som eleverne i større eller mindre grad møder i arbejdet med brøker (Pedersen, 2021).

- Heltalsdistraktoren *repræsentation* kommer til udtryk, når man betragter en brøknotation som to separate tal; fx tolkes $\frac{1}{3}$ som 1 og 3, og nogle elever vil fejlagtigt mene, at notationen repræsenterer størrelsen 4.
- Heltalsdistraktoren *tæthed* kan beskrives som kontrasten mellem naturlige tal og rationale tal, når det gælder rækkefølgen af tallene. Ved de naturlige tal vil man altid kunne tælle sig frem til det næste tal på tallinjen, mens dette ikke gælder for de rationale tal. For disse gælder at man ikke ved, hvilket tal der kommer som det næste, da der findes uendelig mange tal mellem to rationale tal. Denne forskel fører til den misforståelse, at der kun findes et begrænset antal brøker mellem to brøker eller slet ingen. Fx at der kun findes én brøk mellem $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{4}$, nemlig $\frac{1}{3}$ (McMullen & Van Hoof, 2020; Vamvakoussi et al., 2012).
- Heltalsdistraktoren *størrelse* refererer som tidligere nævnt til, at man opfatter $\frac{1}{3}$ som større end $\frac{1}{2}$, fordi 3 inden for de naturlige tal er større end 2. Selvom vi alle får erfaring med størrelsen på brøkerne i løbet af skoletiden, tager det stadig længere tid at afgøre, hvilken brøk der er størst, når man sammenligner $\frac{2}{3}$ og $\frac{2}{4}$ med brøker som $\frac{3}{5}$ og $\frac{4}{5}$. Det vil sige, at det er lettere at sammenligne brøker med ens nævner, da man så blot kan se på tællerne og trække på sin forståelse inden for de naturlige tal (Meert et al., 2010).
- Heltalsdistraktoren *regneoperation* opstår, når eleverne uhensigtsmæssigt anvender deres viden om de naturlige tal i de fire regneoperationer. Fx når de løser additionsopgaver som $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$, hvor eleverne blot lægger henholdsvis tællerne og nævnerne sammen (Van Hoof et al., 2015).
- Heltalsdistraktoren *ækvivalens* indebærer, at eleverne opfatter $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{4}$ som to forskellige størrelser, da der er forskellige tal i tæller og nævner. Inden for de naturlige tal repræsenterer hvert tal en unik mængde eller størrelse, men inden for brøker kan to forskellige brøker repræsentere den samme størrelse (Pedersen, 2021).

Der er således forskellige typer af heltalsdistraktorer, som forstyrrer eller distraherer, når der arbejdes med brøker. Det er samtidig vigtigt at understrege, at fundamentet med talforståelse og regnestrategier, der er opbygget i arbejdet med de naturlige tal,

stadig er centralt at have på plads, inden der arbejdes videre med en udvidelse af talbegrebet. Foruden heltalsdistraktorer vil vi i denne artikel introducere et nyt begreb, som vi har valgt at kalde *fragmentbaseret metode*.

Fragmentbaseret metode

Når talbegrebet udvides til også at omfatte brøker, opstår spørgsmålet om, hvad der sker i arbejdet med talbaserede regnestrategier, når man betragter brøker som tal. Her giver det ikke længere mening at se på tallets pladsværdi og tale om cifferbaserede metoder. Notationen $\frac{a}{b}$ indeholder ikke nogen pladsværdier – det er et forhold mellem tæller og nævner. Cifferbaserede metoder mister derved i de fleste tilfælde deres gyldighed i arbejdet med brøker, da eleverne altid bør betragte den samlede størrelse, som brøkerne repræsenterer, og ikke blot betragte tæller og nævner enkeltvis. Et eksempel kunne være, når eleverne dividerer to brøker med hinanden ved blot at "gange på kryds", det vil sige tællerne med nævnerne (se figur 1), uden at forholde sig til brøkernes størrelse. For at beskrive fænomenet, at elever forholder sig til tæller og nævner fragmenteret uden at betragte dem som en samlet brøk og dermed en samlet størrelse, vil vi i denne artikel introducere begrebet *fragmentbaseret metode*.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Korrekt udført algoritme for at "gange på kryds".

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}$$

Forkert udført algoritme for at "gange på kryds".

Figur 1. Eksempler på division med to brøker, som gøres ved "at gange på kryds".

En *fragmentbaseret metode* i forhold til brøker er således beslægtet med de cifferbaserede metoder inden for regning med de naturlige tal. Det er ikke tilrådeligt, at elever arbejder cifferorienteret med naturlige tal, og inden for brøker er det tilmed en helt meningsforladt metode, idet det i arbejdet med brøker er afgørende, at de ikke betragter nævner og tæller som to uafhængige dele. I stedet skal eleverne forstå en brøk som én samlet størrelse, hvor forholdet mellem del og helhed er det centrale. I en fragmentbaseret metode vil de netop betragte tæller og nævner uafhængigt og i forhold til tallenes isolerede størrelser. I arbejdet med regnestrategier og brøker er det

centralt, at eleverne forholder sig til størrelsen af brøkerne i de opgaver, de står over for. Hvis man fx ser på additionen $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$, vil en algoritmisk tilgang være at gange nævnerne og herefter gange hver nævner med den anden brøks tæller: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 4} = \frac{10}{8}$.

Men tages der derimod afsæt i forskellige regnestrategier, som kan anvendes, når to brøker skal lægges sammen, er der mange måder, eleverne kan gribe opgaven an på:

- Omskriv $\frac{1}{2}$ til $\frac{2}{4}$, og læg herefter tællerne sammen.
- Tag afsæt i den største brøk, $\frac{3}{4}$. Omskriv den anden brøk, $\frac{1}{2}$, til $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{4}$. Læg den ene $\frac{1}{4}$ til $\frac{3}{4}$, hvilket er en hel. Så har du $\frac{1}{4}$ mere – og du har lagt $\frac{1}{2}$ til.
- Omskriv til decimaltal: $0,5 + 0,75$.

Det er blot nogle eksempler. Fælles for dem alle er, at de kræver en forståelse af en brøk som en helhed, og at man ikke blot opfatter tæller og nævner fragmenteret hver for sig. Hvilken strategi der vælges, afhænger af opgaven eller den kontekst, opgaven befinder sig i – altså et spørgsmål om *adaptivitet*. Hvor ovenstående eksempler alle tager afsæt i løsninger gennem talsymboler, kan *adaptivitet* også komme til udtryk gennem brugen af andre repræsentationer såsom cirkler eller tallinjer (Heinze et al., 2009). Den strategi, man vælger, må være baseret på den specifikke kontekst og det regnestykke, man står over for. *Adaptivitet* refererer således til evnen til at tilpasse en strategi til en given opgave eller situation. *Fleksibilitet* i regning med brøker viser sig eksempelvis, når eleverne vælger at omskrive til decimaltal, da de bruger deres viden inden for en anden repræsentation af de rationale tal. Eller hvis eleverne bruger erfaringerne fra løsning af additionsstykker, når de fx skal løse subtraktionen $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. *Fleksibilitet* involverer således det at kunne skifte mellem forskellige strategier (Baroody, 2003; Heinze et al., 2009; Jóelsdóttir & Sunde, 2024). Kun elever med talforståelse i relation til rationale tal vil kunne tilgå og løse brøkopgaver både *adaptivt* og *fleksibelt*.

Dette studie

Med udgangspunkt i ovenstående præsenterede begrebsapparat vil vi undersøge elevens fejlsvar i brøkopgaver. Herigennem vil vi pege på mulige årsager til, at fejlene er opstået. Vi har ikke adgang til hverken elevernes beregninger eller elevernes tanker. Nedenfor beskriver vi vores empiriske grundlag og de metodiske valg, vi har foretaget.

Analysens datagrundlag

Vores empiriske grundlag er prøvesættene til FP9 fra årene 2021 til 2024 (Børne- og Undervisningsministeriet, 2021b, 2022b, 2023b, 2024b), hvorfra opgaverne er valgt, samt rapporterne *Data fra folkeskolens prøver i skriftlig matematik* 2021 til 2024, som

hvert år udarbejdes af Børne- og Undervisningsministeriet. I disse rapporter opgøres antallet af fejlsvare i de enkelte opgaver samt en oversigt over de hyppigst forekommende fejlsvare. Fejlsvarerne, der ligger til grund for vores analyser, er således hentet fra mere end 250.000 elever i alderen 14-16 år.

Vores primære analytiske fokus er at undersøge brøkopgaverne med det formål at forstå, hvilke typer af fejlsvare eleverne giver. Til analysen har vi udvalgt de opgaver, der eksplicit formulerer en "ren" brøkopgave. Opgaver, hvor eleverne selv skulle udlede brøker fra tekstbeskrivelser, har vi fravalgt, fordi fejlene i sådanne opgaver kunne skyldes elevernes forståelse af teksten og ikke nødvendigvis deres færdigheder og forståelse af brøker. Eksempelvis fravalgte vi fra FP9 i 2022 følgende tekstopgave: "I Annas klasse er $\frac{3}{7}$ af eleverne 15 år. Hvor stor en brøkdel af eleverne er *ikke* 15 år?" De specifikke opgaver, vi har analyseret, er gengivet i tabel 2. Vores analytiske tilgang består i at se på de hyppigst forekommende fejlsvare og fortolke disse med udgangspunkt i de tidligere præsenterede teoretiske begreber. Derfor har vi valgt kun at medtage de fejlsvare, som udgør mere end 10 % af det samlede antal fejlsvare i opgaven. Denne grænse kunne være sat højere eller lavere, men netop denne grænse synes at få mange forskellige typer af fejlsvare, hvorimod en lavere grænse ikke vil bidrage med yderligere typer af fejlsvare. Desuden har vi set på fejlprocenterne i de fire opgaver med de fire regningsarter inden for de naturlige tal, der optræder i alle fire analyserede prøvesæt. Det har vi gjort for at undersøge, om brøkgregning udgør en særlig udfordring for eleverne, eller om de møder de samme vanskeligheder ved beregninger med naturlige tal.

Inden vi præsenterer analysens resultater, er der to forhold, der er vigtige at understrege: 1) Vi undersøger elevernes fejlsvare. Vi har således ikke data om, hvad den enkelte elev tænkte eller gjorde i prøvesituationen – kun det svar, eleven leverede. Derfor ser vi på mange besvarelser (250.000+) og koncentrerer vores analyse om de fejlsvare, som mange elever giver. På den måde sandsynliggør vi, at de mange ens fejlsvare trækker på de samme eller sammenlignelige overvejelser og tanker. 2) De svar, eleverne giver i en prøvesituation, er ikke nødvendigvis et udtryk for, hvad de forstår, ved og kan. De vil højst sandsynligt svare anderledes i en anden sammenhæng, fx i den almindelige undervisning. Ikke desto mindre vil vores analyse af typiske fejlsvare, der fortæller noget om, hvilke strategier og/eller algoritmer eleverne tyr til i netop eksamenssituationen, give vigtig viden om den daglige undervisning.

Resultater

Regning med naturlige tal versus brøker

I tabel 1 ses en oversigt over fire opgaver inden for de fire regningsarter med naturlige tal for hvert af de fire år, som vi undersøger. Procentandelene af korrekte svar på disse

opgaver ligger mellem 64 % og 94 %. I tabel 2 gengiver vi de brøkopgaver, som vi har udvalgt til analyse, samt antallet af korrekte besvarelser. I tabellen har vi ligeledes medtaget de hyppigst forekommende fejlsvar og andelen af elever, der har angivet netop de fejlsvar, som en procentdel af alle fejlsvar.

Tabel 1. Oversigt over de fire opgaver med de fire regningsarter med de naturlige tal. 2021-2024.

2021		2022		2023		2024	
Opgave	Andel af elever med korrekt svar	Opgave	Andel af elever med korrekt svar	Opgave	Andel af elever med korrekt svar	Opgave	Andel af elever med korrekt svar
2345 + 997	87 %	999 + 199	92 %	478 + 523	94 %	649 + 749	93 %
1302 – 298	71 %	1015 – 816	75 %	1301 – 559	66 %	1008 – 989	77 %
11 * 72	81 %	8 * 703	74 %	99 * 18	64 %	15 * 35	71 %
2008: 4	85 %	5427: 9	67 %	15030: 15	68 %	1208: 8	75 %

Kilde: Børne- og Undervisningsministeriet (2021a, 2021b, 2022a, 2022b, 2023a, 2023b, 2024a, 2024b).

Ser vi på de korrekte svar på de syv brøkopgaver, som vi har inkluderet i analysen, er det tydeligt, at opgaverne med de fire regningsarter inden for naturlige tal er lettere for eleverne end opgaverne med brøkgregning. Andelen af korrekte svar inden for brøker ligger på mellem 22 % og 71 %, og for de seks af opgaverne har cirka halvdelen eller færre svaret rigtigt. Mest sammenlignelige er opgave 10.1, 10.2 og 10.3 fra 2024, som er brøkgregning med de tre regningsarter addition, multiplikation og division. Her svarer henholdsvis 44 %, 52 % og 22 % rigtigt på brøkstykkerne, hvilket er væsentlig færre end de tilsvarende stykker med de naturlige tal (tabel 1). På trods af elevernes udfordringer med brøkgregning er det positivt, at der er en høj svarprocent inden for både regning med de naturlige tal og regning med brøker (mellem 92 % og 98 %). Eleverne forsøger med andre ord at komme med et bud på et svar – også i en prøvesituation.

Tabel 2. Oversigt over brøkopgaver i FP9 2021-2024 samt fejlsvar.

	Opgave	År	Andel af elever med korrekt svar	Fejlsvar	Andel af elever, der har afgivet fejlsvaret, i forhold til alle afgivne fejlsvar
7.2	Skriv en brøk, der er halvt så stor som $\frac{4}{7}$	2021	52 %	$\frac{2}{3}$	25 %
				$\frac{8}{14}$	18 %
6.3	$\frac{1}{2} + - = \frac{7}{8}$	2023	32 %	$\frac{6}{6}$	41 %
10.1	Hvilken brøk er større end $\frac{1}{2}$? $\frac{7}{18}, \frac{1}{3}, \frac{41}{90}, \frac{11}{21}$ eller $\frac{116}{251}$	2023	71 %	$\frac{1}{3}$	41 %
10.2	Hvilket regnestykke har et resultat, der er større end 1? $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}, \frac{4}{15} + \frac{2}{3}, \frac{3}{8} + \frac{2}{5},$ $\frac{5}{6} + \frac{1}{5}$ eller $\frac{3}{7} + \frac{1}{2}$	2023	51 %	$\frac{4}{15} + \frac{2}{3}$	30 %
				$\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$	29 %
				$\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$	25 %
10.1	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$	2024	44 %	$\frac{4}{6}$	46 %
10.2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	2024	52 %	$\frac{3}{4}$	14 %
				$\frac{7}{6}$	12 %
10.3	$2 : \frac{1}{2}$	2024	22 %	$\frac{1}{4}$	21 %
				1	15 %
				0,25	15 %

Kilde: Børne- og Undervisningsministeriet (2021a, 2021b, 2023a, 2023b, 2024a, 2024b).

I nedenstående vil vi analysere og fortolke de syv udvalgte opgaver hver for sig og beskrive, hvordan eleverne kan være kommet frem til de angivne fejlsvar. Analyserne henviser alle til tabel 2.

Opgave 7.2 (år 2021)

I opgave 7.2 bliver eleverne bedt om at skrive en brøk, som er halvt så stor som $\frac{4}{7}$ (FP9 2021, 7.2). 48 % af eleverne svarer ikke korrekt på denne opgave. Det hyppigste fejlsvar er $\frac{2}{3}$, som dækker 25 % af fejlsvarene. En oplagt forklaring kan være, at eleverne ikke ved, hvad en halvt så stor brøk er, og det er den underliggende årsag til de forskellige fejlsvar. En mulig fremgangsmåde til at komme frem til svaret $\frac{2}{3}$ er, at eleverne halverer tæller og nævner ($\frac{4:2}{7:2} = \frac{2}{3,5}$) og så ændrer decimaltallet 3,5 til 3, da decimaltal ikke kan stå i ægte brøker. Svaret tyder på indflydelse af heltalsdistraktoren *repræsentation*, da eleverne opfatter tæller og nævner enkeltvis og dermed fragmenteret og således forsøger at halvere hele brøken ved at halvere tæller og nævner enkeltvis.

Det næsthyppigste fejlsvar er $\frac{8}{14}$, som dækker over 18 % af fejlsvarene (se tabel 2). Eleverne har i deres svar ganget med 2 i tæller og nævner ($\frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 7} = \frac{8}{14}$). Det kan være en sammenblanding af algoritmen for at forlænge brøker og det at halvere en brøk. Svaret indikerer en indflydelse af heltalsdistraktorerne *repræsentation* og *ækvivalens*. *Repræsentation* kommer til udtryk, da eleverne opfatter tæller og nævner enkeltvis og fragmenteret og fordobler dem. *Ækvivalens* kommer til udtryk, da eleverne reelt set blot forlænger brøken fra $\frac{4}{7}$ til $\frac{8}{14}$ uden at opfatte, at disse to brøker er ækvivalente. Samlet set ser elevernes fejlsvar ud til at være funderet i en *fragmentbaseret metode*, da de forsøger at anvende algoritmer uden at betragte brøken som en samlet størrelse – og dermed uden tegn på talforståelse knyttet til rationale tal.

Opgave 6.3 (år 2023)

I opgaven skal eleverne løse additionsstykket $\frac{1}{2} + - = \frac{7}{8}$ (FP9 2023, 6.3). 68 % af eleverne svarer forkert på opgaven. Det hyppigste fejlsvar er $\frac{6}{6}$, som dækker over 41 % af fejlsvarene. Det tyder på, at eleverne har tænkt, at $\frac{1}{2} + \frac{6}{6} = \frac{1+6}{2+8} = \frac{7}{8}$, og dermed fragmenteret har lagt tæller sammen med tæller og nævner sammen med nævner. Dette tyder på indflydelse fra både heltalsdistraktoren *regneoperation* og heltalsdistraktoren *repræsentation* og muligvis også en sammenblanding med standardalgoritmen for multiplikation. Opgaven kan ikke betragtes som en standard-additionsopgave, da den er udformet som en opgave med en ubekendt pladsholder. Det virker, som om disse elever arbejder uden afsæt i en talforståelse af størrelsen på de to brøker. De anvender dermed ikke nogen regnestrategier i deres arbejde med addition af de to brøker. Samlet set tyder det på, at elevernes fejlsvar primært er funderet i en *fragmentbaseret metode* og et forsøg på at anvende en algoritme.

Opgave 10.1 (år 2023)

I opgaven bliver eleverne bedt om at pege på, hvilken af brøkerne $(\frac{7}{18}, \frac{1}{3}, \frac{41}{90}, \frac{11}{21}$ eller $\frac{116}{251})$ der er større end $\frac{1}{2}$ (FP9 2023, 10.1). 29 % af eleverne svarer rigtigt på denne opgave. Det hyppigste fejlsvar er $\frac{1}{3}$, som dækker over 41 % af fejlsvarerne. Årsagen til, at netop $\frac{1}{3}$ vælges, kan være, at det er den mest kendte brøk, da det er en stambrøk og dermed et oplagt gæt, da det er en multiple choice-opgave. At eleverne holder fast i, at den brøk må være det rigtige svar, kan være blevet forstærket af heltalsdistraktoren *størrelse*, da de formentlig har anskuet, at 3 er større end 2, og dermed må det være det rigtige svar.

Opgave 10.2 (år 2023)

I denne opgave skal eleverne pege på, hvilket af brøkgrenestykkerne $(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}, \frac{4}{15} + \frac{2}{3}, \frac{3}{8} + \frac{2}{5}, \frac{5}{6} + \frac{1}{5}$ eller $\frac{3}{7} + \frac{1}{2})$ som giver et resultat, der er større end 1. 49 % af eleverne svarer forkert på opgaven.

Det hyppigste fejlsvar er $\frac{4}{15} + \frac{2}{3}$, som dækker over 30 % af fejlsvarerne. Elevernes svar tyder på, at de har valgt regnestykket med den brøk, som indeholder det største heltal, nemlig 15. Det kan være et tegn på heltalsdistraktoren *størrelse*, da eleverne formentlig ikke anskuer brøkens størrelse som et forhold mellem tæller og nævner, men blot finder den brøk med det største heltal, hvilket er en strategi, som er overført fra de naturlige tal.

Dernæst kommer $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$, som dækker over 29 % af fejlsvarerne. Svaret peger i retning af, at eleverne har forholdt sig til, at $\frac{2}{3}$ mangler noget for at blive større end 1. $\frac{2}{3}$ mangler netop $\frac{1}{3}$ for at blive 1, men eleverne vælger stykket, hvor der adderes $\frac{1}{4}$, hvilket peger på heltalsdistraktoren *størrelse*, fordi eleverne formentlig anskuer, at $\frac{1}{4}$ er større end $\frac{1}{3}$.

Det tredjehyppigste svar er $\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$, som dækker over 25 % af fejlsvarerne. Vi har faktisk haft svært ved entydigt at afkode elevernes mulige ræsonnement for at vælge dette svar. Et bud kunne være, at eleverne vælger en af de muligheder, hvor tallet 1 ikke optræder i tælleren, da tal med 1 i tælleren virker små. Blandt de to tilbageværende muligheder vælger eleverne så brøkerne med den mindste nævner – enten samlet eller ved at undgå brøken med 15 i nævneren. Hvis det er tilfældet, udviser eleverne en begyndende forståelse for både tællerens og nævnerens betydning for brøkens størrelse, men formår ikke at følge deres forståelse for brøker op med en mere præcis beregning. Eleverne viser således et begyndende opgør med den *fragmentbaserede metode*. Det kan dog heller ikke udelukkes, at en del af de 25 % har sat deres kryds ved dette svar, alene fordi opgaven er en multiple choice-opgave med fem svarmuligheder. Hvis eleverne havde svaret helt tilfældigt, ville 20 % af eleverne have sat deres kryds ud for denne mulighed.

Opgave 10.1 (år 2024)

Opgaven $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ er en brøkopgave med addition (FP9 2024, 10.1). 56 % af eleverne svarer ikke korrekt på denne opgave. 25 % af eleverne giver svaret $\frac{4}{6}$, hvilket tyder på, at de har tænkt, at $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{2+4} = \frac{4}{6}$, og derved har anskuet tæller og nævner fragmenteret og lagt tæller sammen med tæller og nævner sammen med nævner, hvilket tyder på indflydelse fra heltalsdistraktoren *regneoperation* og muligvis også en sammenblanding med standardalgoritmen for multiplikation.

Det virker, som om denne gruppe elever arbejder uden afsæt i en talforståelse af størrelsen på de to brøker. De anvender med andre ord ikke nogen regnestrategier i deres arbejde med addition af de to brøker. Samlet set tyder det på, at elevernes fejlsvar primært er funderet i en *fragmentbaseret metode* og et forsøg på at anvende en algoritme.

Opgave 10.2 (år 2024)

Hvis vi ser på multiplikationsstykket $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ (FP9 2024, 10.2), har 52 % af eleverne svaret korrekt på opgaven (se tabel 2). Stykket er med andre ord lettere end ovenstående additionsopgave, når vi ser på antallet af korrekte svar. Når vi ser på de ikke-korrekte svar, er 14 % af alle fejlsvar $\frac{3}{4}$. Årsagen til denne fejl skyldes sandsynligvis, at eleverne benytter algoritmen for division og ganger igennem således: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$. I den samme opgave har 5 % af alle elever svaret $\frac{7}{6}$ (12 % af fejlsvarene). En forklaring er, at eleverne har forlænget brøkerne med fællesnævneren 6 og derefter lagt dem sammen, og dermed har eleverne altså løst opgaven som et additionsstykke. Det tyder således på, at eleverne har blandet regnearterne sammen.

Opgave 10.3 (år 2024)

Det sidste stykke, vi har med i analysen, er med division og lyder $2 : \frac{1}{2}$ (FP9 2024, 10.3). Her svarer blot 22 % af eleverne korrekt på opgaven. Det hyppigst givne fejlsvar er $\frac{1}{4}$, hvilket tyder på, at eleverne har multipliceret nævneren med 2. Dette svar udgør 21 % af alle fejlsvar. Årsagen til svaret kan være, at eleverne blander algoritmerne inden for brøkgregning sammen, idet det virker, som om de har løst $\frac{1}{2} : 2$ – altså har de ubevidst generaliseret den kommutative lov uheldigt ind i regneoperationen division. Resultatet $\frac{1}{4}$ kan også virke sandsynligt for eleverne, da deres erfaring med division af naturlige tal ofte giver et mindre tal som svar end dividenden. Her er eleverne påvirket af heltalsdistraktoren *regneoperation* ved division. Svaret 0,25 udgør 15 % af fejlsvarene. Her har eleverne sandsynligvis omskrevet $\frac{1}{2}$ til decimaltallet 0,5 og delt det med 2. Igen er det en uheldig brug af den kommutative lov.

Fejlsvaret 1 udgør ligeledes 15 % af alle fejlsvar. En mulig forklaring på svaret kan være, at eleverne har betragtet opgaven som en multiplikationsopgave og har ganget op i tælleren og fået $\frac{2}{2}$, hvilket de så har forkortet til 1. En anden forklaring kan være, at

eleverne har tænkt, at det halve af 2 er 1. Endelig kan en tredje forklaring være, at de har lært at omskrive 2 til brøken $\frac{2}{1}$ og derefter har ganget forkert "på kryds". Det ville igen være et udtryk for en *fragmentbaseret metode*. Da vi kun har elevernes svar og ikke deres ræsonnementer bag svaret, kan vi ikke vide, hvordan de er kommet frem til netop det svar.

Alt i alt blander eleverne forskellige algoritmer sammen i regningen med brøker – og overordnet anvender de en *fragmentbaseret metode*. Det vil sige, at de betragter tæller og nævner hver for sig og ikke ser på brøkens samlede størrelse. Når eleverne omskriver brøken til et decimaltal, så de når frem til svaret 0,25, er der dog ikke tale om en *fragmentbaseret metode*; til gengæld viser de problemer med forståelsen af regneoperationen division inden for decimaltal. Det virker, som om deres forståelse af division er influeret af en heltalsdistraktor, når de forventer, at resultatet af division skal blive mindre end dividenden – ligesom inden for division med naturlige tal. Spørgsmålet er, om de har udviklet en forståelse af division som målingsdivision (fx "Hvor mange gange kan en halv meter være inden i 2 meter?"). Desværre har vi ingen data, der viser deres ræsonnementer.

Konklusion og diskussion

I artiklen har vi analyseret de hyppigste fejlsvar fra folkeskolens prøve i matematik uden hjælpemidler for 9. klasse (FP9) for årene 2021 til 2024 (Børne- og Undervisningsministeriet, 2021b, 2022b, 2023b, 2024b). Vores analyse viser, at langt flere elever svarer forkert på opgaver, hvor der indgår brøker, end på sammenlignelige opgaver med de fire regningsarter, hvor der regnes med de naturlige tal. I seks ud af syv tilfælde svarede omkring halvdelen eller færre rigtigt på brøkopgaverne (andelen af korrekte svar var på mellem 22 % og 71 % – se tabel 2), mens væsentlig flere svarede rigtigt på opgaver med de naturlige tal (andelen af korrekte svar var på mellem 64 % og 94 % – se tabel 1). Denne del af analysen viser dermed tydeligt, at arbejdet med de rationale tal er noget, der bør have et øget fokus i undervisningen i skolen, så der skabes muligheder for, at eleverne kan udvikle deres talforståelse, også inden for de rationale tal.

I den centrale del af analysen undersøger vi, hvilke typer af fejlsvar eleverne giver. Ved at trække på begrebet heltalsdistraktorer finder vi, at eleverne ofte benytter logikker fra regning med de naturlige tal eller benytter algoritmer fejlagtigt. Gennemgående for de fleste fejlsvar er, at eleverne behandler tæller og nævner for sig og dermed fragmenteret. Dermed tager de ikke afsæt i en forståelse af den størrelse, brøken samlet repræsenterer. Dette forhold har vi i artiklen navngivet *fragmentbaseret metode*. Ligesom det inden for de naturlige tal er problematisk at have en cifferbaseret tilgang, er det problematisk at have en *fragmentbaseret metode* inden for brøker, da ingen af de to tilgange bygger på en talforståelse (jf. fagets læseplan). Det er således

centralt at få en opmærksomhed på og et begreb for denne tilgang inden for arbejdet med brøker – hvilket *fragmentbaseret metode* giver. Derudover er den *fragmentbaserede metode* i høj grad støttet af heltalsdistraktoren *repræsentation*, hvor eleverne ikke ser størrelsen som et forhold mellem tæller og nævner.

Analysen af fejlsvar tyder derfor på, at en stor del af eleverne ikke har opnået en tilstrækkelig talforståelse inden for regning med brøker, og at de dermed ikke benytter regnestrategier som afsæt for løsningen af brøkopgaverne. Det er her vigtigt at gentage, at vores analyse netop kun er knyttet til elevernes fejlsvar og kun kan sige noget om disse, da vi kun har elevernes svar og ikke deres ræsonnementer.

På trods af at læseplanen i matematik i de seneste 20 år har fokuseret på talforståelse og regnestrategier, synes målet således ikke at være nået for en stor gruppe af elever, når det kommer til talforståelse og regnestrategier inden for brøkgregning. Det er problematisk, idet bl.a. dansk forskning har vist, at elever, der foretrækker regnemetoder, der bygger på talforståelse, ser ud til at klare sig bedre i matematik end de elever, der foretrækker standardalgoritmen eller simple tællestrategier (Jóelsdóttir et al., 2024). Brøker er tilmed blevet betragtet som en gatekeeper videre i elevernes matematiske udvikling. Man kan således se, at de elever, som ikke opbygger en forståelse af brøker, har en meget begrænset videre udvikling i matematikken (Siegler et al., 2012). Det kan bl.a. forklares ved, at brøker også spiller en central rolle i arbejdet med de to andre repræsentationer af rationale tal – at forstå procent giver kun mening, hvis man forstår, hvad hundrededele er. Det samme gælder, når vi skal forstå positionen hundrededelspladsen inden for decimaltal.

Brøker og talforståelse

I arbejdet med at opbygge elevernes talforståelse er det centralt, at der arbejdes med elevernes *fleksibilitet* og *adaptivitet* i forhold til regnestrategier. Hvis eleverne skal opbygge *fleksible* regnestrategier, kræver det, at undervisningen lægger vægt på, at der er flere måder, hvorpå eleverne kan udvikle løsninger af brøkopgaver. Lad os bruge opgaven 2: $\frac{1}{2}$ (FP9 2024, 10.3) som eksempel: Her ville eleverne kunne løse opgaven ved brug af forskellige repræsentationer som fx en tallinje, et cirkeldiagram eller en blokmodel. En strategi ville være at tage afsæt i målingsdivision og sige: Hvor mange halve kan der lægges i forlængelse af hinanden for at nå op på 2? Formuleret som et konkret eksempel kunne det lyde: Hvor mange kartoner mælk a $\frac{1}{2}$ l kan vi få af 2 l mælk? En anden strategi kunne være at tage afsæt i en omskrivning til decimaltal: $\frac{2}{0,5} = \frac{20}{5} = 4$ eller $2: 0,5 = 20: 5$. Med afsæt i den abstrakte repræsentation kunne en tilgang være at sige $\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{4}{1} = 4$, det er dog ikke en strategi, der ofte er brugt i folkeskolen, men den bunder i tanken om, at det er let at dividere med 1 og derfor forlænge, så der står 1 i nævneren. Det er i dén forståelse, udtrykket “gange på kryds”

bunder. Ved at lade eleverne arbejde med disse (og flere) forskellige tilgange til regning med brøker opbygges deres repertoire, og de får derved større mulighed for at handle fleksibelt i forhold til regnestrategier.

På baggrund af arbejdet med talforståelse og regnestrategier vil eleverne sideløbende opbygge deres *adaptivitet*, det vil sige evnen til at vælge en passende strategi til en given situation. Her er det selvfølgelig helt centralt, at eleverne har forskellige strategier at vælge imellem, idet et valg kræver, at man har noget at vælge imellem (Heinze et al., 2009). Til adaptivitetsbegrebet er der således knyttet en kvalitetsvurdering – for hvad vil det sige, at noget er passende? Her er det vigtigt at understrege, at kvalitetskravet ikke er knyttet til en ydre vurdering, men er knyttet til den enkelte person, for hvad der er passende i en given situation, afhænger af personen. Hvilken strategi der vælges for at løse $2: \frac{1}{2}$, er således afhængigt af både elevens talforståelse og affektive forhold knyttet til opgaven (fx om det er en prøvesituation, lektier, en klassesamtale, eller om eleven står derhjemme og er i gang med en bageopskrift). *Adaptivitet* bliver således en konsekvens af både elevens *fleksibilitet* og den konkrete tid og det konkrete sted for eleven. Betydningen af tid og sted gælder således også i vores analyse, hvor eleverne netop sidder i en prøvesituation. Forskningen viser, at elever har en tendens til at tænke forskelligt, alt efter hvilken kontekst de er sat i (Carragher et al., 1985; Dela Cruz & Dela Cruz, 2022).

Foruden de nævnte fejltyper kan mange af fejlene desuden forklares med en sammenblanding af forskellige regnearter. Man kan diskutere, hvorvidt denne sammenblanding er en uhensigtsmæssig brug af *fleksibilitet*, idet eleverne forsøger at løse opgaven på alternative måder. Vi vil dog argumentere for, at begrebet *fleksibilitet* er knyttet til regnestrategier og dermed også til en talforståelse. Derfor er deres sammenblanding i dette tilfælde ikke et mislykket forsøg på *fleksibilitet*. Alt i alt giver elevernes fejlsvar et tydeligt billede af brugen af en *fragmentbaseret metode*, hvor eleverne ikke forholder sig til hele brøken, men blot fokuserer fragmenteret på tælleren og nævneren.

Perspektivering

Elevernes manglende udvikling af regnestrategier inden for brøker er kompleks. På trods af et tydeligt fokus i matematikfagets læseplan på talforståelse og regnestrategier kan antallet og typerne af fejlsvar tyde på, at der har været en manglende opmærksomhed på, hvordan disse udvikles yderligere. Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning udgav i 2024 materialet *Fælles indsats for tal og algebra* (2024), som kommer med et bud på, hvordan man kan arbejde med brøkbegrebet i skolen.

Artiklen her skriver sig ind i denne indsats ved på baggrund af elevernes fejlsvar at give et indblik i, hvordan talforståelse og regnestrategier aktuelt kommer til udtryk hos en stor del af afgangseleverne. Et næste skridt frem mod at styrke elevernes anvendelse af talforståelse og talbaserede strategier i arbejdet med brøker kunne være at undersøge og forstå, hvordan lærere arbejder med at tilrettelægge og gennemføre undervisningen. Derved kunne vi få mere viden om, hvilke udfordringer og potentialer lærerne oplever og møder i den daglige undervisning ude i klasseværelserne.

Referencer

- Bailey, D.H., Hoard, M.K., Nugent, L. & Geary, D.C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(3), 447-455. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004>
- Bailey, D.H., Siegler, R.S. & Geary, D.C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, 17(5), 775-785. <https://doi.org/10.1111/desc.12155>
- Baroody, A.J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. I: A.J. Baroody & A. Dowker (red.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (s. 133). Lawrence Erlbaum Associates.
- Booth, J.L., Newton, K.J. & Twiss-Garrity, L.K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, 118(1), 110-118. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.09.001>
- Bray, W.S. & Abreu-Sanchez, L. (2010). Using number sense to compare fractions. *Teaching Children Mathematics*, 17(2), 90-97. <https://doi.org/10.5951/tcm.17.2.0090>
- Bütüner, S.Ö. (2017). Comparing the use of number sense strategies based on student achievement levels. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(6), 824-855. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2017.1410738>
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2019a). *Matematik – læseplan*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_L%C3%A6seplan_Matematik.pdf
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2019b). *Matematik – undervisningsvejledning*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_Vejledning_Matematik.pdf
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2021a). *Data fra folkeskolens prøver i skriftlig matematik*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2021b). *Matematik FP9 – folkeskolens prøver – prøven uden hjælpemidler*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2022a). *Data fra folkeskolens prøver i skriftlig matematik*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2022b). *Matematik FP9 – folkeskolens prøver – prøven uden hjælpemidler*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.

- Børne- og Undervisningsministeriet. (2023a). *Data fra folkeskolens prøver i skriftlig matematik*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2023b). *Matematik FP9 – folkeskolens prøver – prøven uden hjælpemidler*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2024a). *Data fra folkeskolens prøver i skriftlig matematik*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2024b). *Matematik FP9 – folkeskolens prøver – prøven uden hjælpemidler*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.
- Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3(1), 21-29. <https://doi.org/10.1111/j.2044-835x.1985.tb00951.x>
- Christiansen, C. & Sorth-Olsen, J. (2017). Brøker! – Hvordan forstår man dem? I: M. Niss & U.T. Jankvist (red.), *Læringsvanskeligheder i matematik – hvordan kan de forstås og afhjælpes?* (s. 39-57). Frydenlund.
- Dela Cruz, A. & Dela Cruz, M. (2022). The influence of mathematical test anxiety and self-efficacy on students' performance. *Universal Journal of Educational Research*, 1(1), 12-26. <http://doi.org/10.17613/y0kfg-ajjn34>
- Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning. (2024). *Fælles indsats for tal og algebra*. <https://matematikdidaktik.dk/tal-og-algebra>
- Geary, D.C., Hoard, M.K., Byrd-Craven, J. & DeSoto, M.C. (2004). Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, 88(2), 121-151. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2004.03.002>
- Heinze, A., Star, J.R. & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535-540 <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4>
- Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2019). Multi-digit addition, subtraction, multiplication, and division strategies. I: A. Fritz, V.G. Haase & P. Räsänen (red.), *International Handbook of mathematical learning difficulties* (s. 543-560). Springer.
- Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. I: D.A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 65-97). Macmillan.
- Jóelsdóttir, L.B. & Sunde, P.B. (2024). Adaptivitet og fleksibilitet – addition og subtraktion med flercifrede tal. *MONA*, 2024(3), 7-23. <https://doi.org/10.7146/mona.v24i3.149010>
- Jóelsdóttir, L.B., Sunde, P.B., Sunde, P. & Andrews, P. (2024). Routine and adaptive experts: Individual characteristics and their impact on multidigit arithmetic strategy flexibility and mathematics achievement. *Journal of Numerical Cognition*, 10, 1-20. <https://doi.org/10.5964/jnc.14081>

- Jordan, N.C., Resnick, I., Rodrigues, J., Hansen, N. & Dyson, N. (2017). Delaware longitudinal study of fraction learning: Implications for helping children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 621-630. <https://doi.org/10.1177/0022219416662033>
- Kamii, C. & Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(1), 51-61. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90007-9](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90007-9)
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R.S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38*, 201-221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- McMullen, J. & Van Hoof, J. (2020). The role of rational number density knowledge in mathematical development. *Learning and Instruction, 65*, 1-9. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101228>
- Meert, G., Grégoire, J. & Noël, M.P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology, 107*(3), 244-259. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.04.00>
- Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
- Pedersen, P.L. (2021). *Learning and understanding the complexity of fractions*. Aalborg Universitetsforlag. <https://doi.org/10.54337/aau441584586>
- Pedersen, P.L. & Bjerre, M. (2021). Two conceptions of fraction equivalence. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 135-157. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10030-7>
- Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis-Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I. & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691-697. <https://doi.org/10.1177/0956797612440101>
- Siegler, R.S. & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Siegler, R.S. & Pyke, A.A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology, 49*(10), 1994-2004. <https://doi.org/10.1037/a0031200>
- Sunde, P. (2022). Adaptivitet og fleksibilitet: Regnestrategier i de yngste klasser. *MONA, 2022*(2), 7-23. <https://doi.org/10.7146/mona.v22i1.132755>
- Tian, J. & Siegler, R.S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 614-620. <https://doi.org/10.1177/0022219416662032>
- Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences, 61*, 99-108. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010>

- Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, 37, 30-38. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.004>
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344-355. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001>
- Verschaffel, L. (2023). Strategy flexibility in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 56(1), 115-126. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01491-6>

English abstract

Arithmetic strategies influence students' mathematical development throughout school, yet research on strategies involving rational numbers is limited. This article explores arithmetic strategies in relation to fractions. We introduce the concept of a fragment-based methods and apply it to an analysis of incorrect answers from Denmark's 9th-grade national math exam without aids. The analysis reveals a prevalence of poor number sense and the frequent use of fragment-based methods. When teaching fractions teachers should aim to support students in developing their own strategies, enabling them to master a broad repertoire of approaches and apply them adaptively and flexibly.