

Læringsspor – et didaktisk begreb til at beskrive progression og sammenhæng inden for tal og algebra



Charlotte Krog Skott,
Professionshøjskolen
Absalon



Morten Blomhøj, Aarhus
Universitet



Thomas Kaas,
Professionshøjskolen
Absalon



Marit Schou, Odense
Tekniske Skole

Abstract: Faglig sammenhæng og progression spiller en central rolle for elevers læring af matematik. Sammenhæng og progression er imidlertid vanskelige at beskrive på måder, der kan støtte en realisering af dem i matematikundervisningen. Børne- og Undervisningsministeriet har bedt Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning om at udvikle sådanne beskrivelser som grundlag for en fælles indsats for tal og algebra i grundskolen og på ungdomsuddannelserne. Baggrunden er de udfordringer med tal og algebra, som mange elever oplever. I artiklen diskuterer vi, hvordan læringsspor, der er et relativt nyt forskningsfelt, kan bidrage til det, og vi udfolder og eksemplificerer vores tilgang, kaldet fælles matematiske praksisser.

Introduktion

Fagområdet tal og algebra er ikke alene vigtigt for at lære matematik, men også for dannelse og uddannelse i mere bred forstand. Dette gælder både i grundskolen, på de gymnasiale uddannelser og på erhvervsuddannelserne. Desværre peger internationale undersøgelser, såsom TIMSS (Kjeldsen et al., 2019) og PISA, på, at danske elever er særlig udfordrede på dette fagområde, og tilbagemeldinger fra nationale prøver og eksamener på de tre uddannelsesområder peger i samme retning. Derfor har en

ekspertgruppe nedsat af Børne- og Undervisningsministeriet opfordret til, at tal og algebra gøres til et indsatsområde, der bør handles på (Skott et al., 2022).

På denne baggrund bad ministeriet Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning (NCUM) om at udarbejde et grundlag for en fælles indsats til styrkelse af tal- og algebraområdet i grundskolen og på ungdomsuddannelserne (herefter omtalt som indsatsen). Indsatsen har to hovedformål:

1. At bidrage til sammenhæng og progression i elevernes forståelser, færdigheder og kompetencer inden for tal og algebra i grundskolen og på ungdomsuddannelserne
2. At støtte lærere i grundskolen og på ungdomsuddannelserne i at undervise, så sammenhængen og progressionen kan realiseres i praksis.

Indsatsen skal bl.a. forebygge de faglige problemer, der kan opstå i overgangen mellem grundskolen og ungdomsuddannelserne. Det er en præmis, at indsatsen kan ses som et vejledende supplement til ministerielle læreplaner. Den skal altså bidrage med en tolkning og konkret udfoldning af sammenhæng og progression i centrale dele af tal- og algebraområdet. Undervisere og andre kan bruge indsatsen som retningsgivende for udvikling af undervisningspraksis, men ikke som undervisningsmateriale. Indsatsen er udgivet digitalt på www.matematikdidaktik.dk.

Forfatterne til denne artikel udgør den primære skrivegruppe bag udviklingen af indsatsen. Inspirationskilden er især en nyere gren af matematikdidaktisk forskning, der har fokus på at udvikle beskrivelser af sammenhænge og progressioner i elevernes læring og undersøge, hvordan disse kan bruges som støtte i matematikundervisningen (Lobato & Walters, 2017). Det gøres via begrebet *læringsspor* (en samlet oversættelse af *hypothetical learning trajectory* og *learning progression*), der i vores anvendelse betegner en forestillet vej for elevernes læring af faglige mål, baseret på hypoteser om, hvordan eleverne sandsynligvis vil tænke og udvikle deres forståelser gennem en række aktiviteter (Cobb & Gravemeijer, 2008). Læringsspor har udviklet sig fra at være den enkelte lærers redskab i den daglige undervisning til at være et kollektivt redskab, der bruges i andre sammenhænge end lokal undervisning og med et mere langsigtet perspektiv, fx ved udarbejdelse af læreplaner (se fx Skott et al., 2018). Internationalt set er det udbredt og anerkendt at beskrive sammenhæng og progression i matematikundervisning med læringsspor (Lobato & Walters, 2017), mens det endnu er nyt i Danmark.

Indsatsen relaterer sig til det didaktiske problemfelt, der handler om at beskrive sammenhæng og progression i matematikundervisningen, på måder, der kan støtte en realisering af dem i praksis. Det er et komplekst didaktisk problem, som nationale mål, læseplaner og lærebogsmaterialer på forskellige måder altid har søgt at bidrage til. Mål og læseplaner yder ikke – og skal heller ikke yde – tilstrækkelig detaljeret støtte

til, at lærere kan realisere den intendede progression i deres daglige undervisning. I eksisterende lærebøger er forskningsmæssige begrundelser for faglige sammenhænge og progressioner sjældent omtalt, og bærende faglige og fagdidaktiske idéer er som regel ikke beskrevet i detaljer (se fx Gissel et al., 2019). Det gør det vanskeligt for lærere eksplicit at styre efter disse idéer i undervisningen. Problemet synes altså ikke at kunne løses alene ved mål, læseplaner og lærebøger. I artiklen diskuterer vi, hvordan forskning i læringsspor kan bidrage til dette problemfelt.

Vi beskriver først de oprindelige idéer med læringsspor, og hvordan de siden er udviklet til at beskrive faglig progression og sammenhæng mere generelt. Derefter beskriver, begrunder og udfolder vi den tilgang til læringsspor, som er brugt i indsatsen, kaldet *fælles matematiske praksisser*. Til sidst diskuterer vi styrker og udfordringer ved tilgangen i forhold til det didaktiske problemfelt, der er artiklens omdrejningspunkt. Vi bruger læringssporet *At løse ligninger* (3.-6. klasse) som et gennemgående eksempel. Artiklen har mere karakter af en teoretisk fremstilling end af et forskningsstudie, så derfor har vi ikke inkluderet forskningsmetodiske overvejelser.

Forskning i læringsspor

For snart 30 år siden introducerede Martin Simon (1995) begrebet *hypothetical learning trajectories* som en del af en model for matematiklæreres beslutningstagning i den daglige undervisning. Baseret på et konstruktivistisk læringssyn definerede Simon begrebet som bestående af tre elementer: "de læringsmål, som definerer retningen, læringsaktiviteter og en hypotetisk læringsproces – en forudsigelse af, hvordan elevernes forståelse vil udvikle sig i relation til læringsaktiviteterne" (Simon, 1995, s. 136, vores oversættelse). Mere præcist kan Simons læringsspor siges at bestå af en lærers hypoteser eller forventninger til, hvordan hans/hendes elevers aktuelle forståelser af et emne eller et begreb kan udvikle sig i retningen af et bestemt og kortsigtet mål med støtte i udvalgte læringsaktiviteter. Et læringsspor er altså *hypotetisk*, fordi det beskriver en forventet læringsproces. Selvom den enkelte elevs læring følger sine egne veje, så er elevernes læringsveje ofte sammenlignelige. Dette er en grundlæggende præmis for Simon. Han begrunder det med, at der er en ensartethed i den proces, elever gennemgår, når de lærer et bestemt emne eller begreb, og som i stor udstrækning afhænger af de aktiviteter, de arbejder med i klassen. I Simons oprindelige arbejde er læringsspor således et redskab for den enkelte matematiklærer til at træffe beslutninger i dagligdagens undervisningssituationer.

Efterfølgende er Simons arbejde blevet videreudviklet på flere måder. I dag er læringsspor ikke kun et didaktisk redskab for den enkelte lærer i forhold til kortsigtede faglige mål. Det er også et redskab, der bruges til at beskrive forventede sammenhænge og progressioner i elevernes læring af faglige emner over længere tid, og som

anvendes i andre sammenhænge end lokal undervisning (Lobato & Walters, 2017). Internationalt set har læringsspor fundet bred og stadig stigende udbredelse i de seneste årtier. Mål og læseplaner for de fleste amerikanske stater, *Common Core State Standards in Mathematics*, er fx inspireret af læringsspor (Confrey, Maloney & Corley, 2014), og det samme er udviklingen af den seneste nationale læseplan for matematik i Grækenland (Potari et al., 2019). Der er også flere initiativer til at bruge læringsspor i udviklingen af læremidler, fx lærebøger og evalueringsmaterialer (Clements & Sarama, 2021; Confrey, Maloney & Corley, 2014; Lobato & Walters, 2017), og i kompetenceudvikling af matematiklærere, fx ved at støtte lærere i at fokusere på deres elevers tænkning og handlinger (Huang et al., 2023; Lobato & Walters, 2017; Sztajn et al., 2012; Wilson, 2014). Endelig har læringsspor også været anvendt til at støtte og løfte faglige kompetencer hos udsatte elever og til at fremme deres engagement (Confrey, Maloney & Nguyen, 2014). I disse og andre sammenhænge har læringsspor vist sig produktive og anvendelige. Forskningen i læringsspor er ekspanderet i de seneste årtier og har udviklet sig således, at der nu findes samlinger af afprøvede læringsspor inden for flere matematikfaglige områder og til forskellige klassetrin (Lobato & Walters, 2017).

I de seneste år er der udviklet en variation af tilgange til læringsspor. Lobato og Walters (2017) har fx identificeret en taksonomi af syv tilgange inden for naturfags- og matematikdidaktik:

1. Kognitive niveauer
2. Niveauer af diskurser
3. Skemaer og operationer
4. Hypotetiske læringsspor
5. Fælles matematiske praksisser
6. Disciplinær logik og læseplanssammenhæng
7. Observerbare strategier og læringsperformance.

Lobato og Walters (2017) fremhæver, at der netop er tale om forskellige tilgange til at studere elevers udvikling af faglige idéer og ikke om forskellige perspektiver på det samme fænomen. De første tre tilgange har fokus på den enkelte elevs læring. Enten som kvalitativt forskellige typer af kognition, der oftest beskrives i et hierarki af stadig mere avancerede niveauer, eller som kvalitativt forskellige diskurser, der beskrives som niveauer af stadig mere sofistikerede måder at kommunikere på (niveauer af diskurser er dog kun udviklet for naturfag). Den tredje tilgang er inspireret af Piagets skemateori. Her er fokus på at udvikle modeller af elevers initiale skemaer og mentale operationer og udlede, hvordan elevernes skemaer vil ændre sig over tid. Ud over at fokusere på den enkelte elevs læring lægger den fjerde tilgang, *hypotetiske læringsspor* (omfatter Simon og kollegers arbejde og Clements og Saramas videreudvikling), også

vægt på opgaver som middel til at lære (Lobato & Walters, 2017). Fx har Clements og Sarama (2021) udviklet læringsspor for ti faglige områder for de yngste klasser, som hver består af tre dele: 1) et overordnet matematisk mål (svarende til *Common Core State Standards in Mathematics*), 2) en udviklingsvej, der består af flere niveauer af matematisk tænkning, hvor hvert niveau er mere sofistikeret end det forrige, og som tilsammen fører til målet, samt 3) en række opgaver, der hører til hvert af niveauerne, og som støtter eleverne i at udvikle disse niveauer af tænkning. Udviklingsvejene i Clements og Sarama (2021) er et resultat af empirisk forskning – og er altså ikke lærer-formulerede hypoteser som i Simons første arbejder – og deres læringsspor er blevet en vigtig ressource for lærere, fordi de netop indeholder opgaver, som lærere kan bruge direkte i undervisningen (Lobato & Walters, 2017).

Uagtet at læring i *hypotetiske læringsspor* ses som mere kontekstafhængig end i de tre første tilgange, så tillægger denne tilgang ikke de faglige og sociale interaktioner lokalt i en klasse betydning. Det gør derimod den femte tilgang, *fælles matematiske praksisser*. Denne tilgang er inspireret af Cobb og Yackels (1996) emergerende perspektiv på matematikundervisning, hvor matematiklæring ses som det at deltage i og bidrage til et matematikfagligt fællesskab (se mere nedenfor), og fokus er netop på en klasses fælles læring og ikke alene på den enkelte elevs læring.

Mens de fem første tilgange er produkter af empiriske forskningsstudier, så er den sjette tilgang, *disciplinær logik og læseplanssammenhæng*, i højere grad inspireret af og baseret på eksperterens viden om matematikfaglige emner. Den beskriver et makroperspektiv på elevers matematiklæring i et langsigtet perspektiv, som fx i (nationale) målbeskrivelser. Den sidste og syvende tilgang, *observerbare strategier og læringsperformance*, tager igen udgangspunkt i klasserum og fokuserer på at beskrive en progression i de strategier, eleverne udvikler, og det læringsudbytte, man kan iagttage hos dem.

Et fællestræk ved tilgangene er, at læringssporene beskriver udviklinger i elevernes faglige læring i et specifikt emne over længere tid. Denne udvikling er dokumenteret empirisk, bortset fra i den sjette tilgang, og langt de fleste elever synes at følge den i en eller anden udstrækning.

Fælles matematiske praksisser giver sammenlignet med de øvrige tilgange til læringsspor et godt grundlag for at udarbejde beskrivelser af sammenhænge og progression i tal- og algebraundervisningen, som synes mulige for lærere at realisere i praksis. Tilgangen harmonerer nemlig med de spørgsmål, en matematiklærer er nødt til at stille sig selv, som fx: Hvor skal klassen som helhed hen? Hvordan får jeg dem derhen? Hvad kan jeg betragte som fælles faglig viden nu (hvad behøver jeg ikke at forklare, og hvad er det vigtigt, at jeg forklarer)? Hvilke aktiviteter kan støtte de næste skridt i elevernes læring? Hvad er det vigtigt, at eleverne får med videre? Ingen af de andre tilgange til læringsspor støtter i samme omfang de beslutninger, læreren må

træffe, og af disse grunde har vi valgt *fælles matematiske praksisser* som tilgang. I de næste afsnit udfolder vi denne tilgang.

Læringsspor som *fælles matematiske praksisser*

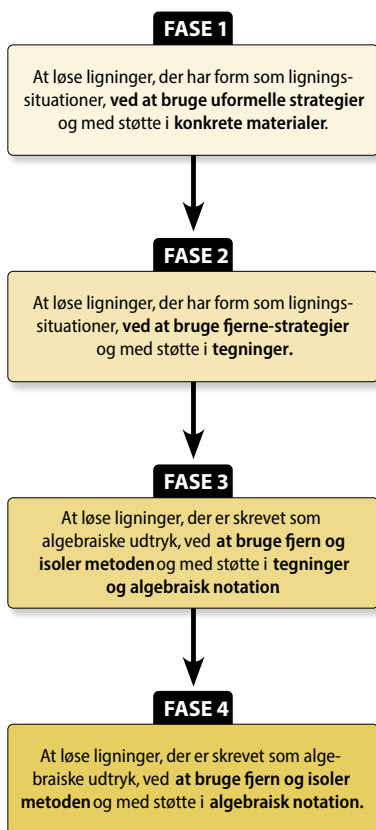
I læringsspor som *fælles matematiske praksisser* er fokus på de matematiske praksisser, der udvikles fælles i en klasse. Cobb og hans kolleger bruger termen *matematiske klasserumspraksisser*, men da vi i artiklen ikke bruger termen i andre betydninger end i relation til klasserum, kalder vi dem blot for matematiske praksisser. De beskriver en matematisk praksis som “de antaget fælles måder at ræsonnere, argumentere og symbolisere på, der etableres i fælles diskussioner af specifikke matematiske idéer” (Cobb et al., 2001, s.126, vores oversættelse). Dvs. at en matematisk praksis udvikles i interaktioner mellem læreren og eleverne, som en bestemt metode til at arbejde med en specifik faglig idé, der ikke længere kræver argumentation, fordi alle eleverne tilsyneladende har accepteret den som gyldig. Matematiske praksisser ses om et emergerende fænomen, da de skabes i interaktioner mellem læreren og eleverne og ikke introduceres som prædefinerede måder at arbejde med faget på, som fx hvis læreren viser en bestemt procedure, som eleverne skal bruge (Cobb et al., 2001). I det gennemgående eksempel kan en 5.-klasse og deres lærer fx have udviklet en matematisk praksis om, at ligninger kan løses ved “at isolere x ved at subtrahere eller dividere med det samme på begge sider af lighedstegnet” (se figur 1, svarer til den matematiske praksis i fase 3). Når en elev i klassen løser ligninger på denne måde, behøver eleven ikke længere forklare eller begrunde sin løsningsstrategi, da denne allerede er accepteret som gyldig af klassen.

Et læringsspor som *fælles matematiske praksisser* består af to dele:

1. En forestillet følge af matematiske praksisser
2. En udpegning af, hvilke midler der kan bidrage til, at en klasse udvikler disse praksisser ud fra tidligere praksisser (Cobb, 1999; Cobb et al., 2001).

Den forestillede følge af matematiske praksisser udgør tilsammen et spor, ad hvilket en klasse kan bevæge sig fra deres faglige udgangspunkt til målet for sporet. De enkelte praksisser i følgen kan ses som trædesten for, hvordan klassen forventes at udvikle nye praksisser ud fra deres nuværende praksisser – altså ud fra deres faglige udgangspunkt. Det er afgørende, at læreren støtter klassen i denne proces, bl.a. ved at bidrage til at etablere de enkelte trædesten i sporet som accepterede måder at arbejde med et emne eller en idé på i klassen. Følgen af matematiske praksisser udgør således en retning, som læreren kan styre efter i undervisningen.

Figur 1. Følgen i At løse ligninger består af fire matematiske praksisser.



I *At løse ligninger* består den forestillede følge af fire matematiske praksisser (se figur 1). Den første praksis (fase 1) handler om at løse ligninger som sproglige fortællinger, kaldet ligningssituationer, ved at bruge uformelle strategier og støtte sig til konkrete materialer, mens den sidste praksis handler om at løse ligninger skrevet som algebraiske udtryk ved at bruge *fjern og isolér*-metoden og støtte sig til algebraisk notation. *Fjern og isolér* består i at gøre det samme på begge sider af et lighedstegn med henblik på at isolere en ubekendt. Den første praksis lægger sig tæt op ad klassens forventede faglige udgangspunkt, dvs. at eleverne kan bruge de fire regnearter og sammenligne og begrunde, hvorfor nogle regneudtryk har samme værdi. Herudfra forventes klassen at kunne udvikle uformelle løsningsstrategier såsom gæt og tjek, beregn og sammenlign (visuelt), der kan danne afsæt for udvikling af *fjerne*-strategier. Den fjerde praksis er tæt knyttet til et overordnet mål om, at en klasse med forståelse kan løse algebraiske ligninger med en generel metode og uden at bruge metoden mekanisk. Der er to trædesten, der skal støtte en classes faglige progression fra den første til den fjerde praksis. Begge disse trædesten og praksisser har fokus på, at eleverne kan *fjerne* på stadig mere avancerede måder og senere *isolere*, samtidig med at de symboler, som

eleverne bruger til at støtte deres tænkning, udvikler sig fra konkrete materialer, over tegninger til algebraisk notation.

Udpegningen af, hvilke midler, fx opgaver, symboliseringer og hjælpemidler, der kan bidrage til, at en klasse udvikler nye praksisser ud fra tidligere praksisser, er tænkt som en hjælp til læreren. Det er vigtigt, at disse midler bruges på måder, så de understøtter særlige normer og diskurser (Lobato & Walters, 2017) (se næste afsnit). I indsatsens læringsspor består disse midler ofte i nye måder at symbolisere en matematisk idé på. I *At løse ligninger* introducerer læreren ligninger som sproglige fortællinger (dvs. som ligningssituationer) i forbindelse med den første praksis, fx en situation som denne:

Sofus og Alma har samlet lige mange karameller til sidste skoledag. De lægger det samme antal karameller i 3 papirposer. Sofus tager 2 poser og 10 karameller mere, mens Alma tager 1 pose og 30 karameller mere. De spørger klassen, om de kan finde ud af, hvor mange karameller der er i hver pose.

I arbejdet med denne ligningssituation kan eleverne gengive dens aktiviteter med konkrete materialer, såsom papirposer og centicubes, og derved få idéer til, hvordan den kan løses, fx ved visuelt at sammenligne Sofus' og Almas karameller. Symboliseringerne i form af ligningssituationer og konkrete materialer gør det muligt for læreren at lave et fokusskift, fx at skifte fra at bestemme, hvor mange karameller Sofus og Alma har, til at fokusere på, at de har lige mange karameller. Det kan lede til, at læreren introducerer en ny symbolisering – lighedstegnet og tegninger af situationen – som dernæst kan føre til udvikling af en ny praksis om at fjerne det samme på begge sider af lighedstegnet. På denne måde kan lærerens brug af symboliseringer skubbe på klassens udvikling af nye matematiske praksisser.

Et læringsspor er som sagt forestillet eller hypotetisk i den forstand, at det vurderes som sandsynligt, at en klasse med lærerens støtte kan udvikle de matematiske praksisser, der er indeholdt i sporet. Men selvom studier peger på, at det ofte vil ske, er det naturligvis ikke sikkert, at hele klassen eller de fleste elever vil eller kan udvikle netop disse praksisser. Dvs. at selvom læringsspor som *fælles matematiske praksisser* giver læreren en retning at styre efter i undervisningen, så skal læreren altid tjekke sine forventninger til eleverne med det, som sker i klassen (Gravemeijer et al., 2000). Det spor, der realiseres i undervisningen, kan altså komme til at se anderledes ud end det hypotetiske. Dette er en generel udfordring ved brug af læringsspor, men fordi *fælles matematiske praksisser* udpeger en følge af både matematiske praksisser og matematiske midler, så har læreren mulighed for at teste, tilpasse og ændre følgen og midlerne over tid i sine egne klasser, evt. i samarbejde med kolleger, så forskellen mellem det hypotetiske og det realiserede spor med tiden kan mindskes.

Det emergerende perspektiv

Et vigtigt aspekt af *fælles matematiske praksisser* er, som tidligere nævnt, at en classes faglige og sociale miljø ses som afgørende for etablering af et læringsspors matematiske praksisser (Lobato & Walters, 2017). Denne opfattelse bygger på et bestemt perspektiv – det emergerende perspektiv – på matematikfaglig udvikling i et klasserum (Cobb et al., 2001). I dette perspektiv ses en classes kultur fra både et socialt perspektiv – fælles processer i klassen – og et psykologisk perspektiv – de enkelte elevers aktiviteter og forestillinger, når de deltager i fælles processer (Cobb et al., 2001) (se figur 2). De to perspektiver er refleksivt relaterede, og pointen er, at de er “så fuldstændig integreret i hinanden at ingen af dem kan forstås uden at medtænke den anden” (Skott, 2008, s. 53).

Det sociale perspektiv	Det psykologiske perspektiv
Sociale normer i klassen	Forestillinger om ens egen og andres rolle i klassen og om den generelle karakter af at have matematik i skolen
Sociomatematiske normer i klassen	Forestillinger om og værdier knyttet til matematik og matematisk aktivitet
Klassens matematiske praksisser	Den enkeltes matematiske tænkning om begreber og aktiviteter

Figur 2. Cobb og Yackels (1996) model for analyse af en classes kultur (s. 177).

Den første række i modellen handler om de sociale normer, der udvikles i en matematikklasse, for, hvordan man er sammen og opfører sig generelt. Normerne kan også gælde i andre fag end matematik, fx en norm om, at man er forpligtet til at forsøge at forstå andres forklaringer. Den anden række handler om sociomatematiske normer, der specifikt relaterer sig til matematiske aktiviteter. Sociomatematiske normer handler om, hvad matematik er, og hvordan man arbejder med faget i en klasse, fx normer for, hvad der tæller som en god matematisk forklaring, eller hvad der er et gyldigt matematisk ræsonnement. Den tredje række angår de matematiske praksisser, der etableres i en klasse. Elever reorganiserer deres egne forståelser af indholdet, fx af ligninger og deres løsning, når de deltager i disse praksisser, og det bidrager til at skabe nye praksisser. En classes normer er afgørende for, hvordan den enkelte elev deltager i klassens matematiske praksisser, og dermed for de læringsmuligheder, der skabes i klassen.

Som eksempel på det refleksive forhold mellem det sociale og det psykologiske ser vi på en 3.-klasse, der i deres arbejde med *At løse ligninger* diskuterer, hvordan $38 + x = 80$ kan løses. En elev, Sofie, foreslår: “Vi kan tænke på, hvilket tal vi skal lægge til 38

for at få 80". Sofie synes at have forstået opgaven og tillægger x en form for mening. Læreren kan reagere på flere måder, fx: "Sofie siger, at vi kan tænke på x som et tal, vi endnu ikke kender, men vi ved, at når vi lægger tallet til 38, bliver resultatet 80. Lad os prøve at løse ligningen på denne måde" eller "Tak, Sofie. Har I andre idéer?". Den måde, læreren reagerer på, kan få betydning både for de læringsmuligheder, der etableres i klassen, og for Sofies læring og fremtidige deltagelse i fælles diskussioner. Reagerer læreren på den første måde, kan klassen arbejde videre med Sofies forslag og (måske) etablere en praksis om, at sådanne ligninger kan løses ved at beregne – altså ved at finde forskellen mellem 38 og 80. Læreren anerkendelse kan samtidig få en positiv betydning for Sofies fremtidige deltagelse i fælles diskussioner. Reagerer læreren på den anden måde, kan læringsmulighederne knyttet til Sofies bidrag – både de sociale og de psykologiske – risikere at gå tabt, og hvis dette mønster ofte gentager sig, kan Sofie med tiden udvikle en forestilling om sin rolle i klassen som ikke-vigtig. I den forstand er der tale om et refleksivt forhold mellem en klasses normer og matematiske praksisser og de enkelte elevers forestilling om deres egen rolle og faglige tænkning.

Ifølge Lobato og Walters (2017) er der størst sandsynlighed for at kunne realisere læringsspor som *fælles matematiske praksisser* i klasser, hvor de sociale og sociomatematiske normer stemmer overens med en såkaldt *reformorienteret tilgang* til matematikundervisningen (Børne- og Undervisningsministeriet, 2015; NCTM, 2000). Dvs. at normerne skal afspejle en klassekultur, hvor eleverne lytter til og prøver at forstå hinandens matematiske forklaringer og spørger konstruktivt, hvis de ikke forstår. Kommunikation og ræsonnementer skal være præget af nysgerrighed og gensidig respekt for hinandens bidrag og med fokus på at forstå matematikken og blive kloge på faget sammen.

Forskningsmæssigt er det stadig uklart, hvordan lærere kan støttes mere direkte i at realisere denne tilgang til læringsspor, særligt i forhold til valg af opgaver og symboliseringer. Her læner vi os op ad den fagdidaktiske skole *Realistic Mathematics Education (RME)* (Gravemeijer, 2020), der foreslår tre designprincipper: *guidet genopdagelse*, *didaktisk fænomenologi* og *emergerende modellering*. Vores begrundelse for at vælge disse tre principper er, at de også har inspireret Cobb og hans kolleger og andre, der arbejder med designstudier. Vi beskriver og eksemplificerer designprincipperne i det følgende.

Designprincipper

Designprincip 1: Guidet genopdagelse

Det første princip bygger på Freudenthals idé fra 1973 om, at eleverne skal opleve matematik som en menneskelig aktivitet (Gravemeijer, 2020). Undervisningens mål skal derfor støtte processer af genopdagelse, hvor eleverne guides af bl.a. læreren til

gradvist at formalisere deres uformelle forståelser og intuitioner (Gravemeijer et al., 2000). Mere præcist er idéen, at eleverne skal deltage i fælles processer, som i en vis udstrækning er parallelle med den historiske udvikling af matematik (inkl. potentielle barrierer, blindgyder og gennembrud), og at aktiviteterne skal tage udgangspunkt i realistiske problemer, som eleverne kan forestille sig og tænke i med den matematik, de kan i forvejen (se også designprincip 2). For Freudenthal er matematisering en nøgleproces i genopdagelsesprincippet, ligesom matematisering også spiller en central rolle i matematikkens historiske udvikling og for matematikere.

Hele læringssporet *At løse ligninger* kan ses som ét eksempel på guidet genopdagelse. Idéen er, at en klasse gradvist formaliserer deres forståelser af ligninger og uformelle løsningsstrategier, og at det sker via matematisering i forbindelse med realistiske problemer og senere mere algebraiske problemer. Målet er, at klassen i slutningen af læringssporet kan forstå ligninger som algebraiske udtryk og løse dem algebraisk ved brug af *fjern og isolér*. Læringssporets guidede genopdagelse er ikke primært inspireret af matematikkens historiske udvikling, men af typiske elevløsninger af uformel karakter og af matematikdidaktiske analyser og forskning i ligninger og ligningsløsning, særligt Radford (2022). Disse tre inspirationskilder kan alle ifølge Gravemeijer et al. (2000) inspirere en guidet genopdagelsesproces.

Designprincip 2: Didaktisk fænomenologi

Det andet designprincip handler om at fortolke matematiske fænomener didaktisk og derved gøre dem tilgængelige for elever, så eleverne kan beskrive, ræsonnere og handle på dem fra et matematikfagligt perspektiv (Gravemeijer et al., 2000). Mere præcist er målet med en didaktisk fænomenologisk undersøgelse at skabe rammer for, at elever i fællesskab kan udvikle stadig mere sofistikerede løsninger på problemer via matematiseringer. Fokus er især på realistiske problemer (vores oversættelse af *experimentally real problems*), og kernen i designprincippet er at udarbejde eller udvælge dem.

I forbindelse med et realistisk problem kan elever forestille sig de involverede fænomener i en sådan grad, at fænomenerne opleves som reelt eksisterende. Eleverne kan derfor handle og tænke i og med dem på meningsfulde måder ud fra det, de kan. Et problem vil derfor typisk være en hverdagssituation eller et fiktivt scenarie, men det kan også – særligt for dygtige elever – omfatte matematiske fænomener (Gravemeijer et al., 2000). Idéen er, at problemet skal gøre det muligt for eleverne at matematisere noget velkendt og for dem reelt eksisterende og derigennem udvikle matematiske forståelser.

I *At løse ligninger* er ligningssituationen med Alma og Sofus og deres indsamling af karameller til sidste skoledag (se ovenfor) et eksempel på et realistisk problem for 3.- og 4.-klasser. I starten af læringssporet matematiserer en klasse sådanne lignings-

situationer ved at gengive deres aktiviteter og relationer med konkrete materialer med støtte fra læreren. Senere matematiserer klassen mere komplicerede ligningssituationer, ikke med konkrete materialer, men med tegninger, regneudtryk og algebraisk notation. I læringssporet er det således centralt at udarbejde og udvælge passende ligningssituationer, som eleverne kan leve sig ind i og matematisere.

Designprincip 3: Emergerende modellering

En central antagelse i det tredje designprincip er, at elever udvikler matematisk forståelse, samtidig med at de arbejder med nye symboliseringer af en idé eller et begreb (Gravemeijer, 2020). Historisk set har man udviklet formelle symboliseringer såsom algebraisk notation med udgangspunkt i uformelle aktiviteter i specifikke kontekster og over lang tid. Det er sket i en refleksiv proces, hvor nye matematiske meninger og nye symboliseringer blev udviklet samtidig; først udviklede man forståelser ved at arbejde med bestemte symboliseringer, så udviklede man nye symboliseringer til at indfange ens nye indsigt, og dernæst begyndte processen forfra (Gravemeijer, 2020). I designprincippet er det derfor centralt både "at bygge op fra elevernes indledende uformelle aktiviteter til konventionelle måder at symbolisere på" (Gravemeijer et al., 2000, s. 29, vores oversættelse) og at støtte en proces, hvor symboliseringer og matematisk forståelse udvikler sig sammen. Dette skal ses i modsætning til den måde, symboliseringer og modeller typisk bruges på i matematikundervisningen, hvor de bruges til at give krop og strukturer til matematiske begreber og relationer og derfor præsenteres før eller samtidig med disse (Gravemeijer et al., 2000; Verschaffel et al., 2007).

I RME bruges ordet model bredt om både sproglige beskrivelser og måder at symbolisere og notere på. En model referer til noget holistisk og dynamisk, mens de symboliseringer, der indgår i modelleringsprocessen, og som udgør modellen, kan ændre sig over tid (Gravemeijer et al., 2000). Gravemeijer og kolleger bruger dog ofte modeller og symboliseringer i flæng, hvilket vi til dels også gør.

Gravemeijer et al. (2000) fik idéen til emergerende modellering i et studie, hvor eleverne først brugte den åbne tallinje til at modellere beregninger, som svarede til deres uformelle aktiviteter i problemets kontekst. Senere brugte eleverne tallinjen til at modellere og symbolisere deres beregninger baseret på relationer mellem tallene og uden at støtte sig til en kontekst. Dette pegede på et skift i modellens betydning for eleverne: fra at bruge den åbne tallinje som *model af* det konkrete problem til at bruge den som *model for* deres tænkning om nye situationer.

Designprincippet opfordrer til at konstruere en sekvens af modeller, der kan emergere i en klasse med lærerens støtte. Eleverne bør kunne udvikle deres brug af én af sekvensens modeller fra *model af* problemet til *model for* deres tænkning om sådanne problemer, så de har denne model at "falde tilbage" på. Idéen er, at hver model i sekvensen bygger på den forrige model i den forstand, at den nye model skal give

klassen muligheder for at handle på nye måder i forhold til det matematikfaglige indhold, samtidig med at klassen stadig kan handle, som de gjorde med den forrige model. Derfor kan en ny model opstå som løsning på et problem, der har rod i aktiviteter med den forrige model (Gravemeijer, 2020). Da nye modeller imidlertid sjældent emergerer af sig selv i en klasse, er det ofte nødvendigt, at læreren introducerer nye symboliseringer/modeller, der passer med elevernes tænkning. Indimellem kan læreren trække på elevforslag til modeller, der er i tråd med den nye model. Det er vigtigt at bruge problemer, der støtter emergering af bestemte modeller, og at læreren og klassen taler om de symboliseringer/modeller, som læreren introducerer, eller eleverne foreslår (Gravemeijer et al., 2000).



$$\begin{array}{ccc} \square & 10 = & \square \\ \square & & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot \square + 10 = \square + 30 \\ \square + 10 = 30 \end{array}$$

$$2x + 10 = x + 30$$

$$x + 10 = 30$$

$$x = 20$$

Figur 3. *Sekvens af modeller i At løse ligninger.*

Et eksempel på emergende modellering er den sekvens af tre modeller, der med lærerens støtte forventes at kunne opstå i en classes arbejde med *At løse ligninger*. Den består af konkrete materialer, tegninger og algebraisk notation (se figur 3). Først

arbejder klassen med konkrete materialer, fx papirposer og karameller (eller andre genstande, der kan komme i poser). Med disse materialer kan klassen modellere en ligningssituation, fx den om Alma og Sofus og deres karameller, ved konkret at vise de poser og karameller, de to børn har i situationen. Klassen kan dernæst forsøge at løse problemet. Erfaringen viser, at nogle elever med stor sandsynlighed vil komme på en strategi, hvor de ser bort fra den pose og de løse karameller, begge børn har, eller også kan læreren støtte dem til det – dvs. de udvikler en sammenligningsstrategi. Denne strategi er vigtig, da den baner vej for *fjerne*-strategier, men den bliver uoverskuelig for eleverne at bruge, når der er mange poser og karameller. Læreren kan derfor introducere den anden model – med lighedstegn og tegninger (af poser og karameller) – som løsning på denne uoverskuelighed. Eleverne kan stadig sammenligne, men lighedstegnet giver struktur, og det bliver mere oplagt at fjerne det fælles på begge sider af lighedstegnet ved at strege eller hviske det ud. Den nye model ansporer således til nye handlinger: at fjerne det samme på begge sider og at fjerne, indtil der kun er én pose tilbage. Idéen er, at klassens brug af tegninger kan skifte fra at være en *model af* en ligningssituation og elevernes uformelle aktiviteter til at være en *model for* deres tænkning om, hvordan ligninger kan løses. En svaghed ved tegninger er, at det er vanskeligt at modellere ligninger, der involverer subtraktion eller negative koefficienter. Denne svaghed kan den tredje model, algebraisk notation, løse, samtidig med at den gør det muligt for klassen at fjerne det fælles, som de gjorde før, og at udvikle nye fjernestrategier.

Sammenhæng og progression i indsatsen

Vi vil nu eksemplificere, hvordan vi med tilgangen *fælles matematiske praksisser* har søgt at skabe sammenhæng og progression i udvalgte dele af tal- og algebraområdet. Læringssporet *At løse ligninger* (3.-6. klasse), der har været brugt som gennemgående eksempel, beskriver faglige sammenhænge og progressioner i den indledende ligningsløsning. For det første har vi beskrevet en faglig progression i den indledende ligningsløsning som en følge af fire matematiske praksisser (se faserne i figur 4), i overensstemmelse med læringsspor som *fælles matematiske praksisser*. For det andet har vi udpeget midler, der forventes at kunne støtte en klasses udvikling af disse fire matematiske praksisser, også i overensstemmelse med læringsspor-tilgangen. De udpegede midler knytter an til designprincippet om emergerende modellering og beskriver en sekvens af tre sammenhængende modeller/symboliseringer, der forventes at kunne emergere i en klasses arbejde med læringssporet med lærerens hjælp. For det tredje har vi beskrevet, hvordan de to øvrige designprincipper – guidet genopdagelse og didaktisk fænomenologi – har støttet udarbejdelsen af læringssporet og dets faglige progression. En samlet oversigt over *At løse ligninger* er vist i figur 4. Her ses

AT LØSE LIGNINGER

FAGLIGT UD GANGSPUNKT

Erfaringer med de fire regningsarter, herunder med modsatte regningsarter, fx

$$22 - 7 = 15$$

fordi $15 + 7 = 22$

Erfaringer med at sammenligne og begrunde, hvorfor nogle regneudtryk har samme værdi, fx

$$10 + 1 = 9 + 2, 15 + 8 = 10 + 13$$

og $2 \cdot 7 = 7 + 7$

FASER I LÆRINGSSPORET



FASE 1

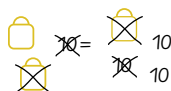
At løse ligninger, der har form som lignings-situationer, **ved at bruge uformelle strategier** og med støtte i **konkrete materialer**.

Sofus og Alma har samlet lige mange karameller til sidste skoledag. De lægger det samme antal karameller i 3 papirposer. Sofus tager 2 poser og har desuden 10 karameller mere, mens Alma tager 1 pose og har 30 karameller mere. De spørger klassen om de kan finde ud af, hvor mange karameller, der er i hver pose?



FASE 2

At løse ligninger, der har form som lignings-situationer, **ved at bruge fjerne-strategier** og med støtte i **tegninger**.



FASE 3

At løse ligninger, der er skrevet som algebraiske udtryk, **ved at bruge fjern og isoler metoden** og med støtte i **tegninger og algebraisk notation**.

$$2 \cdot \boxed{x} + 10 = \boxed{x} + 30$$

$$\boxed{x} + \cancel{10} = \cancel{30} - \cancel{10} \quad 20$$

FASE 4

At løse ligninger, der er skrevet som algebraiske udtryk, **ved at bruge fjern og isoler metoden** og med støtte i **algebraisk notation**.

$$2x + 10 = x + 30$$

$$x + 10 = 30$$

$$x = 20$$

FORSLAG TIL VIDERE ARBEJDE

At løse ligninger med rationale tal og ubekendte, fx

$$2 = 6 - \frac{4}{x} \text{ og } 2(x+9) = x + 16$$

At løse uligheder, fx

$$5x \leq x + 78$$

Ræsonnere om ligninger, der ikke har nogle løsninger, fx $3x - 1 = 4 + 3x$ eller har mange løsninger, fx $7(x+4) - 8 = 7x + 20$



www.matematikdidaktik.dk

NO

Figur 4. Oversigt over At løse ligninger (3.-6. klasse).

desuden det faglige udgangspunkt, en klasse bør have, før de starter på læringssporet, og forslag til emner, der (på senere klassetrin) bygger oven på læringssporet. Alt i alt illustrerer oversigten og læringssporet faglige sammenhænge og progressioner i den indledende ligningsløsning.

Ud over at beskrive faglig sammenhæng og progression i de enkelte læringsspor beskriver vi det også i et mere langstrakt perspektiv. Dette involverer flere læringsspor og adresserer fx overgange mellem grundskolen og ungdomsuddannelserne. Denne mere langstrakte progression eksemplificerer vi også med ligninger og ligningsløsning. I de første fire læringsspor til grundskolen (se matematikdidaktik.dk) kan en klasse udvikle forudsætningerne for at arbejde med *At løse ligninger* (3.-6. klasse), nemlig at addere, subtrahere, multiplicere og dividere tal (primært naturlige og hele tal) og at kunne sammenligne og begrunde regneudtryk. *At løse ligninger* er det eneste læringsspor i grundskolen med direkte fokus på ligninger og ligningsløsning. Selvom læringssporet primært handler om hele tal, så er dets fokus på de idéer og tænkemåder, der er grundlæggende for ligningsløsning mere generelt. Læreren kan derfor trække på disse idéer og tænkemåder i en classes videre arbejde med emnet. To andre læringsspor – *At behandle algebraiske udtryk* (7.-9. klasse) og *At sammenligne lineære funktioner* (8.-9. klasse) – kan støtte en classes konsolidering og videreudvikling af deres forståelse af ligninger og deres løsning, selvom læringssporenes primære fokus er et andet. *At behandle algebraiske udtryk* har fokus på at opstille, fortolke, omskrive og beregne med algebraiske udtryk, hvoraf nogle er ligninger. En klasse får derved mulighed for at styrke deres kompetencer til at kunne manipulere symbolsk, hvilket er en central forudsætning for at kunne løse ligninger algebraisk. *At sammenligne lineære funktioner* har fokus på lineære funktioner, men her spiller det at kunne løse reelle ligninger (dvs. ligninger med brøker) grafisk og algebraisk en vigtig rolle. Hvis ikke før, kan en klasse udvikle deres *ffjern og isolér*-metode til også at kunne fjerne ved at multiplicere med det samme på begge sider og dermed løse reelle ligninger. Målet er således, at eleverne, når de forlader grundskolen, har en grundlæggende forståelse af, hvad ligninger er, og kan løse reelle lineære ligninger grafisk og algebraisk ved en reflekteret brug af *ffjern og isolér*-metoden.

I læringssporet *At løse ligninger* for gymnasiet bygges direkte videre på elevernes erfaringer med lineære ligninger fra grundskolen. I dette læringsspor skifter fokus fra det aritmetiske til det algebraiske. Der lægges fx op til at udlede ligningen for den rette linje algebraisk ved at løse to ligninger med to ubekendte og at udvikle *ffjern og isolér* til *reducér og isolér*, som også har fokus på at reducere ligningerne, og som er central i løsningen af algebraiske ligninger. I dette læringsspor er en vekslen mellem algebraiske og grafiske løsninger central, og ud over lineære ligninger inddrages ikke-lineære ligninger og ligningssystemer.

Dette læringsspor – og de andre læringsspor i gymnasiet og på erhvervsuddannelserne – er også af typen *fælles matematiske praksisser*, og de bygger også på de

samme designprincipper som dem i grundskolen. Dvs. at ud over at støtte en langstrakt faglig progression, som eksemplificeret ovenfor, så understøtter denne sammenhæng mellem læringssporene også, at lærerne kan tale sammen om faglig sammenhæng og progression på tværs af de forskellige uddannelser.

Diskussion og konkluderende bemærkninger

I artiklen har vi behandlet det didaktiske problemfelt, der handler om at beskrive faglig sammenhæng og progression i matematikundervisningen og at gøre det på måder, der kan støtte en realisering af disse i praksis. Vi har beskrevet en nyere gren af matematikdidaktisk forskning, læringsspor, der netop forsøger at bidrage til løsning af dette problem, men som er relativt ukendt i Danmark på trods af stor international udbredelse. Dette forskningsfelt indeholder forskellige tilgange til læringsspor, som vi har skitseret, og blandt dem har vi valgt tilgangen *fælles matematiske praksisser*, der er begrundet og beskrevet i detaljer. Vi afrunder artiklen med at diskutere styrker og udfordringer ved denne tilgang i forhold til det didaktiske problemfelt, som er artiklens omdrejningspunkt.

Vi opsummerer tre styrker ved læringsspor som *fælles matematiske praksisser*. Den første styrke er dets fokus på udvikling af en hel classes læring uden at tabe den enkelte elev af syne. Matematiske praksisser udgør passende pejlemærker for undervisningen, fordi de på den ene side er så brede, at det giver plads til de enkelte elevers faglige forskelligheder, men på den anden side er så tydelige, at det står klart, hvad undervisningen sigter imod for hele klassen. Den anden styrke er, at tilgangen beskriver faglig progression i undervisningen og udpeger midler, der kan understøtte denne progression, som lærere kan læne sig op ad. En så omfattende hjælp er sjældent en del af læringsspor med andre tilgange og som regel heller ikke en del af lærebogs-materialer (Gissel et al., 2019). Den tredje styrke er, at tilgangen harmoniserer med de tanker, som en lærer alligevel bør gøre sig om undervisning, såsom: Hvor skal klassen som helhed hen fagligt? Hvad kan størstedelen af eleverne allerede?

Vi peger også på tre udfordringer ved tilgangen *fælles matematiske praksisser*. Den første udfordring er, at forskningen i *fælles matematiske praksisser* stadig er i sin vorden. Særligt på ungdomsuddannelserne er den begrænset, mens der er mere på grundskoleområdet. Forskningen er imidlertid koncentreret om få emner, såsom indledende talforståelse og talbehandling, tidlig algebra (fx Kaas, 2019, 2022), funktioner og statistik. Derudover præsenteres konkrete sekvenser af emergerende modellering kun i få studier. Derfor har vi i udarbejdelsen af læringssporene også trukket på andre empiriske forskningsresultater og tolket dem ind i den valgte tilgang, samtidig med at vi har tilpasset tilgangen og resultaterne til en dansk kontekst.

Den anden udfordring handler om, hvorvidt der kun er én følge af matematiske

praksisser, der kan føre fra et fagligt udgangspunkt til et mål. Lobato og Walters (2017) fremhæver, at det emergerende perspektiv på den ene side anerkender diversiteten i elevernes bidrag gennem metaforen om, at eleverne deltager forskelligt i de matematiske praksisser. På den anden side er det uklart, om de enkelte elevers fortolkninger kan være så forskellige fra den normative måde at deltage i klassens faglige fællesskab på, at der reelt er tale om mere end én praksis. Mens dette er en kritik, der også kan rejses mod de andre tilgange til læringsspor, så er den særlig central i forhold til *fælles matematiske praksisser*, fordi progressionen her tolkes som følger af matematiske praksisser, der opstår i klassen, afhængigt af bl.a. elevernes bidrag og deltagelse. Det synes imidlertid også af andre grunde usandsynligt, at der kun er én følge af praksisser fra et givent udgangspunkt til et mål. Forskere er fx grundlæggende uenige om central aspekter af faglig progression, såsom hvornår algebraiske symboler bør introduceres i matematikundervisningen. Dette rokker imidlertid ikke ved, at de følger, som vi foreslår i læringssporene, udpeger én mulig faglig progression, der kan guide læreren i undervisningen.

Den tredje udfordring handler om, at *fælles matematiske praksisser* er tæt relaterede til reformorienterede klasserum. Nemlig det, at tilgangen "forudsætter et undersøgelsesorienteret klasserum, hvor fælles faglige diskussioner spiller en stor rolle, og hvor sociale normer for at forklare og begrunde sin tænkning og forhandling af andres idéer er til stede" (Lobato & Walters, 2017, s. 87, vores oversættelse). Uden disse normer kan et læringsspor reduceres til en a priori-liste af aktiviteter, som læreren kan igangsætte. Det er en central udfordring, da den dominerende undervisningstilgang i Danmark og mange andre lande ikke synes at have denne karakter (se fx Bundsgaard & Hansen, 2018), og det kompliceres yderligere af, at en sådan tilgang er kompleks at etablere i praksis af flere forskellige grunde. I vores optik overskygger styrken ved, at lærings-sporene viser, hvordan faglig progression kan se ud i et reformorienteret klasserum, imidlertid denne udfordring. Vi forestiller os – og håber – at indsatsens læringsspor netop kan være med til at støtte en sådan udvikling af matematikundervisningen i Danmark.

Matematikundervisningen i de lande, der typisk scorer højt i internationale undersøgelser såsom TIMSS og PISA, har bl.a. det tilfælles, at det matematikfaglige fokus er på relationer mellem centrale matematiske begreber, idéer m.m. (Stigler & Hiebert, 2009). Dette understøttes af Ma (2010), der viser, at kinesiske lærere typisk har udviklet *knowledge packages* på udvalgte områder, dvs. billeder af, hvordan centrale matematiske begreber og idéer indbyrdes er forbundne, og hvad det er vigtigt, at eleverne lærer før noget andet. Det tyder altså på, at det er væsentligt, at lærere har et tydeligt billede af centrale matematikfaglige sammenhænge og progressioner inden for forskellige faglige områder. Det er det, som vi håber at kunne bidrage med i form af læringssporene, og vi håber, at dette på sigt kan medvirke til, at danske elever i

grundskolen og på ungdomsuddannelserne udvikler mere solide forståelser inden for tal og algebra. På <https://matematikdidaktik.dk/tal-og-algebra/vejledning-til-faelles-indsats-for-tal-og-algebra/anvendelse-af-laeringssporene> er der inspiration til, hvordan man kan arbejde med læringssporene i praksis.

Referencer

- Bundsgaard, J. & Hansen, T.I. (2018). Blik på undervisning. I J. Bundsgaard, M. Georgsen, S.T. Graf, T.I. Hansen & C.K. Skott (red.), *Skoleudvikling med IT* (s. 106-142). Aarhus Universitetsforlag.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2015). *Fælles mål for faget matematik*. <https://emu.dk/grundskole/matematik/faghaefte-faelles-maal-laeseplan-og-vejledning>
- Clements, D.H. & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math: The learning trajectory approach* (3. udg.). Routledge.
- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(1), 5-43. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_1
- Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. I A.E. Kelly, R.A. Lesh & J.Y. Baek (red.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (s. 68-95). Routledge.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9729-3_9
- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3-4), 175-190. <https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265>
- Confrey, J., Maloney, A.P. & Corley, A.K. (2014). Learning trajectories: A framework for connecting standards with curriculum. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 46(5), 719-733. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0598-7>
- Confrey, J., Maloney, A.P. & Nguyen, K. (2014). Learning trajectories in mathematics. I A.P. Maloney, J. Confrey & K. Nguyen (red.), *Learning trajectories in mathematics* (s. xi-xxii). Information Age Publishing.
- Gissel, S.T., Hjelmberg, M., Kristensen, B.T. & Moeskær Larsen, D. (2019). Kompetencedækning i analoge matematiksystemer til mellemtrinnet. *MONA*, 2019(3), 7-27. <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/115580/163893>
- Gravemeijer, K. (2020). Emergent modeling: An RME design heuristic elaborated in a series of examples. *Education Designer*, 4(13), 1-31. https://www.researchgate.net/profile/Koeno-Gravemeijer/publication/344057779_Emergent_Modeling_an_RME_Design_Heuristic_Ela

- borated_in_a_Series_of_Examples/links/5f4f6ea892851c250b8b2b75/Emergent-Modeling-an-RME-Design-Heuristic-Elaborated-in-a-Series-of-Examples.pdf
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J.W. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. I P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (red.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (s. 225-273). Lawrence Erlbaum Associates.
- Huang, X., Huang, R., & Skott, C. K. (2023). Research-informed instruction through lesson study: A case of boundary crossing. *International Journal of Science and Mathematics Education*. Published online.
- Kjeldsen, C.C., Kristensen, R.M. & Christensen, A.A. (2019). *Matematik og natur/teknologi i 4. klasse. Resultater af TIMSS-undersøgelsen 2019*. Aarhus Universitetsforlag.
- Kaas, T. (2019). Tilgange til tidlig algebra. *Nordic Studies of Mathematics Education*, 24(3-4), 15-41. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2021/10/24_34_015042_kaas.pdf
- Kaas, T. (2022). *Tidlig algebra i grundskolens matematikundervisning*. Ph.d.-afhandling. DPU, Aarhus Universitet.
- Lobato, J. & Walters, D. (2017). A taxonomy of approaches to learning trajectories and progressions. I J. Cai (red.), *The compendium for research in mathematics education* (s. 74-101). National Council of Teachers of Mathematics.
- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Potari, D., Psycharis, G., Sakonidis, C. & Zachariades, T. (2019). Collaborative design of a reform-oriented mathematics curriculum: Contradictions and boundaries across teaching, research, and policy. *Educational Studies in Mathematics*, 102(3), 417-434. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9834-3>
- Radford, L (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 54, 1151-1167. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x>
- Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. <https://doi.org/10.2307/749205>
- Skott, C.K., Christensen, B.K., Zacho, L., Thompson, M., Teglskov, R., Øhrstrøm, A., Rønne, M., Riisgaard, T.B., Tange, B., Granerud, L.S., Hørup, L.A., Winsløw, C., Sunde, P.B. & Brockhoff, P. (2022). *Fælles udvikling af matematik: Om udfordringer og mulige løsninger i forhold til matematik i grundskolen, på de gymnasiale uddannelser og på erhvervsuddannelserne*. Børne- og Undervisningsministeriet.
- Skott, J. (2008). Introduktion til Paul Cobbs matematikdidaktiske arbejde. *MONA*, 2008(4), 42-58. <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36629/37927>
- Skott, J., Skott, C.K., Jess, K. & Hansen, H.C. (2018). *Matematik for lærerstuderende. Delta 2.0 – fagdidaktik 1.-10. klasse*. Samfundslitteratur.

- Stigler, J.W. & Hiebert, J. (2009). Closing the teaching gap. *Phi Delta Kappan*, 91(3), 32-37. <https://doi.org/10.1177/003172170909100307>
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P.H. & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, 41(5), 147-156. <https://doi.org/10.3102/0013189X12442801>
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. I F.K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 557-628). National Council of Teachers of Mathematics.
- Wilson, P.H. (2014). Learning trajectories and professional development. I A.P. Maloney, J. Confrey & K.H. Nguyen (red.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (s. 227-242). Information Age Publishing.

English abstract

Coherence and progression play a central role students' learning of mathematics. However, it is difficult to describe such coherences and progressions in ways that can support their realization in the teaching of mathematics. Due to the challenges many students encounter in numbers and algebra, the Ministry of Children and Education has asked the National Center for Development of Mathematics teaching to develop a basis for a national initiative within this subject area in primary, secondary and vocational education. In the article, we discuss how learning trajectory – a relatively new research area – can contribute to solving this problem and we unfold and exemplify our approach, which is called collective mathematical practices.