Hvornår er ræsonnementer matematiske?


Kasper Højbjerg,
Københavns
Professionshøjskole


Mette Amalie Bundgaard,
Aarhus Universitet
og Københavns
Professionshøjskole

Kommentar til Emilie Madeline Hersaa Nehammer, Anna Louise Eriksen & Erik Ottar Jensens artikel: "Udvikling af matematisk ræsonnementskompetence gennem brætspillet Othello", MONA, 2024(3)

Spil og matematik har en lang historik, og i 1986 spurgte Ernest (1986) "Why use games in mathematics classrooms?" (s. 2). Ernest skitserer selv flere forskellige bud på dette, herunder udviklingen af problemløsningsstrategier, hvorunder det at ræsonnere indgår. Forfatterne til artiklen "Udvikling af matematisk ræsonnementskompetence gennem brætspillet Othello" dykker specifikt ned i mulighederne for at arbejde med matematiske ræsonnementer i forbindelse med spil i matematikundervisningen – ikke kun som en del af problemløsning. Artiklens fokus på hvordan ræsonnementsfremmende aktiviteter kan indgå i matematikundervisningen, er et velargumenteret og vigtigt bidrag der er med til at besvare Ernests spørgsmål. At spørge "hvad gælder så?", "hvordan kan du vinde?" eller "hvorfor gjorde du det?" når vi introducerer og spiller et spil, kræver netop at eleverne kan ræsonnere sig frem til svar på disse spørgsmål.

Dette fokus åbner i mellemtiden også op for en diskussion af hvad der menes med *matematiske* ræsonnementer når disse indgår i matematikundervisningen. Forfatterne sætter selv spørgsmålstegn ved om de ræsonnementer eleverne fremsætter, er matematiske ræsonnementer eller ej. I denne kommentar sætter vi yderligere fokus på dette spørgsmål, dog uden at kunne besvare det. Niss (2003) siger følgende om ræsonnementskompetencen: "… we are talking about mathematical reasoning, including proof and proving, not about reasoning in general like in general logic or in a court room" (s. 9). Niss har altså en tydelig skelnen mellem generelle og matematiske ræsonnementer, men samtidig er det stadig ikke tydeligt præcis hvilken rolle matematikken skal have i ræsonnementet. Er det fx nok at ræsonnementet bliver fremsat i forbindelse med matematikundervisning? Eller skal indholdet af ræsonnementet være matematisk? Og hvad vil det i det hele taget betyde at have et matematisk indhold? Kræver det et stoffagligt indhold? Skal det omhandle matematiske strukturerer eller idéer?

Én af årsagerne til overhovedet at arbejde med ræsonnementer i matematikundervisningen er at de peger frem mod den særlige måde som matematikken og matematikeren opbygger sin viden på: gennem deduktive slutninger og beviser (Stylianides, 2007, 2016). Men som Niss (2003) gør opmærksom på gennem sin skelnen mellem matematiske og generelle ræsonnementer, så kan logisk gyldige deduktive argumenter både have og ikke have et matematisk indhold. Nogle gange er det tydeligt at et ræsonnement ikke har et matematisk indhold. Fx er følgende et klassisk eksempel på et logisk gyldigt ræsonnement (en instansiering af modus ponens):

(P1) Hvis det regner, så er gaden våd
(P2) Det regner
(K) Altså er gaden våd

Dette ræsonnement er logisk gyldigt, hvilket netop også afspejler den deduktive natur af matematikerens viden: *Hvis* præmisserne er sande, så må konklusionen nødvendigvis være sand. Vi kan altså ikke være uenige i den logiske sammenhæng mellem disse tre udsagn, men vi kan naturligvis være uenige om præmissernes sandhed. Udbygger vi det ræsonnement som forfatterne diskuterer på side 39, får vi endnu en instansiering af modus ponens:

(P1*) Hvis du får alle hjørner, så er du sikret 28 gratis brikker
(P2*) Du får alle hjørner
(K*) Altså er du sikret 28 gratis brikker

Dette ræsonnement er ligeledes logisk gyldigt. Vi kan være uenige i mange ting vedrørende ræsonnementet, men hvis vi medgiver at præmisserne er sande, så følger det med logisk nødvendighed at konklusionen også er sand. Men hvis dette ræsonnement, modsat det ovenstående, er et *matematisk ræsonnement*, hvori består så forskellen? Forfatterne selv tager bl.a. fat i Jeannotte og Kierans (2017) definition af matematisk ræsonnement som "a process of communication with others or with oneself that allows for inferring mathematical utterances from other mathematical utterances" (s. 7). I så fald ville vi skulle sige at (P1*) på en eller anden måde er et matematisk udsagn, mens (P1) selvfølgelig helt åbenlyst ikke er. Men hvad er det der gør (P1*) til et matematisk udsagn, og kan vi overhovedet foretage en meningsfuld skelnen mellem matematiske udsagn og ikke-matematiske udsagn? Er (P1*) matematisk fordi en kardinalitet (28) bliver nævnt? I så fald åbner vi op for at mange ræsonnementer er matematiske – tænk bare på alle de situationer hvor der er forskellige kardinaliteter involveret: Der er to hold i en fodboldkamp, en ko har fire maver, og universet er (muligvis) uendeligt i udstrækning. Selv ville vi nok pege på at hjemmelen for udsagnet (P1*) er matematisk, men selv her ender vi i en gråzone, for er hjemmelen for (P1*) faktisk matematisk af natur, eller er det i virkeligheden udelukkende en konsekvens af de definerede spilleregler for Othello? Det giver helt sikkert mening at hævde at generelle ræsonnementer har at gøre med relationer mellem udsagn af ikke-matematisk karakter, og at følge Jeannotte og Kieran i at hævde at matematiske ræsonnementer handler om relationer mellem udsagn der er matematiske. Men for at substantiere denne definition har vi brug for at åbne en debat om hvad der gør et udsagn matematisk.

Uanset hvordan en sådan måtte udspille sig, er følgende betragtning dog vigtig. Man kan meningsfuldt hævde at elevernes arbejde med at forstå generelle ræsonnementer og logiske slutninger er givende, selv i matematikundervisningen, fordi der selvfølgelig er transferværdi fra de generelle slutninger til slutninger der omhandler et matematisk indhold. Selv hvis der under et spil i matematikundervisningen ikke direkte italesættes et matematisk indholdsområde som en del af ræsonnementet, er det værd at overveje den overførselsværdi der er mellem det generelle ræsonnement og det matematiske, hvormed spil i sig selv får en legitim plads i undervisningen.

Man kan således hævde at et fokus på generelle ræsonnementer har en støttende funktion i forhold til at forstå matematiske ræsonnementer. Hvis det er tilfældet, har det på mange måder en frigørende effekt. I så fald behøver vi ikke hele tiden stå til ansvar for om de ræsonnementer som eleverne udvikler i matematikundervisningen, er matematiske: Uanset indhold er de en stilladsering af en forståelse af en helt særlig type ræsonnement – det deduktive argument, som er så vigtigt i matematik.

Ovenstående skal dog ikke forstås som en "anything goes-approach", og at vi bare skal sætte eleverne til at spille spil og så ellers være ret ligeglade med hvilken slags ræsonnementer de udvikler og engagerer sig i. Som artiklen viser, er der et enormt potentiale i at bruge spil i undervisningen som en ræsonnementsfremmende aktivitet. Som med al anden matematikundervisning er det dog en vigtig pointe at læreren bør have for øje om formålet er de matematiske ræsonnementer eller de logiske, da dette er med til at skærpe lærerens bevidsthed om hvordan målet nås. En sådan overvejelse ville i visse tilfælde kunne legitimere at det ikke er det matematiske indhold der er læringsmålet, men i stedet processen at ræsonnere. Selve overvejelsen er dog betinget af en overvejelse om hvad det overhovedet vil sige at et ræsonnement har et matematisk indhold. Hvis vi kan blive skarpere på dette, kan vi samtidig stille mere fokuserede spørgsmål: Hvilke spil har potentiale til at eleverne ræsonnerer generelt (og hvordan)? Hvilke spil har potentiale til at eleverne ræsonnerer matematisk (og hvordan)? Dette medfører en mulighed for at anvende spil fokuseret i matematikundervisningen uden at det nødvendigvis kun er matematiske færdigheder som trænes.

Kommentaren her stiller flere spørgsmål end svar i forhold til hvad matematiske ræsonnementer er – både generelt og i spil. Den skal ses som et indspark i en diskussion som er nødvendig når vi taler om matematiske ræsonnementer, elevernes matematiske ræsonnementskompetence og matematikkens og spillenes rolle i dette.

Referencer

Ernest, P. (1986). Games: A rationale for their use in the teaching of mathematics in school. *Mathematics in School, 15*(1), 2-5. https://www.jstor.org/stable/30216298

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. I A. Gagatsis & S. Papastavridis (red.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (s. 1-12). https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=b7b50cfc513371b27ce0b90d4dc19e45b5c7828e

Stylianides, A.J. (2007). Introducing young children to the role of assumptions in proving. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(4), 361-385. https://doi.org/10.1080/10986060701533805

Stylianides, A.J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.