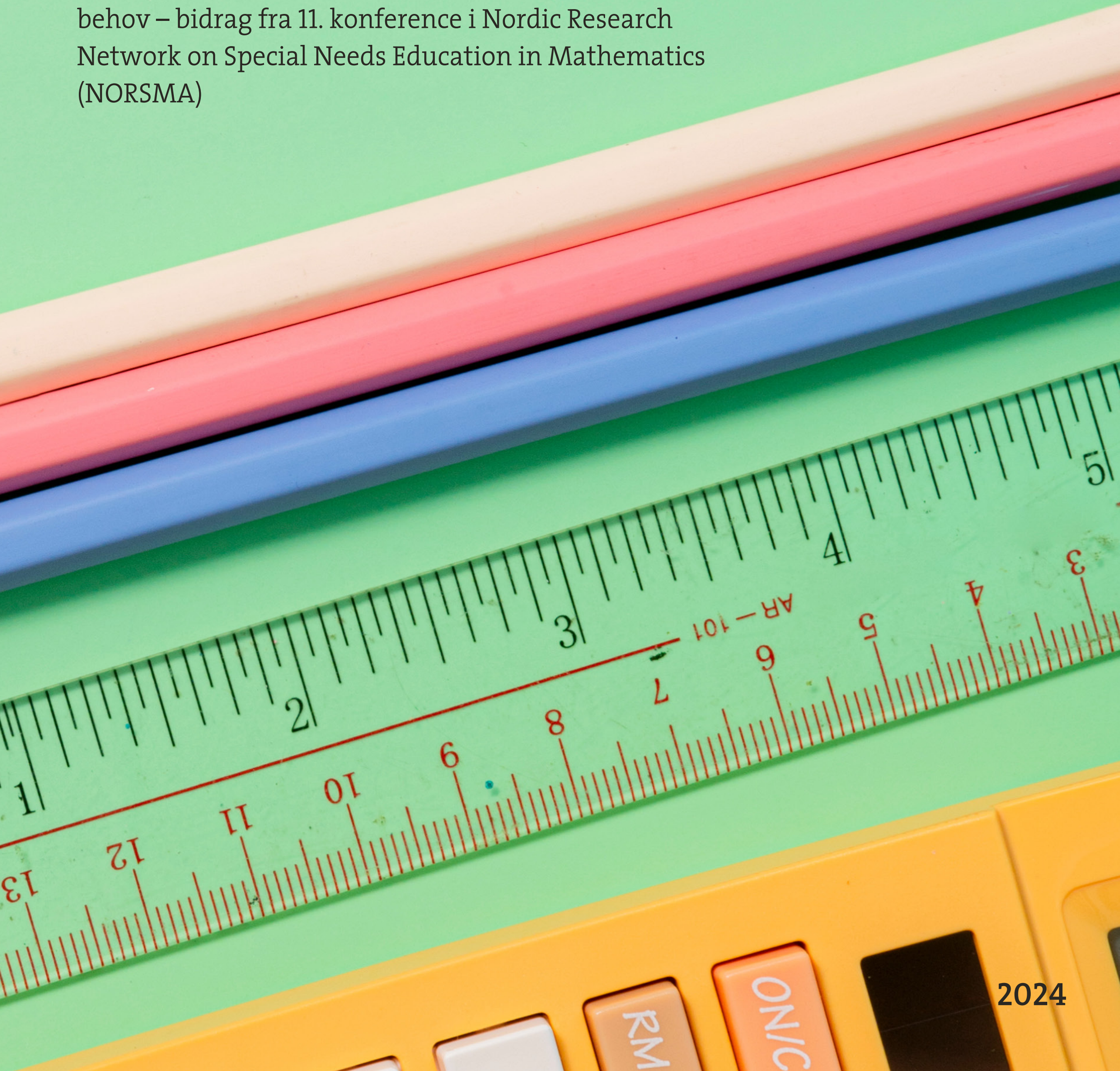
MONA

Matematik- og Naturfagsdidaktik – tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere

Særnummer:
Undervisning i matematik til elever med særlige behov – bidrag fra 11. konference i Nordic Research Network on Special Needs Education in Mathematics (NORSMA)



2024

MONA

Matematik- og Naturfagsdidaktik
– tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere

Syddansk Universitet

VIA University College

ABSALON
PROFESSIONSHØJSKOLEN ABSALON

AARHUS UNIVERSITET

KØBENHAVNS PROFESSIONSHØJSKOLE KP

UCL Erhvervsakademi og Professionshøjskole

DASG
Danske Science Gymnasier

KØBENHAVNS UNIVERSITET
NATUR- OG BIOVIDENSKAB

2024

MONA

Matematik- og Naturfagsdidaktik – tidsskrift for undervisere, forskere og formidlere

MONA udgives af Det Natur- og Biovidenskabelige Fakultet ved Københavns Universitet, i samarbejde med Det Tekniske Fakultet og Det Naturvidenskabelige Fakultet ved Syddansk Universitet, Hovedområdet Science & Technology ved Aarhus Universitet, Det Lærerfaglige Fakultet ved Københavns Professionshøjskole, UCL Erhvervsakademi og Professionshøjskole, Center for Skole og Læring ved Professionshøjskolen Absalon, VIA University College og Danske Science Gymnasier.

Redaktion for særnummer
Pia Tonnesen, Københavns Professionshøjskole & Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet
Pernille Ladegaard Pedersen, Læreruddannelsen i Aarhus, VIA University College)
Lena Lindenskov, DPU, Aarhus Universitet

Redaktion
Jens Dolin, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet (ansvarshavende)
Dorte Moeskær Larsen, Syddansk Universitet
Ole Goldbech, Københavns Professionshøjskole
Magnus Boye, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

Redaktionskomité
Bjørn Johannsen, Københavns Professionshøjskole
Brian Krog Christensen, Danske Science Gymnasier
Charlotte Krog Skott, Professionshøjskolen Absalon
Jette Reuss Schmidt, Læreruddannelsen i Aalborg, University College Nordjylland
Lars Brian Krogh, Læreruddannelsen i Aarhus, VIA University College
Marianne Achiam, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet
Martin Niss, Institut for Naturvidenskab og Miljø, Roskilde Universitet
Morten Rask Petersen, Anvendt Forskning i Pædagogik og Samfund, UCL
Tinne Hoff Kjeldsen, Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet

Manuskripter
Manuskripter indsendes per mail, se www.science.ku.dk/mona. Medmindre andet aftales med redaktionen, skal der anvendes den artikelskabelon i Word som findes på www.science.ku.dk/mona. Her findes også forfattervejledning. Artikler i MONA publiceres efter peer-review (dobbelt blindt).

Produktionsplan og deadlines for indsendelse af bidrag til MONA
Artikelmanuskripter og forslag til aktuelle analyser modtages løbende og behandles så hurtigt som muligt. Den redaktionelle proces (inkl. peer-review) tager mindst tre måneder. Deadlines aftales individuelt.

Layout og sats: Narayana Press

ISSN: 1604-8628. © MONA 2024

Citat kun med tydelig kildeangivelse

Indhold

4 Fra NORSMA-redaktionen

Artikler

11 Paria eller øjenåbner – om historiske skift i syn på talblindhed
Lena Lindenskov og Bent Lindhardt

23 Bedömning som omsorg om lärandet i de tidiga skolåren
Anette Bagger, Juuso Nieminen og Maria Walla

39 Specifika matematiksvårigheter – diagnos och pedagogiska och didaktiska anpassningar
Helena Roos, Ann-Louise Ljungblad og Jonas Walfridsson

50 Inkludering och likvärdighet i och genom matematikundervisning
Anette Bagger og Helena Roos

66 Posisjonering av elever som presterer lavt i matematikk: En styrkebasert flerkasusstudie av heterogene smågrupper
Anita Movik Simensen

81 Restructuring the university course Mathematics for All: An action research
Ósk Dagsdóttir og Edda Óskarsdóttir

95 Implementera en språklig teori för innehållsinkluderad matematikundervisning
Cecilia Segerby og Christina Svensson

110 Regnestrategier og de udfordrede elever i matematik – eksempel fra 6. klasse
Lóa Björk Jóelsdóttir og Pernille Bødtker Sunde

123 Perceived difficulty of numbers relates to self-reported achievement in adults
Pernille Bødtker Sunde, Pernille Pind og Peter Sunde

134 The dyscalculia simulator: A developmental project targeting teachers
Johan Kørvel Sørensen, Nina Genster, Jacob Frølund Davis, Simone Lindhøj Rasmussen og Pernille Bødtker Sunde

146 Styrkelse af elevers talforståelse – en tidlig og målrettet indsats i Helsingør Kommune
Mette Thompson

160 TALRO – et udviklingsprojekt om formodede talblinde elever
Bent Lindhardt

Fra NORSMA-redaktionen

Der er stadig en stor gruppe elever som ikke gives mulighed for at kunne deltage aktivt i matematik. Størrelsen af denne gruppe ser desværre ud til at være voksende gennem de senere år.

Det centrale er dog at forsknings- og udviklingsprojekter viser at der kan gøres noget for denne gruppe elever. Derfor er behovet for at mødes i en nordisk kontekst stadig centralt og måske vigtigere end nogensinde.

The eleventh Conference of The Nordic Research Network on Special Needs Education in Mathematics (NORSMA 11) blev afholdt den 23.-24. november 2023. Det var med deltagelse af forskere og lærere fra Sverige, Norge, Finland, Grønland, USA, Island, Belgien og naturligvis Danmark.

At vi for 11. gang samledes på tværs af landene for at vidensdele og præsentere vores perspektiver inden for feltet *special needs education in mathematics*, gav muligheder for igen at skabe et fælles nordisk perspektiv på feltet. Ligesom de tidligere konferencer behandlede NORSMA 11 vigtige spørgsmål inden for matematik, specialundervisningspolitik og praksis i alle de nordiske lande. Teorier, empiriske resultater og erfaringer fra praksis blev præsenteret, herunder både resultater fra allerede afsluttede udviklings- og forskningsprojekter og erfaringer fra igangværende arbejde.

Overordnet bidrog alle indlæg, præsentationer og diskussioner til de grundlæggende spørgsmål som: *Hvad menes der med specialundervisning i matematik? Hvordan karakteriserer man det at være i vanskeligheder i matematik? Og hvordan skaber/udvikler vi en matematikundervisning hvor alle får mulighed for at deltage og bidrage?*

Keynote-speakerne på konferencen var:
Professor Marie-Pascale Noël (Belgien) hvis oplæg havde titlen *Research on People With Dyscalculia: What Do We Know and Where Should We Go?* Oplægget tog afsæt i en gennemgang af dyskalkuli, hvad kendetegnene er, og hvordan der kan arbejdes med denne elevgruppe.

Professor David C. Gearys (USA) oplæg havde titlen *Early Development of Number Knowledge: Identifying Risk of Learning Disability*. Oplægget tog afsæt i Gearys egen forskning med særligt fokus på den tidlige talindlæring.

Professor Anette Baggers (Sverige) oplæg havde titlen *The Mathematics Is MInE Project*. Projektet MInE (Mathematics Education for Inclusion and Equity) behandler begreber for inklusion og ligeværd og diskuterer hvordan et inkluderende undervisningsmiljø i matematik kan skabes i en svensk kontekst.

Professor Helena Skyt Nielsens (Danmark) oplæg havde titlen *Effects of Mathematical Skills on Labour Market Outcomes and Life Conditions*. Altså hvilke konsekvenser matematikvanskeligheder kan få for eleverne videre i deres livsbane, fx når det gælder valg af uddannelse.

Alle fire foredrag er videooptaget og kan findes på NCUM's hjemmeside. Som det fremgår, er det særlige ved NORSMA-konferencen netop at det multidisciplinære felt bliver præsenteret med bidrag fra psykologiske, pædagogiske og didaktiske perspektiver inden for feltet samt forskellige aldersgrupper fra førskolen, skolen og ungdomsuddannelserne på konferencen. Det er det der gør konferencen unik og relevant i en international kontekst, og der er stor interesse for gensidig information og inspiration på tværs af de nordiske lande.

Ligesom ved foregående NORSMA-konferencer var der tilknyttet en Lærernes Dag med tre plenumforedrag og otte workshops med oplægsholdere fra Belgien, Norge og Danmark.

Efter konferencen blev de deltagere som havde holdt oplæg, tilbudt at formidle og uddybe i artikelform, som en fastholdelse af deres viden og erfaringer. Det er disse artikler der er indholdet i dette særnummer af *MONA*. Det blev til 12 artikler med meget forskellige perspektiver på feltet; men samlet nuancerer og bidrager de til en fællesgjort viden der forhåbentlig vil give mulighed for at skabe nye refleksioner og nye diskussioner som vi alle kan blive klogere af. Alle artikelbidrag har været gennem review organiseret af NORSMA-redaktionen: Pernille Ladegaard Pedersen, Pia Beck Tonnesen og Lena Lindenskov.

Tak til alle konferencedeltagere på NORSMA 11 og en særlig tak til alle bidragsydere til dette særnummer.

En oversigt over de 12 artikler kan ses i overblikket herunder.

På vegne af de danske repræsentanter for NORSMA,

Pia Tonnesen, Pernille Ladegaard Pedersen og Lena Lindenskov

Lena Lindenskov og Bent Lindhardt (Danmark): Paria eller øjenåbner – om historiske skift i syn på talblindhed

Denne artikel omhandler talblindhed i et historisk og nutidigt lys. Historisk set er formålet med artiklen at underbygge en række perspektiver på talblindhed fra lægfolk, uddannelsesinstitutioner, politikere og fagfolk. Fokus er på Danmark, og da det nordiske netværk NORSMA har været vigtigt og indflydelsesrigt for danske forskere og praktikere siden starten i 2000, inddrager vi uddybninger præsenteret i NORSMA. I et nutidigt lys er formålet med artiklen at skitsere den aktuelle situation for nationale initiativer om dyskalkuli i Danmark og at foreslå nogle årsager til at perspektiver blandt professionelle kan ændre sig fra skepsis til et balanceret syn på begreber om talblindhed som relevante for lærere, læreruddannere og forskere. Til sidst skitserer vi nogle idéer til intensiveret nordisk netværksaktivitet i NORSMA i den kommende tid.

Anette Bagger, Juuso Nieminen og Maria Walla (Sverige): Vurdering som omsorg for læring i de tidlige skoleår
Denne artikel illustrerer hvordan vurdering kan bekymre sig om læring. Tidligere har forskning i omsorg for læring i matematikundervisningen og vurdering i faget peget på at der er gnidninger mellem de krævede omsorgsdiskurser og diskurserne om præstationer og sammenligninger af resultater. Sidstnævnte prioriteres ofte, og dette bliver særligt problematisk i matematikundervisningen i de tidlige skoleår og er særligt synligt ved nationale vurderinger. Artiklen samler forskning fra det matematikdidaktiske felt, fra vurderingsforskning og fra området inkluderende undervisning. Indledningsvis skildres den internationale forskningsfront, og derefter illustreres det som case hvordan vurdering kan være omsorg for læring gennem national og obligatorisk vidensvurdering i førskoleklasser i Sverige. Resultaterne viser de udfordringer og muligheder der er ved at forstå og bruge national vurdering i de tidlige skoleår, som en bekymring for alle elevers læring.

Helena Roos, Ann-Louise Ljungblad og Jonas Walfridsson (Sverige): Specifikke matematikvanskeligheder – diagnose og pædagogiske og didaktiske tilpasninger
Artiklen tager udgangspunkt i vidensområdet *specifikke matematikvanskeligheder* og afspejler og problematiserer forhindringer og muligheder i forhold til tværfagligt samarbejde mellem undersøgende praksis og matematikundervisning i en svensk kontekst. De forhindringer og muligheder der opstår, viser et behov for tværfagligt samarbejde med forståelse for forskellige perspektiver. Sideløbende er der også behov for en forbedret videnstilstand på nationalt, regionalt og kommunalt niveau i Sverige vedrørende specifikke matematikvanskeligheder for at kunne tilbyde tilstrækkelig støtte. Artiklen synliggør den manglende viden om pædagogiske og didaktiske tilpasninger baseret på forebyggende indsatser der kan understøtte elevernes sundhed og trivsel.

Anette Bagger og Helena Roos (Sverige): Inklusion og ligeværd i og gennem matematikundervisningen
Denne artikel bidrager med viden om hvordan inklusion og ligeværd er betinget og kan understøttes gennem undervisning i forskellige matematikklasser. Artiklen rapporterer resultater fra samarbejdsprojektet *Matematics is MInE*. Indledningsvis beskrives situationen vedrørende inklusion og ækvivalens i matematikfaget i Sverige og hvad tidligere forskning har vist. Projektets resultater illustreres i form af en præsentation af de identificerede principper for at kortlægge og forstå hvordan inklusion og ligeværd

opstår. For at illustrere den skoleudvikling der foregik sideløbende med forskningsprojektet, præsenteres to fiktive cases med tilhørende diskussionsspørgsmål der blev brugt i projektets fokusgruppediskussioner. Disse kan bruges til at uddybe viden om hvordan ligeværd og inklusion kan betinges og understøttes på individ-, gruppe- og organisationsniveau. Til sidst diskuteres implikationer for matematikundervisningens forskning og praksis med det formål at øge lighed og inklusion.

Anita Simensen (Norge): Positionering af lavt præsterende elever i matematik – en styrkebaseret multipel-case-studie af heterogene små grupper
Artiklen rapporterer delresultater fra et multi-case-studie der undersøger matematiske læringsmuligheder i heterogene små grupper for elever (13-14 år) der præsterer dårligt i matematik. Undersøgelsen er forankret i teorien om objektivering og i positioneringsteori og diskuterer hvordan medstuderendes multimodale handlinger kan regulere mulighederne for elever der præsterer dårligt i matematik, for at deltage i gruppens aktualisering af matematisk viden. For at undersøge dette er flere heterogene små grupper blevet filmet mens de arbejdede med LIST-opgaver. Resultatet viser eksempler på regulatoriske handlinger der kan regulere elever der præsterer dårligt i deres deltagelse. Endvidere illustrerer undersøgelsen at LIST-opgaver kan skabe læringsmuligheder for alle i inkluderende klasseværelser.

Ósk Dagsdóttir og Edda Óskarsdóttir (Island): Udvikling af universitetskurset matematik for alle – et aktionsforskningsprojekt
Formålet med denne pædagogiske aktionsforskning var at forstå hvordan man kan omstrukturere kurset matematik for alle, et kursus der undervises i på kandidatniveau på Islands Universitet. Data blev indsamlet og analyseret tematisk og cyklisk via et åbent spørgeskema ved afslutningen af kurset og via individuelle interviews et år senere. Resultaterne viser at kurset påvirkede deltagernes forståelse af matematikundervisning og deres professionalisme. De interviewede deltagere var i stand til at bruge problemløsning og diskussioner i deres klasseværelse, men stod over for udfordringer og havde brug for løbende støtte til at implementere deres læring i klassen.

Cecilia Segerby og Christina Svensson (Sverige): Implementering af en sproglig teori for indholds-inklusiv matematikundervisning
Forskere understreger vigtigheden af at arbejde med sprogudvikling i alle fag, hvilket er særligt vigtigt i Sverige da matematikfaget er domineret af individuelt arbejde. Tre mellemskolelærere har i undersøgelsen identificeret decimaltal som udfordrende for elever på 4. årgang. På baggrund heraf er der designet to forskningslektioner af lærerne og to forskere med udgangspunkt i en læringsundersøgelse for at udvikle elevernes forståelse af decimaltal. Sprogteorien *systemisk funktionel lingvistik* har

bidraget både til undervisningens design og som analyseværktøj. Undersøgelsens resultater viser vigtigheden af nøje at udvælge hvilke begreber, repræsentationsformer, elevaktiviteter og spørgsmål der vil være afgørende for at skabe en indholdsrigtig matematikundervisning; det vil sige et målrettet fokus på at fremme alle elevers vidensudvikling hvad angår decimaltal.

Lóa Jóelsdóttir og Pernille Bødtker Sunde (Danmark): Regnestrategier og de udfordrede elever i matematik – eksempel fra 6. klasse
Dette studie undersøger lavt præsterende elevers strategier for regning med flercifrede tal sammenlignet med højere præsterende elever. Lavt præsterende elever defineres ved at score blandt de 35 % laveste i nationale tests i matematik. Data fra 685 danske 6.-klasseelevers brug af talbaserede strategier og standardalgoritmer i flercifret addition, subtraktion og multiplikation blev sammenlignet mellem de fem præstationsgrupper i nationale tests. Resultaterne viste stigende brug af talbaserede strategier for hvert præstationsniveau, men ingen signifikante forskelle mellem præstationsgrupper i brug af standardalgoritme. Talbaserede strategier resulterede oftere i korrekt resultat end standardalgoritmen for alle præstationsgrupper undtagen hos de laveste 10 %.

Pernille Bødtker Sunde, Pernille Pind og Peter Sunde (Danmark): Den opfattede sværhedsgrad af tal relaterer sig til selvrapporterede præstationer hos voksne
Opfattes nogle tal som sværere end andre, og er det i så fald afhængigt af personens generelle matematiske evner? Der blev analyseret 689 voksnes (alder > 18) svar på et kort spørgeskema om talpræferencer og lyst til at udføre multiplikationer. Deltagere med lav selvrapporteret score for matematiske evner (MAS) opfattede svære tal, det vil sige tal indeholdende cifrene 7 og 8, som sværere end deltagere med høj MAS. Dette har konsekvenser for både undervisning og forskning. Hvis en opgave opfattes som svær på grund af tilstedeværelsen af bestemte cifre, kan det påvirke præstationen og evnen til at engagere sig i fx læringsaktiviteter.

Johan Kørvel Sørensen, Nina Genster, Jacob Frølund Davis, Simone Lindhøj Rasmussen og Pernille Bødtker Sunde (Danmark): Dyskalkuli-simulatoren – et udviklingsprojekt rettet mod lærere
I dette udviklingsprojekt præsenteres en første version af en dyskalkuli-simulator. Målet er at støtte især matematiklærere til en bedre forståelse af de vanskeligheder elever med dyskalkuli oplever i fx matematiktimerne. Hertil blev udviklet en simulation, et virtuelt klasseværelse, hvor fx en matematiklærer kan opleve nogle af de samme vanskeligheder som en person med dyskalkuli oplever i en matematiktime. Simulatoren blev testet på lærere og lærerstuderende. Resultaterne viser at dyskalkuli-

simulatoren har potentiale til at give indsigt i og refleksioner over hvordan elever med dyskalkuli oplever det at skulle arbejde med tal og udføre almindelige regneoperationer i en typisk matematiktime.

Mette Thompson (Danmark): Styrkelse af elevers talforståelse – en tidlig og målrettet indsats i Helsingør Kommune
Artiklen beskriver elementer i et udviklingsarbejde som tilsigter at forbedre elevers talforståelse gennem tidlig og målrettet indsats. En test til bestemmelse af elevers talforståelse og dens tilblivelse beskrives, efterfulgt af en kort beskrivelse af indhold, organisering og resultater af målrettet indsats på tre niveauer. Artiklen trækker på både praktisk erfaring og teori og forskning inden for det matematikdidaktiske felt og fokuserer på elevers udvikling af talforståelse og hvordan denne kan belyses. Testresultater for 2021-2024 tyder på at den målrettede indsats har betydet en bedre talforståelse hos skolens elever.

Bent Lindhardt (Danmark): TALRO – et udviklingsprojekt om formodede talblinde elever
I perioden 2021-2022 blev der gennemført et udviklingsprojekt med elever med formodet talblindhed på fire skoler og en matematikvejleder på hver skole i Roskilde Kommune på Sjælland. Udviklingsprojektet havde som mål at undersøge formodede talblinde elevers faglige vanskeligheder og personlige læringsbarrierer samt at afprøve forskellige metodiske og faglige tiltag der kunne forbedre læringsvanskelighederne for formodede talblinde elever.

Artiklen beskriver projektets mål, den valgte organisationsmodel og udvælgelsen af seks elever på mellemtrinnet og præsenterer hvad fire matematikvejledere har fokuseret på dels i deres observationer af de formodede talblinde elever og dels i afprøvninger af specifikke metodiske og faglige interventioner.

Liste over NORSMA-konferencer

- NORSMA 1 (2001): "En matematikk for alle i en skole for alle", Universitetet i Agder, (UiA) og Sørlandet Support Centre for Special-Needs Education (Statped), Kristiansand, Norge.
- NORSMA 2 (2003): "Democracy and Participation: A Challenge for Special Needs Education in Mathematics", Örebro Universitet, Sverige.
- NORSMA 3 (2005): "Mathematics Teaching and Inclusion", Aalborg Universitet, Danmark.
- NORSMA 4 (2007): "Different Learners – Different Math? ", Åbo Akademi i Vaasa, Finland.

- NORSMA 5 (2009): "Challenges in Teaching Mathematics: Becoming Special for All", Islands Universitet, School of Education, Reykjavík, Island.
- NORSMA 6 (2011): "New Trends in Special Needs Education in Mathematics", UiA og Sørlandet Support Centre for Special-Needs Education (Statped), Kristiansand, Norge.
- NORSMA 7 (2013): DPU, Aarhus Universitet, Campus Emdrup i København, Danmark.
- NORSMA 8 (2015): "Connecting Research and Practice", Högskolan Kristianstad, Sverige.
- NORSMA 9 (2018): Åbo Akademi i Vaasa, Finland.
- NORSMA 10 (2021): "Conference on Quality Mathematics Education", Reykjavík Universitet, Island. Online konference.
- NORSMA 11 (2023): DPU, Aarhus Universitet, Campus Emdrup i København, Danmark.

Videoer og materialer fra NORSMA 11 er tilgængelige på:
https://matematikdidaktik.dk/aktuelt/norsma-the-nordic-research-network-on-special-needs-education-in-mathematics

Herunder også fra Lærernes Dag, 22. oktober 2023:
https://matematikdidaktik.dk/aktuelt/ncum-aarskonference-2023

Paria eller øjenåbner – om historiske skift i syn på talblindhed


Lena Lindenskov, DPU,
Aarhus Universitet


Bent Lindhardt,
Professionshøjskolen
Absalon

Abstract: *I et historisk lys fremhæver artiklen en række perspektiver på dyskalkuli*[1] *fra fagfolk, lægfolk, uddannelsesinstitutioner og politikere. Fokus er på Danmark, suppleret med uddybninger præsenteret i NORSMA. I et nutidigt lys skitserer artiklen den aktuelle situation for nationale initiativer om dyskalkuli i Danmark og foreslår nogle årsager til, at perspektiver blandt fagfolk kan ændre sig fra at se dyskalkuli som et 'pariabegreb' uden relevans for lærere og matematikundervisningsforskere til et mere afbalanceret syn, hvor dyskalkuli også betragtes som en potentiel værdifuld eller nødvendig 'øjenåbner' for forståelse af vanskeligheder i matematik.*

Om syn på talblindhed – i et historisk lys

Matematikvanskeligheder har været et emne af interesse for uddannelsesverdenens forskere, praktikere og embedsværk i Danmark i en lang årrække, hvilket førte til dansk interesse i et formaliseret nordisk samarbejde i NORSMA fra forskernetværkets begyndelse i 2000. På det tidspunkt var der skepsis over for talblindhed som forklaring på visse matematikvanskeligheder i den danske uddannelsesverden. Det gjaldt i embedsværket (personlig kommunikation med det danske undervisningsministerium, 2000) såvel som blandt forskere og læreruddannere, eksemplificeret ved en præsentation på NORSMA 2.

På NORSMA 2 i 2003 på Örebro Universitet i Sverige formulerede Böttger et al.(2004) et behov for nye teoretiske begreber med henblik på at kunne give forbedret støtte til de mennesker der oplever matematikvanskeligheder, og til de professionelle der støtter op om disse mennesker. Böttger et al. (2004) tog udgangspunkt i to hovedparadigmer, et institutionsorienteret og et individuelt orienteret. I det institutionsorienterede paradigme søges matematikvanskeligheder løst gennem en ændring

1 Bemærkning om dansk sprogbrug: Den videnskabelige oversættelse til dansk af *dyscalculia* er dyskalkuli, mens talblindhed er den hverdagssproglige og alment anvendte term på dansk. I artiklen bruger vi, hvor det er muligt, betegnelsen talblindhed, også i oversættelser af nordisk og international litteratur.

i undervisningens tilrettelæggelse og relevans i relation til det stofområde der er vanskeligheder med.

Men i det individuelle paradigme søges forklaringer på matematikvanskeligheder i den enkelte elevs forhold, kognitive som affektive som sociale, mens matematikundervisningens mål og metoder anses for givne. Böttger et al. (2004) refererede en skepsis fra danske forskere og læreruddannere over for at inddrage begreber som dyskalkuli/talblindhed, dysmatematik, handicap og diagnose i forbindelse med elevers vanskeligheder med læring af matematik, netop fordi disse begreber tilhører et individuelt paradigme og indirekte udelukker kritik af matematikundervisningens tilrettelæggelse og relevans. Dog omtaler Böttger et al. (2004) ikke selv synet på diagnoser som udelukkende negativt, men som ambivalent:

> "der (er) i vores kultur (...) et ambivalent forhold til begrebet diagnose i beskrivelsen af elever, hvor det er helt afgørende om diagnoser på den ene side belægges med skyld og indsnævrede fremtidsmuligheder, eller på den anden side belægges med lettelse og privilegier."

Specifikt om termen tandblindhed refereres også udtalelser om at der ikke synes at være tegn på at børn med eventuel dyskalkuli adskiller sig kvalitativt fra elever med andre matematikvanskeligheder, eller på at de har behov for andre typer støtte end andre elever der har behov for støtte, hvilket kunne gøre begrebet talblindhed overflødigt i undervisningssammenhæng. Behovet for nye teoretiske begreber til at udvikle bedre støtte til elever der oplever matematikvanskeligheder, og til de professionelle der støtter op om disse mennesker, foreslår Böttger et al. (2004) derimod løst med et begreb om regnehuller som en karakteristik af hvor elevernes læring var gået i stå, og hvor alle typer årsager til vanskeligheder blev set som betingelser, hvad enten de var institutions- eller individorienterede, og hvor ingen type årsag måtte forhindre elever i at få succes i undervisning. Derimod måtte alle elever tilbydes tilpassede muligheder for at manøvrere over eller omkring deres regnehuller (Böttger et al., 2004).

Samlet set indgik der på NORSMA 2-konferencen talblindhed i fem af de i alt 21 præsentationer. Det var i den ene af tre ikke-nordiske plenumforedrag og i fire af de 18 nordiske præsentationer. En tekstanalyse af konferencerapporten (Engström, 2004) viser at alle fire nordiske præsentationer anbefalede forsigtighed med brug af termen talblindhed. Termen blev ikke set som potentiel værdifuld men snarere som en paria.

Det kritiske syn blev samlet set begrundet på seks forskellige måder.

Den første begrundelse for forsigtighed var at termen ikke var veletableret, men havde mange beskrivelser. Den anden begrundelse var at termen mest anvendtes i populærvidenskabelige skrifter. Den tredje var at termen tilhørte medicinsk og neurologisk forskning og ikke tilhørte pædagogisk og matematikdidaktisk forskning.

Den fjerde påpegede termens risiko for at indsnævre og fastholde fagopfattelser hos lægfolk og professionelle om at matematik fortrinsvis var tal og aritmetik. Den femte var at der efter en eventuel angivelse af at en elev var ramt af talblindhed, ikke fandtes nogen specifikke undervisningstilbud til eleven. Endelig var den sjette begrundelse at termen satte fokus på det enkelte individ og derfor risikerede at overse andre årsager til vanskeligheder i matematik.

Det fremgår af konferencerapporten fra NORSMA 3 i 2005 på Aalborg Universitet (Johansen, 2007) at den sjette begrundelse også blev fremlagt af Gunnar Sjöberg, der pointerede risikoen for at overse forklaringer knyttet til undervisningsforhold. Sjöbergs empiriske undersøgelser viste at 20% af undervisningstiden brugtes på andet end matematik, og dette anså Sjøberg som en mere plausibel forklaring på matematiske vanskeligheder end en forklaring om talblindhed. Se mere i Sjöberg (2006).

Om syn på talblindhed hos lægfolk

Modsat den professionelle skepsis blandt forskere og læreruddannere, eksemplificeret ved nordiske bidrag på NORSMA 2 og NORSMA 3, har der i danske massemedier helt tilbage fra årtusindskiftet været positiv anvendelse af termen talblindhed som en af flere mulige forklaringer på matematikvanskeligheder i skolen og i hverdagen. Vi har sporadisk indsamlet sådanne omtaler hvor selverklærede talblinde eller deres forældre formidler deres oplevelser. Her en oplevelse af ikke at blive forstået og ikke få hjælp:

> "Jeg kan ikke regne selv basale regnestykker ud […]. Hverken min matematiklærer, min studievejleder eller andre, der har med skolen at gøre, kender noget til det. De fleste kommer som regel med en udtalelse om at jeg "ikke har fulgt ordentligt med i skolen". Dette irriterer mig utroligt meget, for jeg har ingen problemer med andre fag, som jeg klarer mig særdeles godt i. Jeg har søgt på nettet efter talblindhed, men jeg fandt intet." (Jeg er talblind, 2000).

Her en oplevelse af uretfærdighed:

> "Talblinde vil ikke længere stå i skyggen af ordblinde, og frivillige fra Talblindeforeningen ville stille sig op på Strøget i København for at fortælle at det ikke behøver være udtryk for dovenskab når tallene ikke makker ret (Stanek, 2005).

Her en oplevelse af at en diagnose er givet for sent:

> "En far beskriver i en aviskronik hvordan hans datter på tretten år havde kæmpet en ulige kamp med og mod matematikken i skolen fordi hun ikke havde fået særlig tilrettelagt undervisning, men som 13-årig havde fået stillet diagnosen talblind. Faren fortalte

> at han havde trænet læsning af bilers nummerplader med datteren som tre- fireårig, og at datteren da kunne genkende 1 og 2, men havde givet desperate gæt, 4?, 6?, K?, 38?, da han havde peget på et 5-tal" (Gronemann, 2013).

Her en oplevelse af ikke at få hjælp:

> "[…] jeg elsker skole! Jeg elsker at have ting at lave. Men ikke matematik. Jeg er 97% sikker på jeg er talblind. for det har alle lærere på skolen sagt til mig. Men jeg for ikke den hjælp jeg har brug for." (Hvorfor er jeg forkert?, 2015)

Her en oplevelse af at give op:

> "Nu er jeg 73 år og har aldrig i mit liv fået hjælp for min talblindhed. Det har haft mange konsekvenser for mig – men så sandelig også for mange andre talblinde og samfundet. Ressourcespildet er enormt, for ingen ved deres fulde fem ville uddanne én, som ikke kan tælle til 10 – dem er vi mange af. Vi har haft en talblindeforening i dette land, men efter 10 år måtte man give op – ingen ville lytte til os, og alle døre var lukkede for os." (Laubech, 2018).

Ovenstående er vidnesbyrd om at der er voksne og forældre til børn, der bruger termen talblind positivt, offensivt og uden skepsis over for termen, men med stor skepsis over for den manglende anerkendelse af fænomenet talblindhed fra uddannelsesinstitutioner og myndigheder.

Om syn på talblindhed på uddannelsesinstitutioner

Samtidig med skepsis fra forskere og læreruddannere i Danmark over for om talblindhed er et værdifuldt begreb for uddannelsesverdenen, og samtidig med positiv brug af termen blandt nogle lægfolk, begyndte lokale uddannelsesinstitutioner for voksne og unge fra begyndelsen af århundredet at bruge betegnelsen talblind. Her søgte man at identificere elever med talblindhed og deres behov for støtte, og man tilbød særlige forløb. I nogle tilfælde blev talblindhed brugt som synonym for lavt præsterende, i andre tilfælde blev der anvendt testmaterialer fra den svenske neuropsykolog Björn Adler (2008)[2]. Lokale centre for specialundervisningsstøtte til voksne (CSV) var pionerer, efterfulgt af lokale initiativer på bl.a. gymnasier, ligesom der også har været igangsat initiativer på regionsniveau. Som lokale myndigheder er regionernes hovedansvar sygehusvæsenet, men regionerne kan også tage sig af regional udvikling, bl.a. vedrørende uddannelse. Region Nordjylland har i en længere periode

2 Se også Kognitivt Centrum Danmark (https://kc-dk.dk/)

haft aktiviteter om talblindhed, og som et aktuelt eksempel kan nævnes at Region Hovedstaden tilbyder en screening af voksne for talblindhed og tilbyder muligheder for at lære "at klare hverdagens tal, så du kan komme til tiden, huske pinkoder, holde regnskab mm." (Kommunikationscentret, 2024). Det angives her at betegnelsen talblindhed bruges synonymt med dyskalkuli, matematikvanskeligheder eller regnevanskeligheder (Kommunikationscentret, 2024). Nogle former for ordblindestøtte indeholder også aspekter af støtte til talblindhed, og et voksende antal private firmaer i Danmark tilbyder testning, pædagogisk vejledning og støtte til børn, unge og voksne.

Det kan konkluderes at lokale initiativer på uddannelsesinstitutioner er vokset støt i antal siden 2000, og at der er udviklet muligheder for at ansøge om offentlig finansiering. Der kan ansøges om offentligt tilskud til specialpædagogisk bistand (SPS) på både ungdomsuddannelser, korte, mellemlange og videregående uddannelser til deltagere med "funktionsnedsættelser eller tilsvarende svære vanskeligheder" (Retsinformation, 2024). Med funktionsnedsættelser forstås fx ordblindhed, talblindhed, OCD, synshandicap, hørehandicap, bevægehandicap, angst, depression, autismespektrumforstyrrelser, ADHD, PTSD, personlighedsforstyrrelser, bipolar lidelse, skizofreni eller hjerneskade.

Om syn på talblind – politisk niveau

At uddannelsesinstitutioner nu kan ansøge om støtte til SPS hvor talblindhed kan være et af kriterierne, hænger sammen med en langsomt voksende interesse for talblindhed i den politiske sfære. Allerede i nullerne blev der publiceret informationer om talblindhed på websider fra Undervisningsministeriet (Agergaard, 2006), og derefter har ministeriet taget flere initiativer til forsknings- og udviklingsarbejder inden for talblindhed. Efter CSV SydØstfyn (CSV står for Center for Specialundervisning for Voksne) i 2009 gjorde opmærksom på at ordblinde ofte også har store vanskeligheder med matematik, fik centeret midler fra ministeriet til et projekt til afdækning af talblindhed (Christiansen, 2010). Det blev i 2012 fulgt op af midler til CSV SydØstfyn til et kontrolleret forsøg med 25 elever på Svendborg Erhvervsskole, der af skolen blev anset som lavt præsterende i matematik og som værende i risiko for at matematik ville være en medvirkende forklaring på frafald fra uddannelsen. De 25 fik en specielt tilrettelagt matematikundervisning, og deres udbytte blev holdt op mod en kontrolgruppe af 25 andre elever (Bundgaard et al., 2014). På den afsluttende konference i Den Sorte Diamant i København udtalte undervisningsministeren at "der er gået for mange år, før ordblindhed er blevet anerkendt. Forhåbentlig kan vi være hurtigere, når det gælder talblindhed" (Lauritsen, 2014).

Første gang talblindhed fik plads hos de politiske partier i det danske Folketing, var i 2012. Det skete i en bred aftale mellem syv af Folketingets otte partier, Socialdemokraterne, Radikale Venstre, Socialistisk Folkeparti, Venstre, Dansk Folkeparti, Liberal Alliance og Konservative (Beskæftigelsesministeriet, 2011).

Aftalen indebar finansiering af udarbejdelse af en forskningsoversigt hvori det lød:

> "I de senere år har der været en stigende interesse for og et øget fokus på elever med matematikvanskeligheder, hvilket også er smittet af på interessen for dyskalkuli. Imidlertid arbejder både forskere og praktikere ofte ud fra forskellige begreber, definitioner og kriterier, som ikke nødvendigvis er veldokumenteret." (Bengtsson & Larsen, 2013, s. 10)

Året efter, i 2013, blev der indgået en ny bred politisk aftale om et fagligt løft af folkeskolen mellem fem af de otte partier i Folketinget, Socialdemokraterne, Radikale Venstre, Socialistisk Folkeparti, Venstre og Dansk Folkeparti. Aftalen førte til en finansiering af udvikling af en test for talblindhed til brug i 4. klasse med tilhørende vejledningsmateriale til lærere. Dette skulle kunne stilles gratis til rådighed for skolerne med formålet om at sikre en målrettet og tidlig indsats for at hjælpe elever med talblindhed (UVM, 2013). Når danske politikere så det som en offentlig opgave at etablere gratis test og vejledningsmateriale til lærere, er det i forlængelse af den danske tradition om at uddannelse er offentligt finansieret og er et alment gode som alle borgere har ret til at få stillet gratis til rådighed – først og fremmest grundskoler men også ungdomsuddannelser og videregående uddannelser. Opbakningen til uddannelse som en hjørnesten i velfærdssystemet er stor blandt politikere og borgere, og også bl.a. elevorganisationer ses det som en værdi at mindske ulighed i skolen (Poulsen, 2024). Hvis en familie i dag skal have mulighed for detektering og hjælp til talblindhed til sine børn, så vil adgangen kun være for de familier som kan og vil betale selv. Men også fra et forskningsmæssigt synspunkt er der fordele ved offentlige tests og hjælpeindsatser frem for private. Data og erfaringsopsamling kan give offentlig viden, mens privat drift af test og støtte giver risiko for at ny viden bliver forretningshemmeligheder som ikke offentliggøres.

Den politiske aftale i 2013 har ført til at Børne- og Undervisningsministeriet (UVM) har udbudt en række delprojekter om talblindhed på nationalt plan – med fokus på folkeskolen. I første fase med to delprojekter. Delprojektet fra 2014 havde fokus på udvikling af en definition af talblindhed der er relevant for danske forhold, opstilling af en ramme for udviklingen af tests, begyndende testudvikling samt udvikling af pædagogiske overvejelser. Et af resultaterne var følgende definition:

> "Talblindhed er en læringsudfordring, der er påvirket af en neurologisk udviklingsforstyrrelse, som kan have forskellige udtryk, men som ikke kun kan forklares på baggrund af generelle indlæringsvanskeligheder, mangelfuld undervisning, psykologiske eller sociologiske årsager. Talblindhed omfatter vanskeligheder ved at automatisere tal, antal og størrelser samt fastholde og anvende aritmetiske færdigheder." (Lindenskov et al., 2019).

Definitionen er således ikke angivet som lav præstation ved ordinære matematiktests, men er en syntese af international dyskalkuli-forskning samt de internationale diagnoser (American Psychiatric Association, 2013; WHO, 2024). Se også Lindhardt (2024).

I første fases andet delprojekt fra 2020 var der fokus på fortsat testudvikling med yderligere afprøvning af testitems. Der blev især udviklet på scoring af elevsvar, på måling af elevens tidsforbrug, på brugergrænseflader og på digitalisering af observationsguide. Desuden var der fokus på læreres indsatser for at støtte udpegede elever, men afprøvning af indsatserne blev væsentligt begrænset af skolenedlukninger i coronatiden (Epinion & DPU, 2023).

Anden fase af det nationale talblindhedsprojekt har i et delprojekt fra 2023 fokus på Børne- og Undervisningsministeriet, som i 2023 i en intern udbudsrunde har udbudt et projekt i 2023-2025 med fokus på opsamling på forskningslitteratur om talblindhed/matematikvanskeligheder og indsatser, kortlægning af danske praksisser i forhold til elever i og med talblindhed og matematikvanskeligheder samt casestudier af nye afprøvninger i praksis af specifikke indsatser (Kesby, 2024).

Vi konkluderer ud fra ovenstående at der på det politiske niveau og i embedsværket har været vedholdende og i 2010'erne og 2020'erne voksende bestræbelser på at der i Danmark etableres øget viden om talblindhed, og at der i offentligt regi er anerkendelse af fænomenet talblindhed hvor der etableres testmaterialer og pædagogiske vejledninger, som kan stilles gratis til rådighed på landets uddannelsesinstitutioner.

Om syn på talblindhed – i nutidigt lys

Med det historiske lys på synet på talblindhed har vi søgt at sandsynliggøre at lægmandssynet på talblindhed har været vedvarende positivt siden 2000, og at talblindhed er blevet givet voksende opmærksomhed på uddannelsesinstitutioner og blandt politikere og i embedsværket. Det viser en diskrepans imellem forskeres og læreruddanneres skepsis fra starten af årtusindet om talblindhed som et paria begreb og den praksis der har udviklet sig, hvor stadig flere gør brug af begrebet talblindhed. Derfor vil vi nu vende tilbage til de faglige begrundelser for denne skepsis, der blev udtalt på NORSMA 2 og NORSMA 3 i starten af århundredet.

De faglige begrundelser for at forholde sig skeptisk til fænomenet talblindhed og til begreber om talblindhed omhandlede 1) hvilke begreber om talblindhed der er solide og relevante, 2) den folkelige brug af termen, 3) termens medicinske og neurologiske udgangspunkt, 4) risikoen for at støtte en opfattelse af matematik som hovedsageligt tal og aritmetik, 5) manglen på specifikke tilbud og også manglen på behov for andre tilbud end tilbud til elever med andre typer matematikvanskeligheder samt 6) individrettetheden. I det følgende skitserer vi forsknings- og erfaringsviden der er udviklet siden da, og som kan være udgangspunkt for en nuancerende faglig diskussion om begrundelser.

Angående det første spørgsmål om hvorvidt de mange definitioner internationalt miskrediterer værdien af at anvende talblindhed som begreb i undervisningsmæssige sammenhænge, er det i rapporteringer fra de nationale projekter siden 2013 blevet tydeliggjort at der eksisterer forskellige typer af definitioner. Tilstedeværelsen af den nævnte danske nationale definition giver en tydeliggørelse af fokus på den enkeltes tal og aritmetik, på at matematikvanskeligheder er mere end talblindhed, på at identifikationstests må indeholde detektion af grundlæggende tal- og mængdeopfattelser, samt på at identifikation nødvendiggør samtale-items og/eller observationer. Der udestår stadig behov for videre testudvikling med det mål at den udviklede nationale digitale test, observationsguiden og samtaleguiden kan anvendes individuelt eller på gruppe- eller klassebasis på alle klassetrin. Der er også behov for at testen giver umiddelbar feedback til skolen med et testresultat for hver elev med fortolkningsramme og med inspiration til uddybet kortlægning af muligheder til forbedring af elevens matematiksituation, at testen opfylder kriterier for test-certificering samt at der er etablerede aftaler om drift af testen fremover.

Angående det andet spørgsmål om hvorvidt den folkelige brug af termen miskrediterer dens anvendelighed i undervisning, anbefaler vi at professionelle kommer den folkelige brug i møde, forstår den som en interesse for området og er konkret ved besvarelse.

Det tredje spørgsmål angår termens medicinske og neurologiske udgangspunkt. Det er korrekt at termen i det nationale projekt peger på neurologiske elementer som der forskes i inden for hjerneforskning. Men som beskrevet i Lindenskov & Lindhardt (2023) bør der være åbenhed og samarbejde mellem forskellige forskningskulturer, ligesom påpegning af neurodiversitet ikke længere ses som en hindring i uddannelsesverdenen, men som en potentiel tilføjelse. Se et eksempel i Meister (2024).

Det fjerde spørgsmål drejer sig om risikoen for at fokus på talblindhed kan støtte en opfattelse af matematik som hovedsageligt tal og aritmetik. Denne risiko består stadig, og vi anbefaler at den tages alvorligt. Intentionelt er der stor bredde i det matematiske indhold af læreplaner på alle niveauer af det danske uddannelsessystem. Det vil være væsentligt at få løbende kritiske undersøgelser af hvorledes brugen af termen, testbatterier og støtte indgår i matematiklæreres praksis og diskurs.

Det femte spørgsmål fokuserer på om der er tilstrækkelige specifikke tilbud til elever med talblindhed. Det nationale projekt er tilvejebragt med ministerielle påpegninger af at detektering af talblindhed må følges ad med udviklede støttetilbud, og det er væsentligt løbende at dokumentere om virksomme støttetilbud til talblinde er identiske med virksomme støttetilbud til elever der af andre grunde er i matematikvanskeligheder. I de nævnte nationale projekter og i Lindhardt (2024) er der opsamlet viden om særlige karakteristika ved personer ramt af talblindhed som peger i retning af at støttebehovene ikke er identiske.

Den sjette begrundelse for at rette skepsis mod brugen af talblindhedsbegreber i undervisning omhandler individrettethed. Det er korrekt at talblindhedsforskningen oprindeligt har været knyttet til forestillinger om at individet har kognitive defekter, men fra forskning om sammenhænge mellem kognition, affektion og relationer er der tilføjet viden om betydningen af pædagogiske tilgange og matematikundervisning som institution (Boaler, 2016; Lewis, 2017).

På baggrund af ovenstående om de seks baggrunde for skepsis vil vi konkludere at der er etableret viden der underbygger en udvikling fra et overvejende kritisk syn blandt professionelle i starten af århundredet hen imod et mere balanceret syn hvor både fordele og ulemper anerkendes. Det ses da også allerede manifesteret i studiemoduler og kurser for lærerstuderende og lærere der har talblindhed som et af deres temaer. Men hvorvidt potentialet for at blive en øjenåbner for forståelse af matematikvanskeligheder bliver realiseret må undersøges i efterfølgende udviklings- og forskningsprojekter.

Forslag til fremtidige udviklings- og forskningsprojekter

Omfanget af forskningslitteratur som forholder sig til talblindhed er beskedent i forhold til fx forskningslitteratur inden for ordblindhed. Den overvejende del af litteraturen har haft fokus på årsagsforklaringer, karakteristik og afgrænsning af talblindhed, mens en forsvindende del omhandler virkningsfulde pædagogiske og undervisningsmæssige tiltag. På denne baggrund foreslår vi fremtidige projekter med tværfagligt og nordisk sigte om følgende forskningsspørgsmål:

- Findes der for de talblinde særlige undervisningstiltag som adskiller sig fra, hvad man generelt vil omtale som god undervisning i matematik?
- Findes der særligt anvendelige kompenserende hjælpe/læremidler til at støtte grupper af talblinde i hverdagen og uddannelsen?
- Hvordan optimeres samarbejdet mellem forældre, støttefunktioner og matematiklærere på talblindhedsområdet?
- Hvilke følgevirkninger på psykisk sundhed kan man registrere hos den talblinde, og hvordan influerer disse på læringen?

Tak til alle de lærere, elever og voksne der gennem årene har beriget vores viden og forståelse om talblindhed som fænomen, og tak til reviewerne for konstruktive kommentarer.

Referencer

Agergaard, B. (2006). *Undervisning af elever med talblindhed/dyskalkuli*. Kopi af print kan rekvireres hos forfatterne.

Adler, B. (2008). *Dyskalkuli & matematik – en håndbog i matematikvanskeligheder*.

Specialpædagogisk Forlag.

American Psychiatric Association. (2013). *Desk reference to the diagnostic criteria from DSM-5*. https://www.medialook.al/wp-content/uploads/2020/03/DSM-5-By-American-Psychiatric-Association.pdf

Bengtsson, S. & Larsen, L.B. (2013). *Talblindhed – en forskningsoversigt*. SFI – Det Nationale Forskningscenter for Velfærd.

Berninger, V.W. & Dunn, M. (2022). Brain and behavioral response to intervention for specific reading, writing, and math disabilities: What works for whom? I: B. Wong & D.L. Butler (red.), *Learning about learning disabilities* (s. 59-88). Elsevier Academic Press.

Beskæftigelsesministeriet. (2011). *Aftale om udmøntning af satsreguleringspuljen for 2012 på beskæftigelsesområdet, undervisningsområdet samt kulturområdet*. https://bm.dk/media/5275/aftaletekst_satspuljen.pdf

Boaler. J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Bundgaard, M.A., Jørgensen, D., Kirsted, K. & Lindenskov, L. (2014).

Forsøgsundervisning i matematik på Svendborg Erhvervsskole – tal- og matematikproblemer som en udfordring på uddannelserne. DPU.

Böttger, H., Kvist-Andersen, G., Lindenskov, L. & Weng, P. (2004). Regnehuller. I: A. Engström (red.), *Democracy and participation: A challenge for special needs education in mathematics: Proceedings of the 2nd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics* (s. 121-134). Department of Education, Örebro Universitet.

Christiansen, B.H. (2010). *Udviklingsprojektet talblindhed/dyskalkuli*. CSV SydØstfyn.

Danesi, M. (red.) (2022). *Handbook of cognitive mathematics*. Springer Nature. Engström, A. (red.) (2004). *Democracy and participation: A challenge for special needs education in mathematics: Proceedings of the 2nd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics*. Department of Education, Örebro Universitet.

Epinion & DPU. (2023). *Udvikling af talblindhedstest til 4. klasse og pædagogiske indsatser – slutrapport*. https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/udd/folke/pdf23/apr/230426-23-05863-2-bilag-3--slutrapport--udvikling-af-talblindhedstest-til-4-4337746-2-0.pdf

Fritz, A., Haase, V.G. & Räsänen, P. (red.) (2019). *International handbook of mathematical learning difficulties: From the laboratory to the classroom*. Springer.

Gronemann, B. (2013). Når tal er tegn uden mening. *Berlingske*, 9. november 2013. https://www.berlingske.dk/kronikker/naar-tal-er-tegn-uden-mening

Hvorfor er jeg forkert? (2015). *Netdoktor.dk*. https://debat.netdoktor.dk/discussion/33828/hvorfor-er-jeg-forkert

Jeg er talblind. (2000). *Netdoktor.dk*. (Tilgængelig marts 2000)
Johansen, L.Ø. (red.) (2007). *Mathematics teaching and inclusion: Proceedings of the 3rd Nordic Research Conference on Special Needs Education in Mathematics, Rebild 23.-25. november 2005*. Aalborg Universitet.
Kesby, K. (2024). *Ny forskning skal sikre bedre hjælp til børn med vanskeligheder i matematik*. https://www.via.dk/om-via/presse/nyheder-2024/ny-forskning-skal-sikre-bedre-hjaelp-til-boern-med-vanskeligheder-i-matematik
Kommunikationscentret. (2024). *Talblind – få hjælp til at håndtere tal og mængder*. Region Hovedstaden. https://www.densocialevirksomhed.dk/komcentret/voksne/laese-stave-regne/Sider/talblind.aspx
Laubech, D. (2018). Alle kunne se og høre, at her var jordens største idiot.
Jyllands-Posten, 27. juni 2018. https://jyllands-posten.dk/debat/breve/ECE10702294/alle-kunne-se-og-hoere-at-her-var-jordens-stoerste-idiot/
Lauritsen, H. (2014). Antorini: Talproblemer skal anerkendes. *Folkeskolen*, 6. februar
2014. https://www.folkeskolen.dk/matematik-matematik-indskoling-matematik-mellemtrin/antorini-talproblemer-skal-anerkendes/542980
Lewis, K.E. (2017). Designing a bridging discourse: Re-mediation of a mathematical learning disability. *Journal of the Learning Sciences, 26*(2), 320-365. https://doi.org/10.1080/10508406.2016.1256810
Lindenskov, L., Kirsted, K., Allerup, P. & Lindhardt, B. (2019). *Talblindhedsprojektet – rapport om udvikling af talblindhedstest og vejledningsmateriale*. DPU og Professionshøjskolen Absalon. https://emu.dk/sites/default/files/2019-09/Talblindhedsprojektet_endelig%20april%202019.pdf
Lindenskov, L. & Lindhardt, B. (2023). *Vidensopsamling – Elever i matematikvanskeligheder.* Egmont Fonden.
Lindhardt, B. (2024). TALRO – et kommunalt talblindhedsprojekt. *MONA,* I DENNE UDGIVELSE.
Lunde, O. & Lindenskov, L. (2007, upubliceret). *The current situation in special needs education research on mathematics in Nordic countries: A short introduction*.
Magne, O. (2003). *Literature on special educational needs in mathematics: A bibliography with some comments*. Malmö University College.
Mahmud, M.S., Zainal, M.S., Rosli, R. & Maat, S.M. (2020). Dyscalculia: What we must know about students' learning disability in mathematics? *Universal Journal of Educational Research, 8*(12B), 8214-8244. https://doi.org/10.13189/ujer.2020.082625
Meister, M. (2024). *Hvordan kan forskellige hjernetyper styrke startups' chancer for succes?* https://www.dtu.dk/newsarchive/2024/07/hvordan-kan-forskellige-hjernetyper-styrke-startups-chancer-for-succes
Ode, C. & Lindau, D. (2021). *The Danderyd model of dyscalculia assessment*. https://norsma10.hi.is/symposium-2/

OECD. (2011). *The high cost of low educational performance: The long-run economic impact of improving PISA outcomes*. https://read.oecd-ilibrary.org/education/the-high-cost-of-low-educational-performance_9789264077485-en#page1

Poulsen, L.D. (2024). Elevformand: Jeg hader lektier, og jeg hader ulighed i skolen endnu mere. *Folkeskolen*, 22. januar 2024. https://www.folkeskolen.dk/danske-skoleelever-lektier-skolen-i-samfundet/elevformand-jeg-hader-lektier-og-jeg-hader-ulighed-i-skolen-endnu-mere/4752313

Retsinformation. (2024). Vejledning til bekendtgørelse om særlige tilskud til specialpædagogisk bistand m.v. til elever, kursister og deltagere med funktionsnedsættelser eller tilsvarende svære vanskeligheder.

https://www.retsinformation.dk/eli/retsinfo/2024/9674

Räsänen, P. & Lindenskov, L. (2021). *Assesment and treatment of dyscalculia*. https://norsma10.hi.is/symposium-2/

Sjöberg, G. (2006). *Om det inte är dyskalkyli – vad är det då? En multimetodstudie av eleven i matematikproblem ur ett longitudinellt perspektiv*. Fakultet för lärarutbildning, matematik, teknik och naturvetenskap, Umeå Universitet.

Stanek, H. (2005). Talblinde gør opmærksom på sig selv. *Folkeskolen*, 2. september 2005. https://www.folkeskolen.dk/talblinde-gor-opmaerksom-pa-sig-selv/685060

UVM. (2013). *Aftale mellem regeringen (Socialdemokraterne, Radikale Venstre og Socialistisk Folkeparti), Venstre og Dansk Folkeparti om et fagligt løft af folkeskolen*. https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/udd/folke/pdf14/okt/141010-endelig-aftaletekst-7-6-2013.pdf

WHO. (2024). *Developmental learning disorder with impairment in mathematics*. https://icd.who.int/browse/2024-01/mms/en#771231188

English abstract

In a historical light, the article emphasizes a number of perspectives on dyscalculia from professionals, lay people, educational institutions and politicians. The focus is on Denmark, supplemented with elaborations presented in NORSMA. In a contemporary light, the article outlines the current situation for national initiatives on dyscalculia in Denmark and suggests some reasons why perspectives among professionals may change from seeing dyscalculia as a 'paria concept' with no relevance for teachers and mathematics education researchers to a more balanced view where dyscalculia is considered a potentially valuable or necessary 'eyeopener' into the field of difficulties in mathematics.

Bedömning som omsorg om lärandet i de tidiga skolåren


Anette Bagger, Dalarna University


Juuso Nieminen, The University of Hong Kong


Maria Walla, Dalarna University

Abstract: *Artikeln åskådliggör hur bedömning kan vara omsorg om lärandet. Tidigare forskning indikerar friktion mellan de omsorgsdiskurser som krävs i bedömningssituationer och de diskurser som rör prestation och jämförelse. De senare får ofta företräde och särskilt vid nationell bedömning, vilket blir särskilt problematiskt i de tidiga skolåren. Artikeln sammanför forskning från det matematikdidaktiska fältet, bedömningsforskning och inclusive education. Den internationella forskningsfronten skildras, varefter bedömning som omsorg om lärandet åskådliggörs genom nationell kunskapsbedömning i förskoleklass i Sverige som fall. Slutligen diskuteras utmaningar och möjligheter med att förstå och använda nationell bedömning i de tidiga skolåren som en omsorg om alla elevers lärande.*

Bakgrund

Denna artikel presenterar och teoretiserar ett nytt begrepp inom såväl specialpedagogisk forskning, bedömningsforskning som matematikdidaktisk forskning. Nämligen *bedömning som omsorg om lärandet i matematik*. Genom detta sammanförs forskning från de tre disciplinerna vilket leder till en möjlighet att ompositionera nationell bedömning i ämnet, som annars ofta utmanar omsorgsdiskurser och utmanar demokratiska värden som likvärdighet och rättvisa (se t.ex. Klein, 2017; Slee, 2018)

Lärare har ofta att hantera dilemman som härrör ur elevers mångfald och balansgången mellan att skydda elevers självbild och självkänsla och deras delaktighet i lärandet tillsammans med andra elever (Norwich, 2014). Detta uppträder i synnerhet vad gäller elever som är i behov av stöd för att de antingen får för små eller för stora utmaningar i lärandet och sätts inte sällan på sin spets vid bedömningssituationer (Bagger & Roos, 2015; Bagger et al., 2019; Ball, 2017; Roos et al., 2020). Dessa elever kan benämnas som elever som är i behov av specialpedagogisk matematikdidaktik (ESM). ESM är ett begrepp som harmonierar med internationell forskning inom inkluderande utbildning, relationell pedagogik och kan sammanfattas i den svenska matematikdidaktikern Olof Magnes (2006) förhållningssätt till elever i behov av stöd och *systemfaktormodellen*. Denna visar att den kunskap, behov och prestation som kan komma till stånd hos eleven är ett resultat av intersektionen av tre faktorer. Nämligen *elevens*, *nätverkets* (skolans, klassrummet och undervisningskulturen) samt *ämnets* förutsättningar. Vi avser i denna artikel visa på hur bedömningssituationer kan innebära omsorg om lärandet i matematik, för just ESM-elever. Vi utgår från Watsons (2021) teoretisering av omsorg om lärandet i matematik och som innebär att elever ska utmanas och utvecklas matematiskt och mötas av höga förväntningar, men samtidigt med ett stöd och en lärmiljö som ger erkännande till deras kognitiva behov och förutsättningar, kunskaper, personlighet och omständigheter i livet.

Internationella och nationella kunskapsmätningar har vidare visat på en bristande likvärdighet i det svenska skolsystemet vad gäller elevers möjlighet att få ett gott lärande i matematikämnet. Dessa omständigheter omgärdas av olikheter beroende av om elevens föräldrar är födda utomlands, skillnader mellan flickor och pojkar samt en ökad brist på likvärdighet mellan grupper av elever, klasser och skolor (Skolinspektionen, 2014; Skolverket, 2022). Detta kan tolkas som att det finns samhälleliga exkluderingsprocesser, särskilt vad gäller matematikämnet och att elever systematiskt och strukturellt missgynnas. Detta syns tidigt, redan i det nationella provet i det tredje skolåret. Bedömning spelar en nyckelroll i dessa processer av in(ex)kludering i matematikundervisningen och intar en särställning eftersom den sorterar elever och påverkar deras framtida möjligheter, det vill säga är dispositiv till sin natur (Boistrup, 2017). På många sätt är bedömning det som driver matematikundervisningen: i få andra skolämnen testas elevers kunskaper lika mycket eller spelar lika stor roll för den fortsatta utvecklingen och lärandet.

En utmaning som upprepat visat sig i tidigare bedömningsforskning i matematikämnet, är dikotomin mellan att utmana elevens lärande och samtidigt främja gott mående och delaktighet i lärandet på längre sikt. I detta intar nationell kunskapsbedömning en särställning, då den syftar till att identifiera ESM-elever genom deras uppvisade kunskaper, samtidigt som detta kan vara en potentiellt känslig situation. Detta gäller i synnerhet tidiga bedömningsinsatser och där den svenska förskoleklassen (6 åringar) kan tjäna som ett exempel på en skolform där omsorg om elever och en elevcentrerad undervisning bitvis utmanas av bedömningsdiskurser (Bagger & Vennberg, 2024). Bedömning i förskoleklass är en del av en politisk viljeyttring att höja kunskapsresultaten och likvärdigheten i skola och har motiverats av internationella komparativa undersökningar som t.ex. PISA (Ackesjö & Persson (2019).

Trots bedömningens centrala roll i matematikundervisningen finns det fortfarande en bristande förståelse för hur bedömning relaterar till aspekter av omsorg (Nieminen et al., 2023). För tillfället tycks internationella befintliga bedömningssystem snarare utöva "omsorg" om ekonomi än omsorg om elevers lärande och utveckling. Vi efterlyser och menar att det behövs mer av omsorg om såväl eleven som samhället i likhet med det Anthony et al., (2015) indikerar. I detta sammanhang är Sverige ett bra exempel på hur omsorg snarare orienteras mot en system- än en individnivå. Vad gäller tidigarelagd obligatorisk och nationell bedömning i matematikämnet och de utökade bedömningsreformer som genomförts så visar forskning att detta snarare förstärkt ojämlika förutsättningar. Forskning visar även att under samma tidsperiod som dessa utökade och tidigarelagda bedömningar införts, har barn och elever blivit allt mer stressade i skolan. Vidare har fokus i undervisningen förskjutits och lagts alltmer på bedömning och kontroll i stället för på lärande (Högberg, m fl., 2020, Nygren, 2021). Vad detta beror på är komplext att dra slutsatser om, men dessa företeelser av en utökad bedömning och en alltmer målstyrd skola, ett förändrat fokus i undervisningen och ökad stress bland skolbarn, uppträder samtidigt.

Undervisningens skiftande fokus mot bedömning och en utökad kontroll av elevers kunskaper, har också visat sig uppträda i samband med genomförandet av reformen om obligatoriskt bedömningsstöd i förskoleklass (Ackesjö, 2019). Samtidigt som dessa undervisningstendenser visar sig i skolan, har Folkhälsomyndighetens utvärderingar av skolbarns självrapporterade hälsa entydigt pekat mot att antalet barn och elever som varje vecka upplever psykosomatiska symptom har ökat kraftigt sedan 2009/2010 (Folkhälsomyndigheten, 2022). Det vill säga, elevers ohälsa har ökat kraftigt från tiden innan läroplanen Lpo11, nationella prov i skolår tre (infördes 2010), obligatorisk bedömning i år 1 (infördes 2016) och förskoleklass (infördes 2019), betyg i årskurs sex (infördes 2012) och möjligheten för skolor att införa betyg i årskurs 4 om de önskar (infördes 2021). Detta gäller i synnerhet flickor och elever med låg socioekonomisk status.

Det finns mot denna bakgrund all anledning att undersöka hur ett fokus på omsorg om lärandet kan stärkas och på vilket sätt det kan bidra till en etiskt hållbar utbildning och bedömningspraktik i ämnet. Detta skulle kräva att vi omförhandlar den roll som bedömning har från att vara placerad inom de dominerande och moderna diskurserna om mätning och jämförelse av elevers prestationer (Nieminen et al., 2023) och mot ett utövande av relationell omsorg om lärandet. En påminnelse om det etiska uppdrag som beslutsfattare, skolpersonal och forskare gemensamt behöver anta i bedömningssammanhanget är den Hippokratiska eden om att göra gott och inte skada. Detta är något som vi numer menar att utbildningssektorn av idag behöver förhålla sig till då det gäller kunskapsbedömning och särskilt då det rör elever som kan behöva mer omsorg om lärandet än andra: ESM-elever och yngre elever:

> "Efter förmåga och omdöme skall jag följa den behandling jag anser gagnerikast för mina patienter och det som kan skada eller irritera dem skall jag undvika. Jag skall icke ge någon gift, även om jag blir ombedd, ej heller ordinera något sådant …" (Den Hippokratiska Eden, Svenska Läkaresällskapets hemsida)

Denna artikel bidrar till att belysa vilka utmaningar och möjligheter som finns för att nationell bedömning ska kunna vara omsorg om ESM-elevers lärande och definitivt inte skada elever utan göra gott. Detta görs genom att vi besvarar tre forskningsfrågor.

1. Hur gestaltas omsorg om lärandet i matematik i tidigare forskning?
2. Hur gestaltas omsorg om lärandet i matematik i kontexten av lärares arbete med nationell bedömning i förskoleklass i Sverige?
3. Vilka indikationer finns för möjligheter och hinder med nationell bedömning som omsorg om lärandet i matematik?

Forskningsfråga 1 besvaras genom en scoping review av forskning för att identifiera de problemområden som där framträder. Förutom denna genomgång av tidigare forskning har vi genom forskningsfråga 2 illustrerat dessa problemområden genom att undersöka teman som framträder i studier om nationell bedömning i förskoleklass i Sverige. I forskningsfråga tre sammanförs de möjligheter och hinder som visat sig i redogörelsen av de två första forskningsfrågorna. Slutligen diskuteras dessa tre forskningsfrågor och vi ger implikationer och rekommendationer för att främja omsorg om lärandet genom kunskapsbedömning.

Omsorg om lärandet genom matematikundervisning

Vi har utgått ifrån Watsons (2021) teoretisering kring *omsorg om lärande i matematik*, för att undersöka tidigare forskning om ESM-elever och matematikämnet. Med denna modell innehåller omsorg om lärande i matematik två delar: *omsorg om matematiken* och *omsorg om den som lär sig*. Båda dessa behöver finnas representerade för att det ska kunna bli omsorg om lärandet i matematik. Denna omsorg om lärandet i ämnet, behöver dessutom beaktas utifrån individen, ämnet och lärmiljön för att en genuin omsorg om lärandet i matematik ska ges förutsättningar. Lärmiljö är författarnas översättning och begreppet består i Watsons modell snarare av de normativa, sociala och kulturella föreställningar om vad matematikundervisning är och de fysiska och mentala resurser som finns i klassrummet. De tre nivåer som återfinns i Watsons modell över omsorg om lärandet i matematik, finns också representerade i Magnes

(2006) *faktorsamspelsmodell* men där det Watson benämner milieu och bygger på Brosseau, snarare benämns som det omgivande nätverket, vilket inbegriper gruppens och skolans kunskaper och erfarenheter eller undervisningskultur. Vi har i artikeln benämnt dessa miljöfaktorer som lärmiljö. Genom att vi gjort ett urval av forskning som rör omsorg i matematik och med ett särskilt fokus på bedömning, kan vi på ett tydligt sätt undersöka vad *bedömning som omsorg om lärandet i matematik*, kan vara.

Metodologi

För att finna tidigare forskning av relevans i forskningsfråga 1, användes nyckelorden: math* och care* i databasen ERIC och sökte efter peer-reviewad forskning på engelska. Artiklarnas abstract lästes därefter igenom och forskning som inte rörde ESM-elever valdes bort. Vi gjorde alltså denna läsning brett och inkluderande även annan forskning än den som specifikt rör bedömning. Däremot var ett särskilt intresse i läsningen av artiklarna och framskrivandet av narrativet just bedömning i matematikämnet. I analysen eftersöktes vilka problemområden som uppträdde i den tidigare forskningen i relation till omsorg om lärandet i matematikämnet och i en bedömningskontext. Vi har dessutom använt Magnes modell för att kommentera utfallet av den scoping review som genomfördes.

Vad gäller urvalet av texter till forskningsfråga 2, så har vi använt våra egna studier och kunskaper om vilken forskning som pågår om förskoleklassens obligatoriska bedömning för att göra ett urval. Watsons modell var avgörande för hur urvalet gjordes i de artiklar som selekterades i såväl forskningsfråga 1 som 2. Detta innebar att vi i det första steget av analys selekterade textsegment i artiklarna och studierna som rörde *omsorg för den som lär sig* samt *omsorg för matematiken*. Detta skrevs fram i formen av narrativ om bedömning som omsorg om lärandet i matematik.

Dessa två fenomen undersöktes genom en reflexiv kvalitativ innehållsanalys i den tredje forskningsfrågan och där teman analyserades fram med inspiration från Braun och Clarke (Braun & Clarke, 2019; 2021; Byrne, 2022). Vi undersökte då mer specifikt vad dessa narrativ av forskning kunde säga om bedömning som omsorg om lärandet i ämnet. Det innebar, förutom att vi skapade teman, att vi undersökte mönster och meningsskapande inom och mellan de teman som framkom i syfte att bidra med kunskap om *bedömning som omsorg om lärandet i matematik*.

Hur gestaltas omsorg om lärandet i matematik i tidigare forskning?

Vad gäller ESM-elever så är möjligheter till positiv identitetsuppbyggnad nödvändig för ett hållbart lärande i ämnet (Jensen & Bartell, 2013; Long, 2011; Nicol et al., 2010).

Att känna sig kompetent och intresserad av matematik såväl under som efter en bedömningssituation, är då helt centralt. Detta innebär att fokus på prestationer och omsorg om elevens lärande i ämnet måste existera simultant och vara delar av samma helhet. Hur dessa två för skolan centrala fenomen kan mötas på ett effektivt sätt med god etik och där omsorg om ESM-elevens lärande inrymmer såväl skydd och omsorg som delaktighet (se Watson, 2021), har lämnats obesvarat i tidigare forskning. Det är där inte ovanligt att det ena eller det andra sätts i förgrunden.

Omsorg om lärandet i matematik rör ofta etiska aspekter av undervisning och hur dessa förhåller sig till lärares beslutsfattande och didaktiska val i klassrummet (Watson, 2021; Jones & Lake, 2020; Long, 2011; Nicol et al., 2010). I tidigare forskning visar detta sig ofta utifrån aspekter av elevers möjligheter att delta i meningsfullt lärande och ofta vad gäller specifika områden som exempelvis problemlösning, räkning, geometri och undervisning i metakognitiva och kognitiva strategier samt matematiska system och operationer (t.ex. Hackenberg, 2010). Kognitiv omsorg, i motsats till kognitiv diskriminering eller mobbing, framhålls av Watson (2021) som helt nödvändigt för att omsorg för den som lär sig, ska kunna förverkligas. I detta ingår att elevens sätt att kognitivt fungera utgör grunden för hur undervisningen genomförs i termer av förhållningssätt och arbetssätt, och detta inkluderar hur det matematiska innehållet representeras. Avgörande för omsorg om lärandet, gestaltas i den tidigare forskningen också utifrån nödvändigheten att ha höga förväntningar på elevens lärande (Maloney & Matthews, 2020; Ransom, 2020; Ellerbrock & Vomvoridi-Ivanovic, 2022; Hunter & Stinson, 2019). Vidare visar den tidigare forskningen att omsorg om lärandet i matematik även rör sig kring etik, att genomföra undervisning som är cultural and inclusive sensitive och att det krävs en medvetenhet om strukturella och samhälleliga aspekters påverkan på elevers förutsättningar att lära sig matematik (Ellerbrock & Vomvoridi-Ivanovic, 2022; Maloney & Matthews, 2020; Bartell, 2020).

Sammanfattningsvis kan det konstateras att *ämnet* och det specifika området i matematiken har betydelse för vad omsorg om lärandet behöver vara, men även att elevens specifika förutsättningar och kunskaper och nätverkets, dvs gruppens och skolans erfarenheter och lärmiljön, har betydelse för omsorg i lärandet i det sammanhanget (se även Magne, 2006). Mer explicit finns möjligheter till omsorg på *individnivån* i att anpassa de kognitiva och metakognitiva strategierna till eleven i fråga, men även att ge matematiska utmaningar och förväntningar som är lämpliga och som för med sig en förväntan på elevens förmåga och god utveckling. Vad gäller *lärmiljön eller nätverksnivån* inryms möjligheter i att skapa en lärmiljö och strukturer för lärande där en mångfald av elever kan utvecklas och utmanas, vad gäller kompetenser, förmågor, språk och kulturella aspekter.

Omsorg om lärandet i matematik genom bedömning

Då det gäller bedömning i matematikämnet, framträder i tidigare forskning tre problemområden som kan förstås som sammanhörande med omsorg om lärandet och vara viktiga i bedömningssammanhang. *Etiska dilemman* är ett sådant område som forskningen uppehållit sig vid och påvisat. I detta problemområde är det ett starkt fokus på hur individens prestationer leder till utmaningar för läraren och framför allt vad gäller elever som av olika skäl hindras att visa kunskap (Bagger, 2024; Ernest, 2019; Smith, 2016). Problemområde nummer två är även det starkt kopplat till etiska frågeställningar, eftersom *relationer och känslomässigt stöd* kan vara effektivt för att möta och ibland lösa etiska dilemman. När elever blir mötta med empati och omsorg, kan också prestationen förbättras (Jansen & Bartell, 2013; Ramsom, 2020; Watson, 2021). Detta stöd kan vidare förstås i termer av det tredje problemområdet som framträdde i tidigare forskning, nämligen hur *lärarens didaktiska val* att stödja elevens kunskapsutveckling inte bara under lektioner, men också till följd av och under bedömningstillfället, kan öka omsorgen om lärandet i ämnet. Didaktiska val som både utmanar elevens lärande och leder till att eleven känner sig trygg har potential att leda till att bedömningen och undervisningen blir mer rättvis. Detta genom att eleven möts av höga förväntningar och samtidigt ges de bästa möjligheterna att visa sina kunskaper utifrån individuella behov och förutsättningar (se t.ex. Bartell, 2011; Ransom, 2020; Long, 2011).

Hur gestaltas omsorg om lärandet i matematik i kontexten av lärares arbete med nationell bedömning i förskoleklass i Sverige?

I det följande kontextualiseras inledningsvis det specifika med nationell bedömning i matematik i Sverige i de tidiga skolåren. I detta ingår en kort skildring av vad som är specifikt för undervisningskulturen i ämnet. Därefter följer en sammanfattning av tidigare forskning som genomförts av nationell bedömning i de tidiga skolåren av artikelförfattarna. Detta i syfte att illustrera möjligheter och utmaningar för att bedömning ska kunna vara omsorg om lärandet i matematik.

Nationell bedömning i ämnet matematik har tidigarelagts och utökats de senaste två decennierna. Den senaste förändringen är det obligatoriska bedömningsstödet i förskoleklass. Förskoleklass är det år då svenska elever som sexåringar börjar sin obligatoriska skolgång, något som kommer att utgöra grundskolans första år från 2026 (Utbildningsdepartementet, 2017a; 2017b; 2021). En liknande obligatorisk och nationellt reglerad bedömningsform implementeras under 2024 i den anpassade grundskolan, en anpassad skolform för elever med intellektuell funktionsnedsättning (Utbildningsdepartementet, 2021; 2022). Båda dessa insatser är en del i en åtgärdsgaranti för tidiga stödinsatser i svenska, svenska som andraspråk, och matematik och där kunskapsbedömning sker i förskoleklass, skolår 1 och 3. Denna tidiga identifiering förväntas leda till att lärmiljön utvecklas, extra anpassningar och, i de fall det behövs, utredningar och insatser i form av särskilt stöd sätts in. (Utbildningsdepartementet, 2017a; 2017b). Den obligatoriska och tidiga nationella bedömningen som görs av elevers kunskaper, förmågor och behov i lärandet i de tidiga skolåren utgör alltså grunden för identifiering av ESM-elever inom ramen för åtgärdsgarantin. De införda bedömningsstöden i förskoleklass har visat sig vara utmanande vad gäller tidsåtgång, men också att specialpedagogisk profession inte alltid är involverad. Hur åtgärdsgarantin sammantaget påverkat elevers kunskaper eller möjligheter att få stöd, återstår att bli utvärderat (Skolinspektionen, 2020; 2022, Skolverket 2021).

Möjligheter och Utmaningar till Omsorg om lärandet

Tidigare forskning om bedömning i matematik i förskoleklass har sammantaget rört elevers likvärdighet och lärares förståelse av denna, lärares möjligheter att utöva omsorg om elevens lärande, bedömningsmaterialen och dess instruktioner samt hur dessa och den politiska styrningen och implementeringen av bedömningsreformerna påverkar synen på eleven, dess kunskap och bedömning i ämnet. Gemensamt för forskningen är att den ofta diskuterar på vilket sätt det som framkommer harmonierar med den ordinarie undervisningen och dess epistemologi. I det följande redovisas de huvudsakliga dragen i denna forskning och utifrån ett fokus på möjligheter och utmaningar till omsorg om lärandet i matematik. Dessa teman är sammanfattade framför allt utifrån författarnas egna och publicerade artiklar.

I en studie av bedömningsmaterialet för förskoleklass är några diskurser särskilt framträdande: *en läroplansdiskurs, en kompetensdiskurs, en likvärdighetsdiskurs, en aktivitetsdiskurs* och *en stöddiskurs* (Walla, 2022). Dessa diskurser, tillsammans med det faktum att förskoleklassens lärare antas göra bedömningen vid skolstart och sedan utgå från dessa insikter om elevers kunskaper i sin fortsatta undervisning, leder till både möjligheter och utmaningar till omsorg om lärandet i matematik. Stöddiskursen i Wallas studie rör snarast på vilket sätt bedömningen är ett stöd för lärare att forma sin undervisning. Detta ligger nära det begrepp som vi i denna artikel utforskar: bedömning som omsorg om lärandet i matematik. Det sätt varmed förskoleklassens lärare talar om bedömningsstöden kan sättas i relation till den stöddiskurs som aktiveras inom ramen för obligatorisk bedömning i det tredje skolåret, där stödjandet av elevens möjligheter att visa kunskaper vid själva provtillfället blir till en förhandling genom att provets likvärdighet sätts mot elevens eller andra elevers (se även Bagger, 2015). En möjlighet i förskoleklassen är att lärare kan arbeta formativt i den meningen att deras undervisning kan utformas utifrån bedömningen, men det innebär också en utmaning som handlar om att det individfokus som bedömningen för med sig leder till att man tillskriver elever som källan till de problem som uppstår. Detta påminner om det fenomen som uppstår i årskurs tre då omsorgsdiskurser kolliderar mot provdiskursen, och stödet till eleverna förhandlas utifrån likvärdighetsaspekter, som redan nämnts (se Bagger, 2015). Då bedömningsaktiviteterna genomförs i grupp, innebär detta en friktion mellan olika typer av epistemologi eller kunskapssyn, där källan till kunskap är individuell och samtidigt kollektiv. Ytterligare en utmaning handlar om att den fortsatta undervisningen begränsas i förhållande till läroplanen, eftersom det kan uppstå en teaching to the test-effekt där undervisningen begränsas till de områden som ingår i bedömningsmaterialet. Detta trots att det är oklart om det är elevernas kunskaper i matematik, hur eleverna visar intresse för det matematiska innehållet i aktiviteterna att delta eller deras sociala förmågor som faktiskt synliggörs genom bedömningen (Walla, 2022).

Vad gäller likvärdighet i relation till bedömning av kunskaper i matematik i förskoleklass och hur lärare förstår detta fenomen, har en av författarna (Walla, 2024), i en studie av lärares uppfattningar visat att det finns epistemologiska spänningar beroende på om det är *individens eller gruppens kunskap* som sätts i förgrunden, om det är *lärarens eller den lärandes perspektiv* som får företräde och om *undervisning eller bedömning* är i fokus. I lärares tal om bedömning, kan likvärdighet förstås på ett sätt som påminner om den välkända diskursen sameness som påvisats och problematiserats även i tidigare forskning. Det innebär en syn på likvärdighet, där alla gör likadant och samma sak på gruppnivå. Liknande tendenser kan ses i en annan studie av förskoleklassens bedömningsstöd och där denna förståelse av likvärdighet står i kontrast till den bedömning som pedagoger i förskoleklassen genomförde innan dessa bedömningsstöd inrättades. Såväl bedömningsformen som materialet som användes för att få syn på elevens kunskap anpassades då till elevens förutsättningar och var snarare en del i ett holistiskt lära-känna samtal med eleven. Utifrån lärares tal om bedömningsmaterialet som implementerats av Skolverket, kan denna bedömning förstås som ett säkrare och mer likvärdigt sätt att bedöma elevers kunskaper eftersom alla gör likadant och samma sak på gruppnivå (Walla, 2024). Denna syn på likvärdighet står samtidigt i kontrast till lärares tal om likvärdig matematikundervisning, där likvärdighet kan förstås som att undervisningen ska ta hänsyn till elevers olika behov av anpassningar. Denna olikhet i behov och anpassningar, är däremot inte framträdande i relation till bedömningspraktiken. Lärare talar om likvärdig matematikundervisning som en individuellt anpassad väg i lärandet, vilket bygger på det man får veta om eleven genom bedömningen. Motsägelsefullt nog upplevs detta anpassande av undervisningen som något som är mer utmanande efter bedömningen, än före. Lärare talar också om likvärdighet relaterat till själva genomförandet, men där är det brist på eller olika tillgångar till resurser och den tidsbrist som lärare lider av, som kan förstås som ett hot mot likvärdig bedömning (Walla, 2024).

I ytterligare en studie av bedömningsmaterialet i förskoleklass undersöktes lärares förståelse av kunskapsbedömningen och den kvalitet och likvärdighet som den förde med sig (Bagger & Vennerg, 2019; 2021; 2024). Lärare deltog i fokusgruppsamtal inför, under och efter att de genomfört bedömningsstöden med sina klasser. Själva bedömningsmaterialet och instruktionerna till lärarna användes i dessa samtal som en utgångspunkt, liksom lärares anteckningar om genomförandet och utfallet av bedömningssituationerna. Det som visar sig är, att det sätt varmed lärare förstår den kunskap som de får om elevens kunskap i situationen av bedömning uppfattas som korrekt och rätt och ger lärarna legitimitet. Samtidigt ifrågasätter de om de kunskaper de får syn på är tillförlitliga och om bedömningen kan göras likvärdig i olika skolor. I detta ligger en motsägelse och komplexitet. Lärarna är i samband med bedömningen fokuserade på att kontrollera elevers kunskaper och vilka hinder som finns för att synliggöra elevers kunskaper. De kopplar också nödvändigheten av detta inte bara till rättvisa utan också till att vara trovärdiga som lärare. Vilket i sin tur beror på vad skolan har för resurser, avseende exempelvis specialpedagogisk kompetens, som lärarna kan tillgå före, under och efter bedömningstillfället. Sammanfattningsvis hamnar ett ökat fokus på kontroll av kunskap ibland i konflikt med anpassningar, relationsarbete och individuella behov i bedömningssituationen, som kan leda till att bedömningen inte blir rättvis.

Policystudier av förarbeten för beslut om bedömningsstöden och analyser av bedömningsmaterialet har undersökts utifrån vilken syn på eleven, elevens kunskap och bedömning som framträder. Slutsatserna blev då att det finns en risk för "skolifiering" och teaching to the test, samt att det finns en risk att den barncentrerade och omsorgscentrerade undervisningskultur som råder i förskoleklass får ge vika för ett ökat fokus på måluppfyllelse och kontroll av kunskap (Bagger, m fl., 2019). Detta bekräftas också av Ackesjö och Persson (2021) som undersökt tjugo års policydokument som rör tillblivande av och utvecklingen av förskoleklassen som skolform. Den "skolifiering" som påvisades av Bagger m.fl. (2019), framträdde även i Ackesjö och Perssons (2019) studie, tillsammans med en tydlig glidning av fokus från pedagogiska intentioner om lärande och inkludering av alla elever, och mot en skolorienterad diskurs som rör måluppfyllelse och kunskapsekonomi.

Vilka indikationer finns för möjligheter och hinder med nationell bedömning som omsorg om lärandet i matematik?

Vad gäller möjligheter och utmaningar med hur bedömning ska kunna vara omsorg om lärandet i matematikämnet visar sig tre områden som kan sägas innebära möjligheter såväl som utmaningar både i det nationella forskningsfältet som i det svenska sammanhanget av nationell och obligatorisk bedömning i förskoleklass. Dessa visar sammantaget på de spänningsfält som uppstår i samband med nationell bedömning i ämnet matematik. För det första framträder ett tema där motsättningar mellan *rättvisa och likvärdighet* framträder, för det andra att det råder en *spänning mellan individuell kontra kollektiv kunskap* och för det tredje framträdde en spänning mellan *att främja lärande och att bedöma kunskaper*.

Spänningen mellan *individuell och kollektiv kunskap* hör samman med att elevers resultat i samband med nationell bedömning förvandlas till ett personligt ansvar, där prestationerna förstås som neutrala (Bagger, 2024; Ernest, 2019; Smith, 2016). Detta har också visat sig i systematiska reviewer av tidigare forskning och genom att bedömning i matematik är en mekanism för att individualisera både undervisningen och förståelsen för kunskaper och förmågor (Nieminen, et al., 2023). Inom detta tema visar sig motsättningen mellan olika typer av samtidigt förekommande epistemologier. Bedömning såväl avspeglar som konstruerar idén om individen. Kunskap i matematik konstrueras som något som blir synligt genom att fokusera på den individuella studenten, vilket i sig avspeglar en idé om matematikens natur som inneboende i individer snarare än i det kollektiva och gemensamma. Samtidigt som den nationella bedömningen individualiserar målen för kunskapsutvecklingen så konstrueras just dessa mål som den kunskap som räknas. Det uppstår genom detta en dubbel styrning, av att såväl rikta lärares uppmärksamhet och undervisningen mot målen i läroplanen, men en styrning av synen på legitim kunskap som leder mot en individbaserad epistemologi. Denna kunskapssyn av vilken kunskap som räknas och med förmågor som något som tillhör individen, står i skarp kontrast mot förskoleklassens gemenskapsorienterade epistemologi, där lärande och utveckling sker i interaktion, kollektivt och i ett sammanhang. Att balansera dessa aspekter av individualiserad kontra gemenskapsorienterad epistemologi förblir därför en utmaning för att skapa en meningsfull och gynnsam lärandemiljö för elever i matematikundervisningen. Implikationer som detta för med sig är att såväl beslutsfattare, provkonstruktörer som lärare behöver förhålla sig till denna friktion. För att kunna fokusera bedömning som omsorg om lärandet, måste denna dualism såväl uppmärksammas som hanteras.

Vad gäller friktionen mellan *rättvisa och likvärdighet*, så kan den illustreras genom den avvägning som lärare har att göra mellan att balansera bedömningens likvärdighet mot elevens och olika elevers rättigheter och likvärdighet mot varandra (se t.ex. Bagger, 2015 2017). Det tycks som om det största hindret mot likvärdighet, ironiskt nog, är bedömningen själv. Nationell och obligatorisk bedömning är tillkommen utifrån ett behov av att göra undervisning och bedömning i ämnet mer likvärdig. Trots detta tycks olika professioner som arbetar med bedömning i matematik – forskare, lärare, provkonstruktörer – helt enkelt sakna ett yrkesspråk och förmåga att föreställa sig bedömning utifrån någon annan utgångspunkt än den tidigare nämnda individorienterade epistemologin (se Nieminen, et al., 2023). Detta fenomen kan i sig förstås som ett uttryck för hur starkt bedömning i ämnet vilar mot idén om en modern och rationell mätning, trots årtionden av forskning och arbete i utbildningssektorn där gemensamhetsorienterade perspektiv på bedömning antagits, såsom exempelvis formativ bedömning. I detta ligger en implikation utifrån aspekter av likvärdighet. För att bedömning ska kunna vara genuin omsorg om lärandet i matematik, behöver stävan efter likvärdighet och inkludering få plats.

Slutligen finns en friktion mellan *främjandet av lärandet* och *bedömningen av kunskap*. Mellan dessa två uppstår en olycklig åtskillnad som visar sig i såväl den tidigare forskningen som i exemplen från nationell bedömning i förskoleklass i Sverige. Detta är motsägelsefullt eftersom denna bedömning just är till för att ge mer likvärdiga möjligheter att följa och främja lärandet. Förklaringen kan kanske finnas i det faktum att såväl inkludering som likvärdighet är helt beroende av gemenskapsorienterade dimensioner av undervisning, vilket kolliderar mot den starka förankring som bedömning har i en individualistisk epistemologi (Nieminen, 2022). Så länge som bedömning är hårt knuten till individualistiska värden, epistemologier och ontologier, kommer alla försök att använda bedömning för att förbättra likvärdighet och social rättvisa, att falla platt. Om bedömning enbart tillåter individuella subjekt och kunskaper att framträda, lämnas inget utrymme för elever att lära känna sig själva och att bli en del av en gemenskap där omsorg om lärandet i matematik är i fokus.

Avslutande reflektion

I de två olika nedslagen, av tidigare forskning samt nationell obligatorisk bedömning i förskoleklass, framträder sammantaget en mångfacetterad bild av möjligheter och utmaningar med att säkra att *bedömning är omsorg om lärandet i ämnet.* Aspekter som rör etik och spänningen mellan lärande och bedömning samt det individuella och kollektiva står då i centrum. Såväl den internationella som den nationella forskningen indikerar att för att kunna skapa en omsorgsorienterad lärandemiljö vid bedömningssituationer krävs medvetna didaktiska val, respekt för elevernas mångfald och en balans mellan att utmana elevers tänkande och att visa omsorg om deras specifika sätt att mattematisera och kognitivt fungera. Den gemensamhetsorienterade epistemologin måste då ges plats och balanseras mot den individorienterade. Det är motsägelsefullt nog en möjlighet, men också ett hinder för bedömning som omsorg om lärandet, att ha höga förväntningar under och efter bedömningssituationer och att samtidigt upprätthålla den gemenskap och delaktighet som t.ex. Norwich (2014) beskrivit. Detta innebär i sin tur att det vid nationell kunskapsbedömning potentiellt väcks specifika professionsetiska frågeställningar vid bedömning av ESM-elevers kunskaper och som måste beforskas ytterligare för att säkra bedömning som omsorg om lärandet.

Referenser

Ackesjö, H. (2021). Early assessments in the Swedish preschool class: Coexisting logics. *CEPRA-Striben, 27*, 38-49. doi:10.17896/UCN.cepra.n27.417

Ackesjö, H., & Persson, S. (2019). The schoolarization of the preschool class – policy discourses and educational restructuring in Sweden. *Nordic Journal of Studies in Educational Policy,* 5(2),127-136. doi:10.1080/20020317.2019.1642082

Anthony, G., McLachlan, C., & Lim Fock Poh, R. (2015). Narrative assessment: Making mathematics learning visible in early childhood settings. *Mathematics Education Research Journal, 27*(3), 385-400.

Bagger, A. (2024). Ethical Dilemmas and Professional Judgement During National Assessment in Mathematics. In *ETHICS AND MATHEMATICS EDUCATION: The Good, The Bad and the Ugly,* edited by Paul Ernest. Springer.

Bagger, A. (2021). Evaluation of Swedish educational material. *Abstract presented at European Conference on Educational Research* (ECER 2021), (Online Conference), Geneva, Switzerland, september 6-10, 2021

Bagger, A., & Vennberg, H. (2024). Care for the learning of mathematics – put to the test. *Research in Mathematics Education, 1*-19. doi10.1080/14794802.2024.2339802

Bagger, A. & Vennberg, H. (2023). The Fabrication of SEM-Students as Knowers in Mathematics – Trough Mandatory Assessment in Preschool-class. *Conference, presented abstract at NERA Conference 2023: Digitalization and Technologies in Education Opportunities and Challenges* (NERA 2023), Oslo, Norway, March 15-17, 2023.

Bagger, A. & Vennberg, H. (2019). Early assessment in mathematics, the ethics in a practice close research approach. *In book of abstracts, Fjärde nationella konferensen i pedagogiskt arbete. Tema: Pedagogiskt arbete i en global tid*. I Umeå, 19-20 augusti, 2019.

Bagger, A., Vennberg, H. & Boistrup, L, B. (2019). The politics of early assessment in mathematics education. In: Jankvist, U.T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M., *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Paper* accepted and presented at 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11), Utrecht, the Netherlands, February 6-10, 2019 (ss. 1831-1838). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Bagger, A., & Roos, H. (2015). How Research Conceptualises the Student in Need of Special Education in Mathematics. In O. Helenius, A. Engström, T. Meaney, P.Nilsson, E. Norén, J. Sayers & M. Österholm, M. (Eds.), Development of Mathematics Teaching: Design, Scale, Effects, *Skrifter från Svensk förening för matematikdidaktisk forskning. Proceedings from MADIF9:* The Ninth Swedish Mathematics Education Research Seminar. Linköping: SMDF

Bagger, A., Palmer, H. & Roos, H. (2019). A *systematic literature review on special educational needs in mathematics.* Specialpedagogiska Myndigheten. Ref. 9UTV-2017/82

Ball, S.J. (2018). The Banality of Numbers. In *Testing and Inclusive Schooling: International Challenges and Opportunities* (Routledge Research in International and Comparative Education), edited by B. Hamre, A. Morin, and C. Ydesen, 79-86. New York: Routledge.

Boistrup, L.B. (2017). Assessment in mathematics education: A gatekeeping dispositive. In N. Bohlmann, A. Pais & H. Straehler-Pohl (Eds.), *The disorder of mathematics education*, 209-230. Springer.

Bartell, T.G. (2011). Caring, Race, Culture and Power: A Research Synthesis Toward Supporting Mathematics Teachers in Caring With Awareness. *Journal of Urban Mathematics Education 4*(1) 50-74.

Braun, V. and Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2). 77-101.

Braun, V., & Clarke, V. (2019). Reflecting on reflexive thematic analysis. Qualitative *Research in Sport, Exercise and Health, 11*(4), 589-597. https://doi.org/10.1080/2159676X.2019.1628806

Braun, V., & Clarke, V. (2021). One size fits all? What counts as quality practice in (reflexive) thematic analysis? *Qualitative Research in Psychology, 18*(3), 328-352. https://doi.org/10.1080/14780887.2020.1769238

Byrne, D. (2022). A worked example of Braun and Clarke's approach to reflexive thematic analysis. *Quality & Quantity, 56*(3), 1391-1412. https://doi.org/10.1007/s11135-021-01182-y

Ellerbrock, C.R & Vomvoridi-Ivanovic, E. (2022). Setting the stage for responsive middle level mathematics teaching: Establishing an adolescent-centered community of care. *Middle School Journal, 52*(2) pp 12-21.

Folkhälsomyndigheten. (2022). *Självrapporterad stress, somatiska och psykiska besvär bland skolbarn.* Rapport nr 2107. Hemsida.

Hackenberg, A. (2010). Mathematical Caring Relations: A Challenging Case. *Mathematics Education Research Journal, 22*(3), 57-83.

Hunter, J.G., & Stinson, D.W. (2019). A Mathematics Classroom of Caring among a Black Male Teacher and Black Male Students. *Curriculum and Teaching Dialogue, 21*(1-2), 21-34.

Högberg, B., Strandh, M., & Hagquist, C. (2020). Gender and secular trends in adolescent mental health over 24 years – The role of school-related stress. *Social Science Medicine*, 250, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.socscimed.2020.112890

Jansen, A. & Bartell, T. (2013). Caring Mathematics Instruction – Middle School Students' and Teacher's Perspectives. *Middle Grade Research Journal 8*(1) pp 33-49

Jones, I., & Lake, V.E. (2020). Ethics of care in teaching and teacher-child interactions. The Journal of Classroom Interaction, 55(2), 51-65.

Klein, J. (2017) How schools cope with the double challenge of excellence in high-stakes risk tests and investment in education. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 24*(4), 474-488, DOI: 10.1080/0969594X.2016.1146657

Long, J.S. (2011). Labelling Angels: Care, Indifference and Mathematical Symbols. *For the Learning of Mathematics, 31*(3)

Magne, O. (2006). Historical Aspects on Special Education in Mathematics. *Nordic Studies In Mathematics Education, 11*(4), 7-35.

Maloney, T., & Matthews, J.S. (2020). Teacher Care and Students' Sense of Connectedness in the Urban Mathematics Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(4), 399-432.

Nicol, C., Novakowski, J., Ghaleb, F., & Beairsto, S. (2010). Interweaving Pedagogies of Care and Inquiry: Tensions, Dilemmas and Possibilities. *Studying Teacher Education, 6*(3), 235-244.

Nieminen, J.H. (2022). Assessment for Inclusion: rethinking inclusive assessment in higher education. Teaching in Higher Education, 1-19.

Nieminen, J.H., Bagger, A., Padilla, A., & Tan, P. (2023). Student positioning in mathematics assessment research: A critical review. *Journal for Research in Mathematics Education, 54*(5), 317-341.

Norwich, B. 2014. Recognising Value Tensions that Underlie Problems in Inclusive Education. *Cambridge Journal of Education 44*(4), 495-510. doi:10.1080/0305764X.2014.963027

Nygren, G. (2021) *Jag vill ha bra betyg: En etnologisk studie om höga skolresultat och högstadieelevers praktiker*. Doktorsavhanding. [Doctoral dissertation]. Uppsala University.

Ransom, J.C. (2020). Love, Trust, and Camaraderie: Teachers' Perspectives of Care in an Urban High School. *Education and Urban Society, 52*(6), 904-926.

Roos, H., Bagger, A. (2024). Ethical dilemmas and professional judgment as a pathway to inclusion and equity in mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education* https://doi.org/10.1007/s11858-023-01540-0

Roos, H, Lindfors, M & Bagger A. (2020). Educational settings in relation to special educational needs in mathematics. *Nordisk Matematikkdidaktikk, NOMAD, 25*(3-4), 95.

Skolinspektionen (2020). *Kartläggning och tidiga stödinsatser i förskoleklassen* (Dnr: 400-2019:6183)

Skolinspektionen (2022). *Årsrapport 2022. Erfarenhet från inspektion.*

Skolverket (2021). *Uppföljning av obligatoriska kartläggningsmaterial i förskoleklass och bedömningsstöd i årskurs*. Rapport 2021:8.

Slee, R. (2018). "Testing Inclusive Education?" In *Testing and Inclusive Schooling: International Challenges and Opportunities* (Routledge Research in International and Comparative Education, edited by B. Hamre, A. Morin, and C. Ydesen, pp. 79-86. Routledge.

Svenska läkaresällskapet. (2024). Den Hippokratiska Eden. Hemsida: https://www.sls.se/etik/etiska-koder/den-hippokratiska-eden/ Hämtad 20240217

Utbildningsdepartementet (2021). *Utbildningsutskottets betänkande Elevhälsa och stärkt utbildning för elever med intellektuell funktionsnedsättning.* 2021/22:UbU27.

Utbildningsdepartementet (2017a). *Uppdrag att ta fram kartläggningsmaterial och revidera obligatoriska bedömningsstöd och nationella prov i grundskolan, sameskolan och specialskolan.* Regeringsbeslut, Regeringen, Utbildningsdepartementet. U2017/02561/S

Utbildningsdepartementet (2017b). *Uppdrag att genomföra kompetensutvecklings- och implementeringsinsatser avseende en garanti för tidiga stödinsatser i förskoleklassen, grundskolan, specialskolan och sameskolan*. Regeringsbeslut, Regeringen. U2018/02959/S

Utbildningsdepartementet (2021). *En tioårig grundskola – Införandet av en ny årskurs 1 i grundskolan, grundsärskolan, specialskolan och sameskola*, SOU 2021:33.

Utbildningsdepartementet (2022). *Elevhälsa och stärkt utbildning för elever med intellektuell funktionsnedsättning*. Prop 2021/22:162.

Walla, M. (2022). Diversity of assessment discourses in Swedish and Norwegian early mathematics education. *Journal of Childhood, Education & Society (Online), 3*(2), 98-111. https://doi.org/10.37291/2717638X.202232178

Walla, M. (2024). Diverse meanings ascribed to equity in early mathematics assessment. *Education Inquiry*, 1-17. doi.org/10.1080/20004508.2024.2316390

Watson, A. (2021). *Care in mathematics education: alternative educational spaces and practices.* Palgrave Macmillan.

English abstract

The article illustrates how assessment can be care for the learning in mathematics. Research indicates friction between discourses of care and discourses related to performance. The latter often take precedence in national assessment, which becomes problematic in the early school years. The article brings together research from the field of mathematics education, assessment research, and inclusive education. The international research front is depicted, after which assessment as care for the learning is illustrated through national assessment in preschool class in Sweden. The challenges and opportunities of understanding and using national assessment s as care for all students' learning are discussed.

Specifika matematiksvårigheter – diagnos och pedagogiska och didaktiska anpassningar

Helena Roos, Malmö Universitet

Ann-Louise Ljungblad, Malmö Universitet

Jonas Walfridsson, Danderyds Sjukhus AB

Abstract: *Artikeln utgår ifrån kunskapsområdet specifika matematiksvårigheter och reflekterar och problematiserar hinder och möjligheter i relation till tvärvetenskaplig samverkan mellan utredningspraktik och matematikundervisning i en svensk kontext. De hinder och möjligheter som framträder visar på ett behov av en tvärvetenskaplig samverkan med förståelse för olika perspektiv. Parallellt finns även ett behov av ett förbättrat kunskapsläge på svensk nationell, regional och kommunal nivå inom vård och skola avseende specifika matematiksvårigheter för att kunna erbjuda adekvat stöd. Artikeln synliggör kunskapsbristen kring pedagogiska och didaktiska anpassningar grundat i förebyggande insatser som kan stödja elevernas hälsa och välmående.*

Introduktion

Antalet elever med diagnostiserad specifik matematiksvårighet (enligt ICD-10) ökar i Sverige (Danderyds sjukhus, 2023). Den gängse kunskapen om diagnosen är emellertid låg om man jämför med närliggande diagnoser som dyslexi, ADHD och autismspektrumtillstånd (AST). Diagnosen specifika matematiksvårigheter (även kallad dyskalkyli) har ännu inte fått samma acceptans som dyslexi. Trots att forskning om Specifika Matematiksvårigheter (SM) har ökat (Agostini et al., 2022) förblir området underforskat jämfört med dyslexi (Rapin, 2016; Andersson & Östergren, 2012). I Sverige finns på nationell nivå en mångfacetterad problematik inom detta underforskade område. Problematiken ligger i en avsaknad av nationell kunskap om SM baserad på forskning och en avsaknad av riktlinjer avseende utredning, kompetenser, metoder och anpassningar. Både på nationell, regional och kommunal nivå i Sverige finns således ett behov av att uppmärksamma SM och generera ny tvärprofessionell kunskap som bryggar över från diagnos till skolans anpassningar.

Utifrån ett likvärdighetsperspektiv finns en stor skillnad mellan hur olika regioner och kommuner i Sverige arbetar med SM. De som i dagsläget erbjuder utredning är Region Stockholm, Östergötland och Skåne samt Uppsala kommun. I Västmanland erbjuds vuxna patienter denna typ av utredning. Skillnaden i tillgång till utredningskompetens visar på en nationell problematik med bristande likvärdighet för elever i SM.

En stor del av forskningen kring SM är beteende- och neurovetenskapligt inriktad (Vogel & De Smedt, 2021) och fokuserar på individens inneboende förutsättningar. Även om denna forskning är relevant för att förstå enskilda individers utmaningar efterlyser vi mer forskning kring hur ett pedagogiskt och didaktiskt handlande i matematikklassrummet kan utvecklas baserat på individens förutsättningar. Detta kräver en tvärprofessionell samverkan med respekt och förståelse för olika professioners spetskompetenser. Mot denna bakgrund syftar denna artikel till att utifrån teori reflektera och problematisera Specifika Matematiksvårigheter (SM) utifrån logopedisk utredningspraktik och matematikundervisning i relation till tvärvetenskaplig samverkan. Det görs med stöd av följande forskningsfråga: *Vilka hinder och möjligheter finns för tvärvetenskaplig samverkan kring SM?* Denna reflektion görs med utgångspunkt i två överlappande perspektiv på SM, (i) logopedisk utredningspraktik och (ii) specialpedagogisk matematikdidaktik.

Tidigare forskning om specifika matematiksvårigheter

I detta avsnitt presenteras först forskning kring och definitioner av SM och sedan forskning om SM i specialpedagogisk matematikdidaktik. Därefter diskuteras konsekvenser av SM. Kunskapsområdet SM finns inom flera olika forskningsparadigm, vilket leder till varierande begreppsanvändning (Mazzocco, 2007) och brist på kommunikation mellan paradigmen skapar utmaningar. Då denna artikel positionerar sig inom det specialpedagogiska matematikdidaktiska fältet används begreppet Specifika Matematiksvårigheter.

Diagnosen *Specifik räknesvårighet* eller *Developmental Learning Disorder with Impairment in Mathematics* (ICD-11, 2019), *Developmental Dyscalculia* (DD) eller *Mathematical Learning Disability/Difficulties* (MLD) (Mazzocco, 2007) omtalas i pedagogiska sammanhang oftast som SM. Bakom den skiftande terminologin döljer sig en i hög grad bestående nedsättning i en individs förmåga att tillägna sig i första hand aritmetik (räkning), men inte sällan även annan grundläggande matematik såsom begreppsförståelse, taluppfattning, metodkunskaper samt resonemangs- och problemlösningsförmåga (Kißler et al., 2021). SM är definierat i två internationellt dominerande diagnosförteckningar: Världshälsoorganisationens (WHO, 2019) diagnostiska klassifikation ICD (International Statistical Classification of Diseases and Related Health Problems) och American Psychiatric Associations (2022) DSM (Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders). Diagnosen går i den senaste utgåvan av ICD under namnet *Developmental Learning Disorder with Impairment in Mathematics* (ICD-11, WHO 2019). Definitionen i ICD-11 (version 2022-02) lyder:

> "Developmental learning disorder with impairment in mathematics is characterized by significant and persistent difficulties in learning academic skills related to mathematics or arithmetic, such as number sense, memorization of number facts, accurate calculation, fluent calculation, and accurate mathematical reasoning. The individual's performance in mathematics or arithmetic is markedly below what would be expected for chronological or developmental age and level of intellectual functioning and results in significant impairment in the individual's academic or occupational functioning. Developmental learning disorder with impairment in mathematics is not due to a disorder of intellectual development, sensory impairment (vision or hearing), a neurological disorder, lack of availability of education, lack of proficiency in the language of academic instruction, or psychosocial adversity." (ICD-11)

I den amerikanska versionen DSM-V från American Psychiatric Association (2022) ges en liknande definition av specifika matematiksvårigheter:

> "Specific Learning Disorder – with impairment in Mathematics (315.1) is a neurodevelopmental disorder of biological origin manifested in learning difficulties and problems in acquiring academic skills markedly below age level and manifested in the early school years, lasting for at least 6 months, not attributed to intellectual disabilities, developmental disorders, or neurological or motor disorders. Specific learning disorder with impairment in mathematics includes possible deficits in: Number sense, Memorization of arithmetic facts, Accurate or fluent calculation, Accurate math reasoning." (DSM-V, 2022)

Avseende orsaker till uppkomst av SM har neuroanatomiska, neurofysiologiska och generella kognitiva riskfaktorer pekats ut, liksom miljöfaktorer. Ofta framhålls en relation mellan en genetiskt betingad sårbarhet i kombination med ogynnsamma yttre faktorer (Vogel & De Smedt, 2021). Genom åren har olika neurokognitiva förklaringsmodeller lagts fram, varav de flesta utgår från att svårigheterna bottnar i en nedsättning i numerisk förmåga som antals- och mängduppfattning eller kopplingen siffra – antal (Butterworth et al., 2011; Andersson & Östergren, 2012). De s.k. domängenerella förklaringsmodellerna, som utgår från att svårigheterna förmodligen bottnar i nedsättningar i generella kognitiva förmågor som processhastighet eller minneskapacitet, har emellertid vunnit mark och det råder idag konsensus om att orsakerna till uppkomst av dyskalkyli kan vara åtskilliga. Den uppskattade förekomsten varierar, men det oftast angivna intervallet är 3-6 % (Kucian & von Aster, 2015; Price & Ansari, 2013). Litteraturen hänvisar också till förekomst i intervallet 5-7 % (Vogel & De Smedt, 2021; Nelson & Powell, 2018). SM kan således vara lika vanligt förekommande som ADHD och dyslexi, det vill säga minst ett barn i varje klass. Morsanyi et al. (2018) fann att 5,7 % i ett underlag på drygt 2400 grundskoleelever mötte diagnoskriterierna. Resultatet visar ingen skillnad i förekomst mellan pojkar och flickor, vilket är i linje med annan internationell forskning (t.ex. Dowker, 2019; Haberstroh & Schulte-Körne, 2019).

Det finns en mängd orsaker och faktorer som kan leda till att elever uppvisar matematiksvårigheter. Dessa svårigheter kan drabba olika matematiska domäner och vara av såväl temporär som av mer permanent natur. Svårigheterna kan orsakas av både yttre och inre faktorer, där SM hör till den senare kategorin (von Aster & Shalev, 2007). Diagnosen kan ta sig olika uttryck (Haberstroh & Schulte-Körne, 2019) men kännetecknas primärt av problem med att tillägna sig aritmetiska fakta och en nedsatt förmåga till grundläggande beräkningar. Räknandet hos elever i SM är till stor del icke-automatiserat, går långsammare och det blir många fel i beräkningarna. Dessutom tenderar denna elevgrupp att långt upp i åren bli kvar i mödosamma och ineffektiva räknestrategier (Haberstroh & Schulte-Körne, 2019; Price & Ansari, 2013).

Den *utvecklingsbetingade* varianten av SM beskrevs av Košč (1974) med begreppet dyskalkyli och förklaringen “a structural disorder of mathematical abilities”. I Koščs definition skiljer sig dyskalkyli från andra former av matematiksvårigheter då problematiken är medfödd, och beror på att neurala strukturer som understödjer aritmetiska och matematiska tankeprocesser är underutvecklade. Sedan dess har SM definierats och operationaliserats på ett flertal olika sätt, vilket har försvårat en unison definition och avgränsningar för såväl forskning som praktik (Price & Ansari, 2013). En internationell utblick visar att det i Storbritannien (SASC, 2019), Tyskland (Haberstroh & Schulte-Körne, 2019), Italien (AIRIPA-AID, 2012) och Nederländerna (van Luit et al., 2014) finns nationella riktlinjer och / eller lagstiftning som erkänner diagnosen och / eller reglerar utredning av och stöd till elever som fått diagnosen. I Sverige saknas ännu sådana riktlinjer.

SM inom specialpedagogisk matematikdidaktik

SM är omtvistat inom det specialpedagogiska matematikdidaktiska forskningsfältet (Sjöberg, 2006; Gifford, 2006). Kritik har riktats mot att SM anses vara svårdefinierat i relation till de många orsaker som kan göra att elever hamnar i matematiksvårigheter.

Det anses vara problematiskt att urskilja ett eventuellt medicinskt tillstånd i bruset av andra inverkande faktorer (Scherer et al., 2016). Denna artikel tar utgångspunkt i ett specialpedagogiskt matematikdidaktiskt perspektiv. Inom detta fält används ofta begreppet *särskilda utbildningsbehov i matematik* (Magne, 2006; Roos, 2019) för att lägga fokus på hur insatser i utbildningen kan utformas i enlighet med de behov som finns.

Forskning (Butterworth, 2018) synliggör hur SM framträder inom grundläggande aritmetik, vilket är något som matematiklärare dagligen möter i sin vardag. Eftersom antalsuppfattning och tidsuppfattning är grundläggande matematiska strukturer skapar det ofta problem för denna elevgrupp inom alla skolämnen (Dowker, 2019). SM är komplext i relation till elevers lärande och access till matematik (Santos, 2020). I denna komplexitet blir följande matematikdidaktiska fråga av största vikt: Hur kan lärare i undervisningen skapa access till matematik utifrån elevernas individuella förutsättningar (Roos, 2019)? Scherer et al. (2016) visar att modeller för matematikundervisning i relation till matematiksvårigheter är en komplex aktivitet, där man behöver beakta både elevernas individuella förutsättningar, det specifika matematiska innehållet och den aktuella undervisningssituationen. Här är såväl lärarens didaktiska kunskap som samarbetet mellan professioner för att skapa den bästa lärmiljön centralt (Roos & Gadler, 2018). Detta är i linje med Magnes (2006) undervisningsmodell för elever i matematiksvårigheter, som understryker tre viktiga aspekter som läraren behöver beakta: matematiken, eleven och det nätverk som finns runt eleven. En annan undervisningsmodell för matematiksvårigheter är *Kompassmodellen* (Dalvang & Lunde, 2011) som betonar hur undervisningskontexten består av tre lika betydelsefulla delar: innehåll, undervisningsform och elevens förutsättningar för lärande.

Den europeiska situationen avseende undervisning och matematiksvårigheter är mångfacetterad och varierad. Det finns emellertid utmaningar som är desamma oavsett land och kultur (Scherer et al, 2023). En sådan gemensam utmaning är diskrepansen mellan vad officiella lagar och regler kräver kontra vad som sker i praktiken. Andra gemensamma utmaningar är bristen på kvalificerade lärare med rätt kompetens för att stödja elever i SM samt bristen på specialpedagogisk matematikdidaktisk kompetens på skolor (Scherer et al, 2023).

Konsekvenser av matematiksvårigheter

Forskning visar tydligt att matematiksvårigheter innebär sämre utsikter till framtida inkomster, hälsa, välmående och ett självständigt vuxenliv (Haberstroh & Schulte-Körne, 2019). I en kohortstudie från Storbritannien följdes individer födda 1958 med avseende på grundläggande matematiska färdigheter. Hela 25 % av populationen uppvisade uttalade svårigheter med matematik i vuxen ålder, vilket också hade lett till problem för individerna att få arbete samtidigt som det påverkade deras hälsa, ekonomi och livskvalitet med risk för social exkludering (Bynner & Parsons, 1997). Även en svensk studie har visat på samband mellan grundläggande räknefärdigheter och förmåga att hantera sin privatekonomi (Almenberg & Widmark, 2011). Studien synliggör hur matematiksvårigheter kan få allvarliga konsekvenser för individens välbefinnande.

Grova uppskattningar visar att en individ tänker 1000 matematiska tankar varje timme (Butterworth, 2000). Räkne- och matematiksvårigheter kan således vara minst lika begränsande som läs- och skrivsvårigheter (Bynner & Parsons, 1997), då avsaknad av basala matematiska färdigheter leder till problem i en mängd vardagliga situationer som att betala, bedöma tidsåtgång eller följa ett recept (Shalev, 2004). Semeraro et al. (2020) synliggör också andra aspekter av matematiksvårigheter i form av socio-emotionella och beteendemässiga utmaningar, låg självkänsla, låg copingförmåga, depression och ångest, negativa skolupplevelser samt ökad skolfrånvaro.

Hinder och möjligheter för tvärvetenskaplig samverkan

I detta avsnitt diskuteras den rådande kontexten inom utredningspraktik av SM och situationen i dagens skola i Sverige. Avsnittet avslutas med en diskussion med fokus på samverkansmöjligheter.

Utredningspraktik

När misstanke om SM uppstår är utredning på vissa håll en angelägenhet för vården och remiss ska skickas in. Samtidigt är det ovanligt att utredning initieras då det saknas kunskap om hur och till vem man remitterar. Remisserna kommer i de flesta fall (75 %) från Skolhälsovården (SLL, 2015; Intern statistik, Logopedkliniken). Landets största remissinstans är Logopedkliniken vid Danderyds sjukhus. Hit remitteras från hela Sverige, då utredningsenheter saknas i de allra flesta regioner. En logopedisk utredning av räkneförmåga ger en fördjupad bild av individens styrkor (t.ex. språklig förmåga, visuell perception och abstrakt logiskt tänkande) samt svårigheter/utvecklingsområden (t.ex. basal aritmetik inom talområdet 1-20) (se t.ex. Butterworth, 2018). Den ökade förståelsen av egna styrkor och utvecklingsområden som utredningen ger kan bidra till att eleven får en mer objektiv självuppfattning, något som i sin tur har stor betydelse för motivationen till lärande (Semeraro et al., 2020). Av vikt är även att vårdnadshavare och pedagoger informeras om eventuella SM samt om lämpliga pedagogiska och didaktiska anpassningar och förhållningssätt, där elevernas individuella förutsättningar beaktas (se t.ex. Scherer et al., 2016). Detta möjliggör att svårigheterna kan mötas med större förståelse i både hem och skola. Dock finns här ett potentiellt hinder i att utredande logopeder inte har specialpedagogisk matematematikdidaktisk kompetens, vilket gör att de inte alltid har möjlighet att rekommendera lämpliga pedagogiska och didaktiska anpassningar och förhållningssätt.

Dagens svenska skola ur ett matematiksvårighetsperspektiv

Matematiksvårigheter är ett vanligt förekommande fenomen i svensk skola, och både nationella och internationella undersökningar (Skolverket, 2023) visar på sjunkande resultat. Denna nedåtgående trend är alarmerande och synliggör konsekvenser av lärares svårigheter att didaktiskt och pedagogiskt möta mångfald i klassrummen och arbeta inkluderande i matematik. Studier har visat att även om det finns goda intentioner i matematikundervisningen utmanas inkluderingen och därmed likvärdigheten när det gäller matematiksvårigheter (Roos, 2019; 2023; Karlsson, 2019).

I dagens samhälle behöver medborgare hantera grundläggande matematik. Samtidigt är matematikämnet en vattendelare i svensk skola, där ett icke-godkänt betyg i årskurs 9 begränsar elevens möjligheter till vidare studier (Klapp, 2017). I relation till detta belyser Kucian och von Aster (2015) att det inte är ovanligt att matematiksvårigheter börjar tas på allvar först under mellan- eller högstadiet, ibland ännu senare eller inte alls. Att problematiken inte upptäcks är således ett hinder för elever med SM, varav många anstränger sig hårt men är i behov av särskilda specialpedagogiska insatser för att klara matematiken (Semeraro et al., 2020). Viktigt att beakta i relation till detta är att Skollagen (SFS2010:800) fastställer att det i elevhälsan ska finnas tillgång till specialpedagog eller speciallärare, men det saknas direktiv om hur elevens stödinsatser ska tillgodoses.

I en överblick av kursplaner inom specialpedagogprogram framträder inte SM som ett förekommande fördjupat specialpedagogiskt kursmål. Det leder till en generell nationell problematik när specialpedagoger som genomför pedagogiska utredningar, i syfte att bedöma om en elev är i behov av utredning eller särskilt stöd, har begränsad kunskap om SM (se ex Roos & Gadler, 2018). Denna kunskapsbrist kan göra att utredningar och riktade specialpedagogiska insatser både i och utanför matematikklassrummet blir missriktade eller helt uteblir. Sammantaget framträder bilden av organisatoriska brister i skolans specialpedagogiska stöd i matematik såväl inom elevhälsans arbete som i matematikundervisningen, likväl som en avsaknad av kunskap bland matematiklärare och specialpedagogisk personal inom området SM (Scherer et al., 2023; Karlsson, 2019). Detta gör att utvecklade modeller för att möta elever i matematiksvårigheter (t.ex. Magne, 2006; Dalvang & Lunde, 2011) sannolikt inte blir synliga eller använda.

Framtida möjlig samverkan

Hur skolan och hälso- och sjukvården förmår samverka kring upptäckt och utredning, diagnostik och stöd till elever med SM kan få avgörande betydelse för barn och ungas livsvillkor (van Luit, 2019). Det handlar inte minst om samverkan kring upptäckt och tidiga riktade pedagogiska och didaktiska anpassningar för att i möjligaste mån stärka upp grundläggande matematiska förmågor såsom taluppfattning och förståelse av de aritmetiska principerna, men också om att utarbeta kompensatoriska strategier som kan bidra till att mildra den grundläggande problematikens konsekvenser för fortsatt lärande (Pedrotty Bryant, 2005).

Semeraro et al. (2020) betonar sambandet mellan upptäckt, utredning och pedagogiska och didaktiska anpassningar genom att peka på vikten av tidig diagnos för att kunna genomföra väl valda didaktiska interventioner med fokus på både kognitiva, emotionella och sociala aspekter. Här behövs en tvärprofessionell samverkan mellan utredande logopeder och elevhälsans personal eftersom utredning av SM ligger inom det medicinska verksamhetsområdet, samtidigt som pedagogiska och didaktiska anpassningar för att stötta elever i matematiksvårigheter ligger inom det (special)pedagogiska matematikdidaktiska området (Santos, 2020). Genom ett kompensatoriskt förhållningssätt med fokus på access till matematik (Lewis & Lynn, 2018) kan lärare få klarhet i behovet av specialpedagogisk matematikundervisning och fokusera på förståelse och gynnsamma strategier utifrån elevens starka sidor. Eleven kan då få möjlighet att gå framåt i matematik utifrån styrkor och stöd i att kompensera för andra områden. För att skapa dessa möjligheter krävs samverkan mellan olika professioner såsom logopeder med särskild kompetens inom dyskalkyliområdet, speciallärare i matematik och specialpedagoger. När det gäller utveckling av pedagogiska och didaktiska anpassningar behövs även lokal skolsamverkan mellan lärare i matematik, specialpedagoger och speciallärare i matematik (Roos, 2019). Här kan inkluderande matematikundervisning med exempelvis tvålärarsystem vara framgångsrikt (Gardesten, 2023) om personal får tid att samverka för att utveckla riktade pedagogiska och didaktiska åtgärder (Roos, 2019). Parallellt behöver lärar-, speciallärar- och specialpedagogutbildningar utbilda inom kunskapsområdet SM.

Konklusion

I vår reflektion och problematisering av området SM i den svenska nationella kontexten synliggörs följande behov: Ett förbättrat kunskapsläge på svensk nationell, regional och kommunal nivå inom vård och skola; En dialog och tvärvetenskaplig samverkan för förståelse för de olika och delvis motstående perspektiv som finns i dagsläget; Kunskap om förebyggande och främjande insatser som kan stödja elevernas hälsa och välmående; Adekvat stöd för elever med SM, vilket kräver utprövade välfungerande pedagogiska och didaktiska anpassningar. Utifrån ett likvärdighetsperspektiv förespråkar vi således tvärvetenskaplig forskning som kan brygga över från utredning till ett pedagogiskt och didaktiskt handlande i matematikklassrummet som skapar ökad livskvalitet och nya livsmöjligheter för gruppen av elever med specifika matematiksvårigheter.

Referenser

Agostini, F., Zoccolotti, P., & Casagrande, M. (2022). Domain-general cognitive skills in children with mathematical difficulties and dyscalculia: A systematic review of the literature. *Brain Sciences*, *12*(2), 239.

AIRIPA and AID (2012). Agreement document. *Diagnosis of dyscalculia*.

Almenberg, J., & Widmark, O. (2011). *Räknefärdighet och finansiell förmåga*. Finansinspektionen.

American Psychiatric Association. (2022). Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th ed., textrev.).https://doi.org/10.1176/appi.books.9780890425787

Andersson, U., & Östergren, R. (2012). Number magnitude processing and basic cognitive functions in children with mathematical learning disabilities. *Learning and Individual Differences 22*(6), 701-714.

Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia – From Brain to Education. *Science 332*(6033), 1049-1053.

Butterworth, B. (2000). *Den matematiska människan.* Wahlström & Widstrand.

Butterworth, B. (2018). The implications for education of an innate numerosity-processing mechanism. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, *373*(1740), 20170118.

Bynner, J., & Parsons, S. (1997). *Does Numeracy Matter? Evidence from the National Child Development Study on the Impact of Poor Numeracy on Adult Life*. The Basic Skills Agency.

Dalvang, T., & Lunde, O. (2006). Med kompass mot mestring – et didaktisk perspektiv på matematikkvansker. *NOMAD – Nordic Studies in Mathematics Education, 11(4),* 37-64.

Danderyds sjukhus (2023). Intern statistik. Logopedkliniken.

Dowker, A. (2019). *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Routledge.

Gardesten, M. (2023). How Co-Teaching May Contribute to Inclusion in Mathematics Education: A Systematic Literature Review. *Education Sciences*, *13*(7), 677.

Gifford, S. (2006). Dyscalculia: Myths and models. *Research in Mathematics Education 8,* 35-51.

Haberstroh, S., & Schulte-Körne, G. (2019). The diagnosis and treatment of dyscalculia. *Deutsches Ärtzeblatt International 116,* 107-114.

Karlsson, I. (2019). *Elever i matematiksvårigheter: Lärare och elever om låga prestationer i matematik.* [PhD thesis]. Lunds universitet.

Kißler, C., Schwenk, C., & Kuhn, J-T. (2021). Two Dyscalculia Subtypes with Similar, Low Comorbidity Profiles: A Mixture Model Analysis. *Frontiers in Psychology 12*, 589506.

Klapp, A. (2017). *Bedömning, betyg och lärande.* Studentlitteratur.

Košč, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of learning disabilities, 7*(3), 164-177.

Kucian, K. & von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. *European Journal of Pediatrics 174*, 1-13

Lewis, K.E., & Lynn, D.M. (2018). Access through compensation: Emancipatory view of a mathematics learning disability. *Cognition and Instruction, 36*(4), 424-459.

Magne, O. (2006). Historical aspects on special education in mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education, 11*(4), 7-35.

Mazzocco. M. (2007). Defining and Differentiating Mathematical Learning Disabilities and Difficulties. In D. Berch & M. Mazzocco (Eds.), *Why is Math So Hard for Some Children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 29-47). Brookes.

Morsanyi, K., van Bers, B., McCormack, T., McGourty, J. (2018). The prevalence of specific learning disorder in mathematics and comorbidity with other developmental disorders in primary school-age children. *British Journal of Psychology 109*(4), 917-940.

Nelson, G., & Powell, S.R. (2018). A systematic review of longitudinal studies of mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities, 51*(6), 523-539.

Pedrotty Bryant, D. (2005). Commentary on early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 340-345.

Price, G.R., & Ansari, D. (2013). Dyscalculia: Characteristics, Causes and Treatments. *Numeracy, 6*(1), 2.

Rapin, I. (2016). Dyscalculia and the Calculating Brain. (2016). *Pediatric, 61,* 11-20. ISSN 0887-8994.

Roos, H. (2023). Students' voices of inclusion in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 113, 229-249. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10213-4 https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-023-10213-4

Roos, H. (2019). *The meaning of inclusion in student talk: Inclusion as a topic when students talk about learning and teaching in mathematics*. [PhD thesis]. Linnaeus University: Växjö.

Roos, H., & Gadler, U. (2018). Kompetensens betydelse i det didaktiska mötet – en modell för analys av möjligheter att erbjuda varje elev likvärdig utbildning enligt skolans uppdrag. *Pedagogisk forskning i Sverige, 23*, 290-307.

Santos, F.H. (2020). Interventions for Children with Developmental Dyscalculia: Parents, teachers and neuropsychologists working together. In *Understanding Dyscalculia* (pp. 65-93). Routledge.

Scherer, P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L. & Opitz, E. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: how can research support practice? *ZDM Matematics Education, 48*, 633-649.

Scherer, P., Gaidoschik, M., Moraová, H., Roos, H., & Ulovec, A. (2023). An introduction to TWG25: Inclusive mathematics education – challenges for students with special needs. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 4524-4531). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Semeraro, C., Coppola, G., Taurino, A., & Cassibba, R. (2020). Understanding the impact of diagnosis. In *Understanding Dyscalculia*. Routledge.

Shalev, R.S. (2004). Developmental dyscalculia. *Journal of child neurology 19*(10), 65-771.

SFS (2010:800). Skollagen (2016). Norstedts Juridik.

Sjöberg, G. (2006). *Om det inte är dyskalkyli – vad är det då? En multimetodstudie av elever i matematikproblem ur ett longitudinellt perspektiv*. [PhD thesis]. Umeå universitet.

Skolverket. (2023). *PISA 2022*. https://www.skolverket.se/publikationer?id=12177

van Luit, J.E. (2019). Diagnostics of dyscalculia. In *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties* (pp. 653-668). Springer.

van Luit, J.E., Bloemert, J., Ganzinga, E.G., and Mönch, M.E. (2014). *Protocol Dyscalculie: Diagnostiek voor gedragsdeskundigen (2e herziene druk) [Protocol Dyscalculia: Diagnostics for Behaviour Professionals*, 2nd Edn. Graviant.

Vogel, S. E, & De Smedt, B. (2021). Developmental brain dynamics of numerical and arithmetic abilities. *npj Sci.Learn. 6,* 22.

Von Aster, M.G., & Shalev, R.S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental medicine & child neurology, 49*(11), 868-873.

World Health Organization. (2019). ICD-11: International classification of diseases (11th revision). Retrieved from https://icd.who.int/ World Health Organization.

English abstract

The article is based on the notion of specific mathematical difficulties and reflects and problematizes obstacles and opportunities for interdisciplinary collaboration between diagnosis practices and mathematics education in Sweden. The identified obstacles and opportunities highlight the need for interdisciplinary collaboration to understand the different perspectives involved. Other needs include an increased level of knowledge at the Swedish national, regional, and municipal levels within healthcare and education concerning specific mathematical difficulties to provide students' adequate support. This entails a need for pedagogical and didactical adaptations and knowledge of preventive measures that can support students' health and well-being.

Inkludering och likvärdighet i och genom matematikundervisning

Anette Bagger, Dalarna University

Helena Roos, Malmö University

Abstract: *Denna artikel skildrar hur inkludering och likvärdighet villkoras och kan stödjas genom matematikundervisning och rapporterar resultat från samarbetsprojektet "Mathematics is MInE". Inledningsvis skildras inkludering och likvärdighet i matematikämnet i Sverige och tidigare forskning. Därefter presenteras principer som kan användas för att kartlägga och förstå hur inkludering och likvärdighet blir till. För att illustrera den skolutveckling som pågick parallellt med forskningsprojektet presenteras två fiktiva fall med tillhörande diskussionsfrågor. Dessa kan nyttjas för att fördjupa kunskap om hur likvärdighet och inkludering kan villkoras och stödjas på individ-, grupp- och organisationsnivå även i andra kontexter. Slutligen diskuteras implikationer för forskning och praktik.*

Introduktion

Syftet med föreliggande artikel är att bidra med kunskap om hur matematikundervisning kan leda till inkludering och likvärdighet och hur detta villkoras i olika undervisningskontexter. Vi gör detta genom att rapportera genomförandet av ett tvåårigt projekt[1] i det svenska undervisningssammanhanget, samt genom att problematisera dessa företeelser utifrån tidigare forskning och presentera implikationer för praktik och forskning. Avslutningsvis delges ett arbetsmaterial som utarbetats inom ramen för projektet och med vars hjälp det går att utforska principer för inkludering och likvärdighet som uppträder, även i andra undervisningskontexter. Detta ger möjlighet att utvärdera matematikundervisningen och dess inramning i syfte att säkerställa en utveckling mot en allt mer inkluderande och likvärdig matematikundervisning (se även Roos & Bagger, 2024).

Forskare, lärare, skolor och hela skolsystem diskuterar och strävar efter inkludering i lärandet för alla elever i matematik. Samtidigt har inkludering i ämnet matema-

1 Projektet The Mathematics is MInE genomfördes i nära samarbete med två skolor under åren 2022 och 2023. Projektet är etikprövat med Dnr 2022-02989-01.

tik visat sig vara en komplex företeelse (Kolloshe et al., 2019) med en utmanande problematik att lösa (t.ex. Tan et al., 2022; Zevenbergen et. Al, 2002). I internationell forskning har bristande likvärdighet i matematikundervisning visats höra samman med strukturella faktorer som leder till olikheter i hur elever får möjlighet att lära sig matematik och ta till sig undervisningen (t.ex. Gutierrez, 2022; Peters & Oliver, 2009; Morvan, 2017). I matematikämnet betraktas olikheter och skillnader i möjligheter att lära sig bitvis som någon normalt och förväntat. Detta blir synligt exempelvis när elever på ett olikvärdigt sätt nivågrupperats och genom detta berövas högkvalitativ undervisning, möjlighet till höga förväntningar och mer komplicerade resonemang som kan utveckla elevers kunskaper. Detta missgynnande präglas av en olikhet som hör samman med bland annat elevers språk, ursprung och etnicitet (Boaler, 2015; Morvan, 2017). Till exempel är den enspråkiga eleven ofta norm i matematikundervisning och flerspråkiga elever positioneras som om de är mindre kognitivt redo att ta sig an matematiken och utifrån ett bristperspektiv (Langer-Osuna, 2016; Moschkovich, 2010). De förhållningssätt som ligger bakom denna marginasliering håller kvar elever i normativa och stereotypa, men framförallt orättvisa möjligheter att lära och att få uppleva att matematiken är deras. Mot denna bakgrund krävs nya sätt att ta sig an matematikundervisningen, som omfattar andra sätt att veta och att kunskapa. Vi förespråkar därför ett paradigmskifte mot en matematikundervisning som är relationell och centrerad kring värden och etik, något som Gutierrez (2022) benämnt som ett behov av en *spiritual turn in mathematics education*.

I någon mening blir inkludering och likvärdighet till genom de aktiviteter som är möjliga utifrån de värderingar som bärs av lärare, skolor, skolhuvudmän och skolans styrning (se ex. O'Keeffe & Paige, 2019). Detta fenomen sätts i förgrunden än mer när man tittar på SUM-elever. Dessa elever utmålas inte sällan som en riskkonstruktion eller som ett av lärarens arbetsområden som präglas av risker (Niemenen et al., 2023). Forskning har visat att det behöver råda inkluderingssensitivitet gentemot elevers ursprung, språk, kultur, socioekonomiska status, funktionsnedsättning och andra personliga omständigheter för att man ska kunna nå likvärdighet i matematikundervisningens genomförande och för att elever inte ska drabbas av epistemisk orättvisa och därmed exkluderas från lärandet (Abthai, 2022; Agarwal och Sengupta-Irving, 2019; Matthews, 2019; Miller,2014; Tanswell & Rittberg, 2020; Swanson et. Al., 2017; Turner et. Al., 2013).

Inom de nordiska skolsystemen är såväl likvärdighet som inkludering utmanat (Frønes et al. 2020), något som inte minst gäller Sverige, som konstaterats ha ett av de mest segregerade skolsystemen i de nordiska länderna trots en liknande population av elever som övriga nordiska länder. Vilken skola man går i spelar i Sverige större roll för vad man får för betyg (Skolinspektionen, 2014; Skolverket, 2017; 2019; 2022). I Sverige blir den bristande likvärdigheten synlig genom internationella utvärderingar, som till exempel PISA och TIMSS, och genom nationella utvärderingar av skolans kvalitet i termer av elevers resultat på nationella prov och slutbetyg. Sådana utvärderingar kan visserligen åskådliggöra skillnader, men kan inte hjälpa lärare och beslutsfattare att förstå vad som kan och behöver göras i det specifika klassrummet, skolan och den nationella kontexten för att säkra inkludering och likvärdighet i en didaktisk bemärkelse (Bagger & Vennberg, 2024; Bagger, 2017a; 2017b). De bekymrande och ökande skillnader som finns mellan grupper av elever i Sverige tyder på missgynnanden på gruppnivå som reproduceras. En avsaknad av det lägst godkända betyget exkluderar elever från vidare studier och är i Sverige sammanhörande med elevens bakgrundsfaktorer på gruppnivå (se Skolverket, 2019; 2022). I Sverige är avsaknaden av ett godkänt betyg vanligare för elever i behov av särskilt stöd, elever med låg socio-ekonomisk status, elever med utländsk bakgrund och pojkar (se Skolverket, 2022). Genom det sätt varmed bedömningssystemet fungerar intar matematikämnet en särskild roll i sammanhanget av exkludering och bristande likvärdighet. Detta eftersom bedömningen används för att sortera elever på ett sätt som marginaliserar dem i lärandet och håller dem utanför högre utbildning (Björklund, 2017).

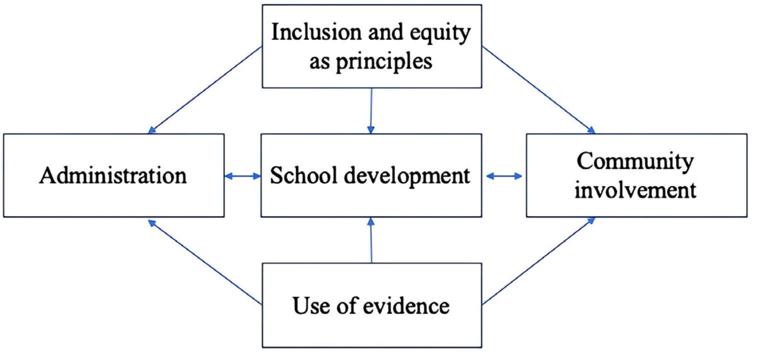
Matematikämnets utestängande funktioner kan vidare förstås som uttryck för strukturell marginalisering eller exkluderingsprocesser på samhällsnivå (se även Halai et al., 2016). Vår förståelse av detta är att övergripande samhälleliga principer om (o) likvärdighet och in- / exkludering manifesteras i det levda klassrummet, principer som kan motverkas genom att lärarens professionella omdöme och yrkesetik får komma till uttryck i matematikundervisningen (se Ainscow, 2020; Roos & Bagger, 2021; 2024). I den matematikdidaktiska forskningen får samtidigt studier om inkludering och att motverka dessa risker inte sällan karaktären av att resonera på en teoretisk och filosofisk nivå. Detta innebär att forskningen lämnar en kunskapslucka kring hur inkludering och likvärdighet villkoras, uppträder och kan genomföras i praktiken (Roos, 2019a; 2019b). Hur inkludering och likvärdighet kan uppnås i en didaktisk mening och i den levda och vardagliga matematikundervisningen är därmed en underbeforskad fråga. Dessa är fenomen som är komplexa och blir till i det levda och genom skolans vardag och matematikundervisning. De ger samtidigt förutsättningar för en hållbar undervisning och ett hållbart lärande i ämnet (Atweh, 2011; Kollosche et al., 2019). Värden som inkludering och likvärdighet behöver därför sättas i centrum för matematikundervisningen.

Mot denna bakgrund har vi, som nämnts, under två år (2022-2023) systematiskt undersökt hur inkludering och likvärdighet villkoras genom matematikundervisning i olika klassrum, men även hur undervisningen kan utvecklas. Projektet heter *Mathematics is MInE* (Mathematics, Inclusion and Equity) och har tre delstudier varav delstudie 1 är rapporterad i Roos och Bagger (2024) och denna artikel fokuserar på delstudie 2. I det kommande skildras vad inkludering och likvärdighet innebär i det svenska sammanhanget och vad som redan är känt utifrån tidigare forskning om matematikundervisning. Därefter presenteras de epistemologiska utgångspunkterna och teoretiska begrepp som projektet bygger på, projektets forskningsdesign, samt resultat och lärdomar från delstudie 2. Dessa delges dels genom att visa på de principer som analyserats fram och som reglerar hur likvärdighet och inkludering blir till i matematikundervisningen i de två deltagande skolorna och dels genom att illustrera hur dessa principer kan undersökas genom projektets arbetsmaterial. Detta kan användas av skolor för att utveckla matematikundervisningen så att den är mer inkluderande och likvärdig och för att identifiera och utforska de principer som råder.

Teoretiska utgångspunkter

Ainscows (2020) modell över principer för inkludering och likvärdighet i skolsystem inramar projektets forskningsdesign och hur vi närmar oss problemområdet. Modellen har väglett datainsamlingen och analysarbetet och harmonierar väl med den tidigare forskningen om marginalisering och missgynnanden i matematikdidaktisk forskning. Genom att förstå hur inkludering och likvärdighet både formas av och formar undervisningen på ett principiellt plan, ges erkännande till systematiska utmaningar samtidigt som skolutveckling och undervisningen sätts i centrum för att utveckla värderingar och metoder som inkluderar elever och stödjer likvärdighet. I detta förhållningssätt ingår också ett erkännande av att det som sker i klassrummet styrs och regleras likvärdigt av såväl administration som det omgivande samhället (se ex; Abthai, 2022; Agarwal och Sengupta-Irving, 2019; O'Keeffe & Paige, 2019; Gutierrez, 2022; Halai et al., 2016; Watson, 2021).

Ainscows modell består av fem interrelaterade faktorer: *School development* (skolutveckling), *Inclusion and equity as principles* (inkludering och likvärdighet som principer), *administration* (administration), *community involvement* (det omgivande samhället) och the *Use of evidence* (användandet av bevis). En grundläggande utgångspunkt för att använda denna modell är att fokus ligger på att utveckla miljöer för lärande och utbildningskontexten så att den kan inkluderade alla elevers behov i lärandet, snarare än att stödja enskilda missgynnade elever. Genom *användandet av bevis* samarbetar vi med arbetslagen på de två skolorna för att identifiera hur inkludering och likvärdighet villkoras i en mångfald av klassrum och hos lärare med olika arbetssätt, ansvar, kompetens och utbildning. Användandet av bevis i denna modell och i vår tillämpning av den, består i att skapa utrymme för lärarna att kunna delge och utforska sin undervisning och att lära sig av olikhet. Det kan leda till revideringar av undervisningen eller lärares förståelse och att lärarna provar nya och mer inkluderande sätt att undervisa på, eller förhållningssätt. Detta görs mer specifikt utifrån en Inclusive Inquiery Approach (IIA) till lärarnas undervisning och



Figur 1. *Schematisk bild av Ainscows (2020) principer för inkludering och likvärdighet i utbildningsystem. Avbildad av författarna efter Ainscow (2020), s. 9.*

datainsamlingen, vilket redogörs för under metoder (se även Messieu & Ainscow, 2020). Ett antagande som görs med denna modell över principer är också att lärare i genomförandet av och förhållningssättet till matematikundervisning bär med sig villkor som kommer sig av det *omgivande samhället* och den *administration* som finns kring skolan och undervisningen. Lärares arbete placeras därmed i centrum vad gäller de principer för inkludering och likvärdighet som manifesteras i klassrummets undervisning. Det finns därmed också möjlighet för undervisningen att rubba dessa principer eller bidra till att omformulera dem. För att komma åt dessa uttryck för de samhälleliga principerna i klassrummet, har vi i datainsamlingen fokuserat ögonblick av inkludering och likvärdighet (moments of inclusion and equity) i klassrummet. Dessa har vi sedan analyserat i syfte att identifiera principerna och hur de kan undersökas.

Projektet Mathematics is MInE

Projektet Mathematics is MInE övergripande syfte är att bidra med kunskap om hur man kan identifiera och utveckla principer för inkludering och likvärdighet i matematikklassrummet på lokal och nationell nivå. Med likvärdig och inkluderande matematikundervisning avses: Undervisning som på ett hållbart sätt bidrar till att stärka varje elevs självständighet, möjlighet, tillgång och lust att lära matematik (Bagger & Roos, 2021; 2023). Vi förstår såväl inkludering som likvärdighet som kontextuellt, flyktigt och något som måste upplevas och undersökas i stunden. Projektet undersöker förutsättningar för inkludering och likvärdighet i matematik i nära samarbete med två skolor. De två medverkande skolorna ligger i skilda geografiska och socio-ekonomiska områden och det råder stor skillnad vad gäller elevers bakgrundsfaktorer. Lärare i årskurs f-6 har hittills deltagit med en fokusgrupp på vardera skolan under åren 2022-2023. I den norra skolan deltog 6 lärare och i den södra 8 lärare.

Delstudie 1

I en redan rapporterad delstudie i projektet MInE utgick vi från de etiska dilemman som uppträder i matematikundervisningen och utifrån vilket professionellt omdöme läraren då kunde eller ville använda sig av för att lösa detta (Roos & Bagger, 2024). Etiska dilemman innebär i sammanhanget att olika värden kolliderar med varandra och det inte finns någon självklar eller enkel lösning (Bornemark, 2020; Howe et a., 2018). Dessa dilemman förstås vidare vara inbäddade i vardagen och som något levt och hastigt övergående ögonblick då inkludering och likvärdighet utmanas och måste mötas med professionellt omdöme (Biesta, 2015; Bornemark, 2020; Frelin, 2014). Ett exempel kan vara när en elevs möjlighet att lära sig det matematiska innehållet ställs mot värden som rör självkänsla eller att vara socialt delaktig. Då dessa uppträder fattar läraren ett beslut utifrån sitt professionella omdöme (Roos & Bagger, 2024). Fiktiva etiska dilemman samt dilemman från lärarnas erfarenheter av sin undervisning användes för att undersöka och utveckla lärares professionella omdöme. Fokusgrupp-samtalen bidrog till att systematiskt undersöka förutsättningarna för inkludering och likvärdighet och hur det går till när detta sätts på prov eller utmanas. Det visade sig sammantaget i denna delstudie att framför allt tre dilemman uppträder i de två skolornas och 14 lärarnas klassrum (Roos & Bagger, 2024).

1. Elevers mångfald kontra att agera rättvist
2. Att fördela resurser rättvist
3. Att värdera och möta mångfald

Dilemma 1 handlade ofta om att olika elevers behov och de anpassningar som krävdes för att de skulle kunna vara inkluderande och erhålla en likvärdig undervisning kolliderade. Dilemma 2 rörde bland annat ekonomi, eller tid. Hur läraren ska fördela sin uppmärksamhet eller tid, hur en resurslärare ska användas eller vilket hjälpmedel som ska köpas in i de fall medlen är begränsade, vilket de ofta är. Dilemma tre, slutligen, handlade om att det ibland var utmanande att både uttrycka och agera utifrån värderingen att mångfald och olikhet är positivt, samtidigt som det finns behov av att ha konformitet och enhetlighet.

Delstudie 2

I den delstudie som denna artikel rapporterar, undersöks vilka principer som villkorar likvärdighet och inkludering genom att ytterligare undersöka de tre dilemman som framkom i delstudie 1. Detta åskådliggörs under rubriken principer för inkludering och likvärdighet.

Delstudie 3

Delstudie 3 genomförs under höstterminen 2024 och innebär en fördjupning och breddning. Detta rör mer specifikt hur lärare kan stimulera likvärdighet och inkludering tillsammans med elever och utifrån de identifierade principerna.

Metoder och material

Ainscows modell för principer för inkludering i utbildningssystem har väglett datainsamlingen och analysarbetet. För att kunna samla in och använda bevis på hur inkludering och likvärdighet villkoras, har vi använt oss av Inclusive Inquiry Approach (IIA) för att utforska lärares erfarenheter av inkludering och likvärdighet i matematikundervisningen. Detta innebär samtidigt att lärare utforskar och undersöker sin praktik och förståelse av inkludering och likvärdighet (Messiou & Ainscow, 2020). Lärarnas erfarenheter samlades in genom fokusgruppsamtal som sedan analyserades av forskarna. Analyserna fördes tillbaka till lärarna, vilket innebar att *use of evidence* har varit basen i projektets framåtskridande samt att processer av skolutveckling som primärt rörde matematikundervisningen skedde. Detta kan dock i förlängningen leda till en påverkan på *administration* och *community involvement*, eftersom dessa delar är intimt sammanhörande med lärarens undervisning.

Datainsamlingen innebar att vi samlade in lärares erfarenheter av ögonblick av inkludering och likvärdighet (moments of inclusion and equity) i sin undervisning i fokusgruppsamtal. Vi tillämpade IIA, vilket innebar att lärarna samtidigt blev utforskare av sin egen praktik och studiens kunskapsobjekt. Förfarandet är väl utprövat då det använts i ett 30 tal skolor i fem olika länder över en tidsperiod på 30 år (se Messiou & Ainscow, 2020). IIA kan därmed sägas vara en stabil och pålitlig metod för att beforska denna typ av frågor. De tre teman som IIA utgår ifrån orienterades i fokusgruppsamtalen mot ögonblick av inkludering och likvärdighet och var följande: 1) Reflektioner kring undervisning 2) Vad man lärt av olikhet, samt 3) Hur undervisningen utvecklats. Efter varje fokusgruppsamtal följde en period då lärarna undervisade och samlade på sig nya erfarenheter som de sedan bar med sig till nästkommande fokusgruppsamtal. Forskarna analyserade under denna undervisningsperiod det föregående samtalet och framställde ett underlag för det nästkommande fokusgruppsamtalet. Därför fanns alltid ett underlag för att stimulera diskussionerna, vad detta innebar varierade dock. I tabell 1 åskådliggörs de fokusgruppsamtal som hölls. Detta åskådliggör samtidigt utvecklingen av projektets metoder för datainsamling.

Tabell 1. *Översikt av fokusgruppsintervjuernas (FGI) utveckling och fokus.*

Fokusgruppsintervju (FGI) och dess fokus	Material att diskutera	Material som skapas under FGIn
FGI1: Vad är inkludering och likvärdighet? När händer det och hur kan det se ut i ett matematikklassrum?	Sammanställning av individuell skriftlig enkät om vad inkludering och likvärdighet är och hur det kan visa sig i lärarens undervisning.	Berättelser om *moments* av inkludering och likvärdighet framför allt då det fungerar väl
FGI2: Fördjupade samtal om vad som krävs för att främja inkludering och likvärdighet, särskilt då det utmanas	Fiktiva etiska dilemman som skapats med ursprung i lärarnas berättelser i FGI nr1	Lärare börjar formulera egna etiska dilemman och hur de agerade eller vill agera vid dessa (utövar sitt professionella omdöme).
FGI3: Fördjupade samtal om på vilket sätt inkludering och likvärdighet villkoras i undervisningen och hur detta hör samman.	Vi återgick till deras egna etiska dilemman som vi sammanfattat tematiskt.	Venndiagram för att identifiera hur inkludering och likvärdighet hör samman
FGI4: Fördjupade samtal om på vilket sätt inkludering och likvärdighet villkoras i undervisningen och hur likvärdighet och inkludering hör samman.	Vi återgick till deras egna etiska dilemman som vi sammanfattat tematiskt.	Relationerna mellan och relativiteten i ögonblick av inkludering och likvärdighet framkom. Det beror på eleven, klassrummet, läraren och organisationen vad som blir likvärdighet eller inkludering.
FGI5: Fördjupade samtal om på vilket sätt inkludering och likvärdighet villkoras i undervisningen och hur detta hör samman med individ-, grupp- och organisationsnivå.	Vi återgick till deras egna etiska dilemman som vi sammanfattat tematiskt. Vi presenterade också preliminära principer för inkludering och likvärdighet.	Information om och bekräftelse på att de teman som analyserats fram stämde. Undantaget uttryck som inte låter sig översättas mellan svenska och engelska (equity/equality; justice/fariness; diversified/multudionous)
FGI6: Fördjupade samtal om på vilket sätt inkludering och likvärdighet villkoras i undervisningen och hur detta hör samman med individ, grupp och organisationsnivå.	En tentativ modell presenteras.	Modellen provades på egna etiska dilemman. Detta innebar att vi fick ytterligare empiri om fler nivåer än klassrummet och insåg vikten av att bredda användningen av modellen.

Principerna för analys av empirin följer en tematisk och kvalitativ innehållsanalytisk ansats som är influerad av projektets teori och det med inspiration av Braun & Clarke (2006). Det teoretiska inslaget i den tematiska analysen utgörs av the *use of evidence* i analysarbetet. Det vill säga vi bygger vidare på fastställda och framanalyserade utgångspunkter för vad inkludering och likvärdighet är i de två deltagande skolornas undervisning (Roos & Bagger, 2024). I den tematiska analysen har därmed principer för inkludering och likvärdighet systematiskt undersökts i de dilemman som analyserats fram i delstudie 1 och i de kategorier av professionellt omdöme som framträdde där (Roos & Bagger, 2024). Målet är att formulera preliminära principer som kan reglera hur den inkludering och likvärdighet som lärarna berättat om villkoras. Vi har även sökt efter utsagor som kan visa på hur *administration av utbildningen* på skolan och aspekter av det *omgivande samhället* kan höra samman med den undervisning som sker i klassrummet och *de moments av inkludering och likvärdighet* som uppträtt.

Principer för inkludering och likvärdighet

Vi har identifierat fem principer som är tätt sammanflätade, två som rör inkludering och tre som rör likvärdighet:

Principer som rör inkludering
- Mångfaldiga och differentierade klassrum
- Visioner och värderingar

Principer som rör likvärdighet
- Anpassning av material och undervisning
- Anpassning av rutiner och regler
- Lärares kompetens och möjlighet

Vad gäller *inkludering* är det två principer som framträder tydligt. För att inkludering ska kunna främjas krävs *mångfaldiga och differentierade klassrum* samt *visioner och värderingar.* Dessa är såväl förutsättningar för som resultat av vad matematikundervisningen kan möjliggöra. Detsamma gäller de tre principer som bär likvärdighet framåt och villkorar likvärdighet. För att likvärdighet ska främjas behövs *anpassning av material och undervisning*, samt av *rutiner och regler* för att ge elever stöd och *lärares kompetens och möjlighet* att ge elever detta stöd. Dessa fem principer förstås att ha kapacitet att reglera och styra om och hur lärare kan möta etiska dilemman och stödja inkludering och rättvisa genom matematikundervisningen. Vi vill poängtera att dessa principer inte blir till i klassrummet, utan snarare ska förstås som samhälleliga och organisatoriska diskurser och förutsättningar som manifesteras i klassrummet.

Det är därför nödvändigt att kunna tillämpa principerna och undersöka hur de blir till och reglerar matematikutbildning såväl i policy och skolans styrning som skolorganisationens kultur, rutiner och ramar.

Slutsatser som vi drar av de principer som vi har identifierat är att dessa visserligen kan stödja och främja inkludering och likvärdighet och även förstärka varandra: Om *visionerna och värderingarna* finns på plats för inkludering och likvärdighet, kan detta leda till att *lärare får möjlighet till kompetensutveckling* och *möjligheter att ge stöd* för att det finns resurser i organisationen. Detta kan också innebära att man har *mångfaldiga och differentierade klassrum* där *material och undervisning anpassas* med lätthet så att det passar en bredd av lärprofiler och elever. Undervisningskontexten och organisationen utgår då ifrån att elevers olikhet betraktas som berikande.

Det kan även mellan dessa principer förekomma obalanser och disharmonier som behöver undersökas och tas på allvar i en specifik nationell kontext eller undervisningssammanhang. Mer explicit kan detta exempelvis innebära att det är viktigt att undersöka hur relationen mellan principen att ha *mångfaldiga och differentierade klassrum* och *lärares kompetens och möjligheter* att ge stöd yttrar sig i verksamheten. Samt *om* det finns hinder eller friktion mellan dessa två, från vilken nivå härrör det: individ-, grupp- eller organisationsnivå. En lärare kan inte ensam, hur goda visioner och kompetenser den än har, ordna med ett skolklimat eller nationell kontext som är inkluderande och där resurser och stöd för undervisningen fördelas rättvist. Detta trots att läraren själv har kapacitet att möta mångfald i klassrummet och vet hur man kan anpassa undervisningen. Värden som rör att stödja elever kan också kollidera med rättvisefrågor. Det är centralt att undersöka hur rådande principer hör samman med styrning och skolkultur på organisationsnivå eller i arbetslaget.

Implikationer och fördjupningsmöjligheter för skolor

Genom att välkomna dilemman och se det som en möjlighet till att förstå mer och att identifiera vad som kan göras, blir utmaningar för en lärare eller en organisation en gåva i stället för ett tecken på att något gått fel. Ur den friktion som dilemman visar på, föds en möjlighet att identifiera aspekter av och möjligheter till inkludering och likvärdighet i matematikundervisningen. Principerna för inkludering och likvärdighet kan användas för att förstå hur dessa fenomen blir till på individ-, grupp- och organisationsnivå. De kan också användas för att identifiera etiska dilemman och grunden till dessa kontextualiserat i en undervisningskontext, samt utforska hur dilemman kan bemötas.

I det följande delar vi ett material som delvis sammanställer den skolutveckling och de frågor som lärare identifierat som viktiga under projekttiden. Detta material har också använts i en av fokusgruppsintervjuerna. Materialet består av två fiktiva fall

Fiktivt fall 1 – Isak i årskurs 3

Isak går i årskurs 3. Isak har ett relativt dåligt arbetsminne och svårt att automatisera, men är en bra problemlösare då det ges rika problem. I klassen tävlar man ofta om allt möjligt. Matematiken är inget undantag. Ofta kör matematikläraren tävlingar för att få igång gruppen, eller när de ska gå ut på rast. Eleverna ska då svara enskilt och den som svarar snabbt på den multiplikation denne får, får gå ut på rast. Läraren håller sig till den tabell de tränat på den veckan och alla har haft samma chans att öva. Dessutom menar läraren att det skulle vara förminskande om någon fick svara på enklare tal än någon annan. Från kanske en helt annan tabell. Denna tävling är uppskattad av många elever som skrattar och stojar. Det motiverar också till att vilja öva och nöta in tabellerna. Isak är ofta en av de som inte klarar sitt tal och får stanna kvar till sist. Läraren menar att detta beror på att föräldrarna inte bryr sig om skolan och ogillar matematik själva, men att det vore en självklar anpassning att Isak fick öva tabellerna två gånger i veckan med speciallâraren, eller kan få hem något konkret material för att öva på dem.

Fiktivt fall 1 – Farida i årskurs 2

Farida går i årskurs 2. Hon har ofta svårt att koncentrera sig och sitta längre stunder och arbeta är svårt. Hon sitter just nu i klassrummet och jobbar enskilt med matematik. Tidigare har ni gått igenom 10-talsövergång på tavlan i grupp, ni har arbetat i små grupper med tal som ni har lagt med laborativt material. Sedan har grupperna arbetat med 100-rutan för att förstå addition med växling. Nu är ni i skedet att alla sitter för sig själva och jobbar med olika tal i symboliska representationer på sina platser. Det är en diagnostisk övning då du vill ta reda på vad de kan. Eleverna har penna och papper framför sig. Du ser att Farida snabbt jobbade med talen då övergången gällde runt 10. Men hon verkar kämpa när hon ska addera 29 + 13. Blicken flackar, hon börja gunga på stolen och tittar sig runt. Hon börjar vandra runt i klassrummet, går och vässar pennan flera gånger. Tidigare när Farida jobbade med liknande tal med kamrater verkade det som att hon förstod när de hade 100-rutan framför sig, men nu skulle eleverna försöka att klara det utan hjälpmedel. Ovanför pennvässaren sitter en hundraruta som hon verkar titta på, men sedan, då hon är vid bänken igen, tvekar hon ändå att skriva. Hon börjar slutligen rita ett och ett streck på papperet för att åskådliggöra talen hon ska arbeta med. Men det verkar bli oöverskådligt och hon räknar ett och ett streck flera gånger om.

Reflektionsfrågor till de båda fiktiva fallen

Vilka etiska dilemman visar sig och vilka värden kolliderar?
Hur kan eller vill du bemöta det?
På vilken nivå i organisationen behöver det hanteras?

Individnivå
Vad kan skapa inkludering och likvärdighet?
Finns det material, förhållningssätt och metoder som eleven behöver?
Har läraren möjlighet och kapacitet att stödja eleven?

Gruppnivå
Vad behövs för att möta mångfald och skapa ett diversifierat klassrum?
För vilka elever fungerar / fungerar inte klassrummet?
Vilka resurser och kapacitet krävs i klassrummet och arbetslaget?

Organisationsnivå
På vilket sätt påverkar styrningen och skolkulturen situationen vad gäller:
- Resursfördelning?
- En lösning av etiska dilemman?
- Möjligheterna att agera?
- Möjligheterna till en diversifierad undervisning?

med exempel på reflektionsfrågor som kan nyttjas för att arbeta med skolutveckling avseende inkludering och likvärdighet i matematiken. Detta är exempel på frågor som kan ställas och långt ifrån de enda som kan eller bör ställas. Frågorna kan i sig leda till reflektioner över vilka frågor som är viktiga, eller inte, att ställa i en viss undervisningskontext. De fiktiva fallen har satts samman utifrån lärares berättelser om etiskt utmanande situationer (dilemman) i matematikundervisningen där inkludering och likvärdighet utmanas. Lärarna diskuterade hur dilemmat kunde lösas och hur de kunde utöva sitt professionella omdöme på ett gott sätt. Dessa två fall är tillspetsade och representerar inte de värderingar eller åsikter som lärarna i studien har, utan syftar till att skapa en problematiserande och utmanande tankeövning. De är således genuina men inte en avbildning av verkligheten. I en förlängning kan de användas för att utforska inkludering och likvärdighet, identifiera etiska dilemman i undervisning och utveckla det professionella omdömet.

Implikationer för fortsatt forskning och rekommendationer

Genom att undersöka ögonblick av inkludering och likvärdighet, och de etiska dilemman som presenterar sig i undervisningen, kan lärares professionella omdöme samtidigt få plats och utvecklas (Roos & Bagger, 2024). I denna studie har vi identifierat principer för att bättre förstå och planera för matematikundervisning där inkludering och likvärdighet sätts i förgrunden. Reflektioner om vad som gör undervisning håller god etik, bygger lärares och forskares kapacitet och kan möjliggöra för professionellt omdöme istället för att stänga in matematikundervisningen i en vrå där standarder och måluppfyllelse är de vägledande principerna, på bekostnad av levda aspekter av undervisningen. Projektet Mathematics is MInE visar på alternativa tillgängagångssätt för att främja prioriteringen av inkludering och likvärdighet. För att främja inkludering och likvärdighet behöver principerna som styr och reglerar inkludering i undervisningen beaktas i utbildningspolitik, forskning och praktik: *mångfaldiga och differentierade klassrum* samt *visioner och värderingar*. Detsamma gäller för de principer som bär likvärdighet framåt: *Anpassning av material och undervisning, rutiner och regler för att ge stöd* och *lärares kompetens och möjlighet att ge detta stöd*. Fortsatt forskning behöver undersöka hur matematikundervisningen kan bli tillgänglig för alla elever och utjämna strukturella missgynnanden.

Referenser

Abtahi, Y. (2022). What if I was harmful? Reflecting on the ethical tensions associated with teaching the dominant mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 110*(1), 149-165. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10117-1

Agarwal, P., & Sengupta-Irving, T. (2019). Integrating power to advance the study of connective and productive disciplinary engagement in mathematics and science. *Cognition and Instruction, 37(*3), 349-366. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.16 24544.

Ainscow, M. (2020). Promoting inclusion and equity in education: lessons from international experiences, Nordic Journal of Studies in Educational Policy, 6(1), 7-16.

Atweh, B. (2011). Quality and equity in mathematics education as ethical issues. In B. Atweh, M. Graven, W. Secada, & P. Valero (Eds.), *Mapping equity and quality in mathematics education*, 63-77. Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9803-0_5

Au, W.W. (2007). Devising inequality: a Bernsteinian analysis of high-stakes testing and social reproduction in education. *British Journal of Sociology of Education, 29*(6), 639-651. https://doi.org/10.1080/01425690802423312

Bagger, A. (2017a). "Quality and Equity in the Era of National Testing: The Case of Sweden. In *World Yearbook of Education 2017: Assessment Inequalities*, (eds). Julie Allan & Alfredo. J. Artiles, 68-88. Routledge.

Bagger, A. (2017b). Den flerspråkiga elevens nationella provdeltagande i matematik: Diskursiva förutsättningar. *Utbildning och Demokrati 26*(2), 95-111.

Bagger, A. & Roos, H. (2023). Moments of Inclusion and Equity in the Mathematics Classroom. *Abstract presented at ECER 2023 in Glasgow*

Biesta, G. (2015). What is Education for? On Good Education, Teacher Judgement, and Educational Professionalism. *European Journal of Education, 50*(1), 75-87. https://doi.org/10.1111/ejed.12109.

Björklund, L.B. (2017). Assessment in mathematics education: A gatekeeping dispositive. In H. Straehler-Pohl, N. Bohlmann & A. Pais (Eds.), *The disorder of mathematics education. Challenging the sociopolitical dimensions of research* (pp. 209-230). Springer. DOI 10.1007/978-3-319-34006-7_13

Boaler, J. (2015). *What's math got to do with it?: How teachers and parents can transform mathematics learning and inspire success*. Penguin.

Bornemark, J. (2020). *Horisonten finns Alltid Kvar: Om Det Bortglömda Omdömet*, Volante.

Frelin, A. (2014). Professionally present – highlighting the temporal aspect of teachers' professional judgment. *Teacher Development, 18*(2), 264-273. https://doi.org/10.1080/13664530.2014.900517.

Frønes, S, T., Pettersen, A., Radišić, J., & Buchholtz, N. (2020). *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (1st ed. 2020.). Springer International Publishing.

Gutiérrez, R. (2022). A spiritual turn: Toward desire-based research and Indigenous futurity in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 53*(5), 379-388. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2022-0005

Halai, A., Muzaffar, I., & Valero, P. (2016). Research rationalities and the construction of the deficient multilingual mathematics learner. *Mathematics education and language diversity: The 21st ICMI Study*, 279-295.

Howe, R.K., Boelé, L.A., & Miramontes, O.B. (2018). *The Ethics of Special Education*. Teachers College Press.

Kolloshe, D., Marcone, R., Knigge, M., Gody Penteado, M., & Skovsmose, O. (Eds) (2019). *Inclusive mathematics education. State-of-the-art research from Brazil and Germany*. Cham: Springer.

Langer-Osuna, J.M., Moschkovich, J., Norén, E., Powell, A.B., Vazquez, S. (2016). Student Agency and Counter-Narratives in Diverse Multilingual Mathematics Classrooms: Challenging Deficit Perspectives. In: Barwell, R., et al. *Mathematics Education and Language Diversity. New ICMI Study Series*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14511-2_9

Matthews, J.S. (2020). Formative learning experiences of urban mathematics teachers' and their role in classroom care practices and learner belonging. Urban Education, 55(4), 507-541. https://doi.org/10.1177/0042085919842625

Messiou, & Ainscow, M. (2020). Inclusive Inquiry: Student–teacher dialogue as a means of promoting inclusion in schools. *British Educational Research Journal, 46*(3), 670-687. https://doi.org/10.1002/berj.3602

Miller, A.N. (2022). A Mini-seminar: Teaching Ethics in Mathematics in an Hour a Week. *Journal of Humanistic Mathematics, 12*(2), 178-203. https://doi.org/10.5642/jhummath.XWBZ9758

Morvan, J.A. (2017). Making visible and acting on issues of racism and racialization in School Mathematics. *Brock Education: A Journal of Educational Research and Practice, 27*(1), 35-52. https://doi.org/10.26522/brocked.v27i1.624

Moschkovich, J.N. (2010). Language(s) and learning mathematics: Resources, challenges, and issues for research. In J.N. Moschkovich (Ed.), *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*, 1-28. IAP Information Age Publishing.

Nieminen, J., Bagger, A. & Allan, J. (2023). Discourses of risk and hope in research on mathematical learning difficulties. *Educational Studies in Mathematics.* https://doi.org/10.1007/s10649-022-10204-x

O'Keeffe, L, & Paige, K. (2021). Re-highlighting the potential of critical numeracy. *Mathematics Education Research Journal, 33*(2), 285-299. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00297-8

Peters, S. & Oliver, L.A. (2009). Achieving Quality and Equity through Inclusive Education in an Era of High- Stakes Testing. *Prospects: Quarterly Review of Comparative Education, 39*(3), 265-279. 10.1007/s11125-009-9116-z

Roos, H., Bagger, A. (2024) Ethical dilemmas and professional judgment as a pathway to inclusion and equity in mathematics teaching. *ZDM – Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s11858-023-01540-0

Roos, H. (2019a). Inclusion in mathematics education: An ideology, a way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics Education, 100*(1), 25-41. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z

Roos, H. (2019b). The meaning(s) of inclusion in mathematics in students' talk. Inclusion as a topic when students talk about learning and teaching in mathematics. Avhandling. Växjö: Linnaeus University

Roos, H. & Bagger, A. (2021). Developing mathematics education promoting equity and inclusion: Is it possible? In: David Kolloshe (Ed.), *Exploring new ways to connect: Proceedings of the Eleventh International Mathematics Education and Society Conference* Volumes 1-3, 223-226.

Skolinspektionen (2014). *Kommunernas resursfördelning och arbetet med segregationens negativa effekter i skolväsendet* (Rapport 2014:01).

Skolverket (2017). *Grundskolan: Slutbetyg årskurs 9. Uppdelat per svensk och utländsk bakgrund.* Hämtad 31-08-2017 från Skolverkets Internetbaserade Resultat- och kvalitets Informations System (SIRIS)

Skolverket (2019). PISA 2018. *15-åringars kunskaper i läsförståelse, matematik och naturvetenskap.* Stockholm: Skolverkets publikationsservice.

Skolverket (2022). *PM – Slutbetyg i grundskolan våren 2022*.

Swanson, Yu, H.-L., & Mouroutsou, S. (2017). Inclusion as Ethics, Equity and/or Human Rights? Spotlighting School Mathematics Practices in Scotland and Globally. *Social Inclusion, 5*(3), 172-182. DOI 10.17645/si.v5i3.984

Turner, E.E., Dominguez, H., Empson, S., & Maldonado, L.A. (2013). Latino/a bilinguals and their teachers developing a shared communicative space. *Educational Studies in Mathematics, 84*(3), 349-370. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9486-2

Tan, P., Lambert, R., Padilla, A., & Wieman, R. (2019). A disability studies in mathematics education review of intellectual disabilities: Directions for future inquiry and practice. *The Journal of Mathematical Behavior 54* https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.001

Tanswell, F.S. & Rittberg, C.J. (2020). Epistemic injustice in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 52(*6), 1199-1210. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01174-6

Watson, A. (2021). *Care in mathematics education: alternative educational spaces and practices.* Palgrave Macmillan.

Zevenbergen, R., & Ortiz-Franco, L. (2002). Equity and mathematics education. *Mathematics Education Research Journal, 14*(3), 151-153.

English abstract

This article reports from the collaborative project "Mathematics is MInE" and depicts how inclusion and equity are conditioned and can be supported through mathematics education. Inclusion and equity in the subject of mathematics in Sweden and previous research are portrayed. Subsequently, principles to map and understand how inclusion and equity are realized, are presented. To illustrate the school development that took place in parallel, two fictional cases with associated discussion questions are presented. These can be used to explore about how equity and inclusion are conditioned and can be supported at individual, group, and organizational levels also in other contexts.

Posisjonering av elever som presterer lavt i matematikk: En styrkebasert flerkasusstudie av heterogene smågrupper

Anita Movik Simensen, UiT
Norges arktiske universitet

Abstract: *Artikkelen rapporterer delfunn fra en multikasusstudie som undersøker matematiske læringsmuligheter i heterogene smågrupper for elever (13-14 år) som presterer lavt i matematikk. Studien er forankret i teorien om objektivisering og i posisjoneringsteori og diskuterer hvordan medelevenes multimodale handlinger kan regulere elever som presterer lavt i matematikk sine muligheter til å delta i gruppas aktualisering av matematisk kunnskap. For å undersøke dette har flere heterogene smågrupper blitt filmet mens de har jobbet med LIST-oppgaver. Resultatet viser eksempler på regulerende handlinger som kan regulere elever som presterer lavt sin deltakelse. Videre illustrerer studien at LIST-oppgaver kan skape læringsmuligheter for alle i inkluderende klasserom.*

Innledning

Prinsippene om en inkluderende, likeverdig og tilpasset opplæring danner grunnmuren i det norske utdanningssystemet (Meld. St 6 (2019-2020)). En av intensjonene bak disse prinsippene er å “legge til rette for læring for alle elever, og samtidig stimulere den enkeltes motivasjon, lærelyst og tro på egen mestring” (Utdanningsdirektoratet, 2017, s. 15). Hensikten er å skape styrkebaserte læringsmuligheter der skolen tilpasser seg den enkelte elev, og ikke omvendt. Kunnskapsdepartementet sier følgende om tilpasset opplæring:

> “Tilpasset opplæring er tilrettelegging som skolen gjør for å sikre at alle elever får best mulig utbytte av den ordinære opplæringen. Skolen kan blant annet tilpasse opplæringen gjennom arbeidsformer og pedagogiske metoder, bruk av læremidler, organisering, og i arbeidet med læringsmiljøet, læreplaner og vurdering.” (Utdanningsdirektoratet, 2017, s. 16)

Tilpassingene som nevnes i sitatet over, faller inn under pedagogisk differensiering og tar utgangpunkt i at alle elever har krav på å være inkludert i et klasseromsfellesskap. Prinsippet om tilpasset opplæring gjelder universelt for alle elever, uavhengig av deres prestasjoner og forkunnskaper, og skal skje med utgangspunkt i prinsippet om et inkluderende og likeverdig skolemiljø (Utdanningsdirektoratet, 2017). Dette innebærer at alle elever skal oppleve tilhørighet til en klasse og delta aktivt i fellesskapet på skolen (Utdanningsdirektoratet, 2020). Et slikt inkluderende, likeverdig og mangfoldig fellesskap anses som berikende for elevenes utvikling og læring.

Bak prinsippene om en inkluderende, likeverdig og tilpasset opplæring, ligger et læringssyn der mulighet for deltakelse er sentralt (Simensen, 2022). Dette synet er i tråd med Schmidt og Thygesen (2024) som forstår inkludering som (1) mulighet for alle elever for å delta i klasseromsfellesskapet og (2) fjerning av mulige hindringer for deltakelse (s. 27). Det med å ha intensjoner om at alle skal få være fullverdige deltakere i matematikk-klasserommet betyr at ikke alle elever nødvendigvis får de samme læringsmulighetene (Esmonde & Langer-Osuna, 2013). Slike forskjeller i matematiske læringsmuligheter har tidligere har blitt forklart gjennom prestasjoner på individuelle tester og (medfødte) matematiske evner (Watson, 2002). Nyere forskning rapporterer imidlertid funn som illustrerer at elever som presterer lavt på skriftlige tester kan vise høy matematisk kompetanse når testsituasjon og konteksten tilpasses eleven (Boaler & Sengupta-Irving, 2016; Empson, 2003). Liknende funn har blitt rapportert fra heterogene gruppers arbeid med LIST-oppgaver[1] (Barclay, 2021; Simensen, 2022). I denne artikkelen rettes oppmerksomheten mot faktorer som kan regulere elever som presterer lavt i matematikk sin deltakelse i heterogene smågrupper. Artikkelen diskuterer funn fra mitt doktorgradsarbeid "Matematiske læringsmuligheter for alle: En styrkebasert flerkasusstudie om elever som presterer lavt i matematikk sin deltakelse i heterogene smågrupper" (Simensen, 2022). I doktorgradsarbeidet har jeg identifisert faktorer som regulerer elever som presterer lavt i matematikk sin deltakelse i heterogene smågrupper. I denne artikkelen bruker jeg posisjoneringsteori (Davies & Harré, 1990) som teoretisk rammeverk for å diskutere hvordan denne reguleringen kan posisjonere elevene som deltakere i matematiske læringsfellesskap.

Utgangspunktet for å diskutere hvordan elever posisjoneres, er multimodale analyser der jeg ser på elevenes verbale og kroppslige handlinger. Forskningsspørsmålet er: *Hvordan kan medelevers regulerende handlinger posisjonere elever som presterer lavt i matematikk når de jobber med LIST-oppgaver i heterogene smågrupper?*

1 LIST er forkortelse for Lav Inngangsterskel og Stor Takhøyde. Se metodedelen for mer detaljer.

Teori

Teorien om objektivisering har vært den teoretiske rammen for denne studien. Jeg har tatt utgangspunkt i at elevenes muligheter for å delta i matematiske læringsprosesser (sam)skapes gjennom elevenes interaksjon. Denne forståelsen av læringsmuligheter bygger på et dynamisk syn der elevenes muligheter til å lære matematikk reguleres og skapes i og gjennom elevenes samhandling. Elevenes samhandling kan overordnet beskrives som *interaksjon*. Interaksjonen mellom elevene har derfor vært en av grunnsteinene i studien, og forankret i Bakhtin (1981) har fokuset vekslet mellom den matematiske kunnskapen som har blitt uttrykt og medelevens respons til den uttrykte kunnskapen: "*Understanding comes to fruition only in the response. Understanding and response are diametrically merged and mutually condition each other; one is impossible without the other*" (p. 282). Sitatet fra Bakhtin (1981) bygger på at matematiske læringsmuligheter kan forstås som noe potensielt og dynamisk som skapes gjennom gjensidigheten og vekselvirkningen mellom forståelse og respons. I denne forståelsen ligger det en skygge av håp om og forventninger til at alle kan delta i matematiske læringsfellesskap.

For å få innsikt i interaksjonen og vekselvirkningen mellom ytring og respons, har jeg videofilmet elevers samarbeid i små heterogene grupper, og analysert filmene med utgangspunkt i elevenes multimodale nøkkelhandlinger. I denne studien forstås respons som et tilsvar til en konkret ytring eller nøkkelhandling. Når jeg bruker begrepet nøkkelhandlinger, støtter jeg meg på Dekker og Elshout-Mohr (1998) sine funn knyttet til prosessmodellen og nøkkelhandlinger som et konseptuelt rammeverk som kan brukes for å undersøke matematiske læringsprosesser. De fire nøkkelhandlingene som beskrives i rammeverket er: å vise sitt arbeid; å forklare sitt arbeid; å begrunne sitt arbeid; å rekonstruere sitt arbeid. Dette er handlinger som kan observeres i elev–elev-interaksjoner, selv om slike handlinger også kan være mentale og usynlige. Når elever uttrykker nøkkelhandlingen *å vise*, gir de innsikt i hva de har gjort eller hva de har fått som svar. Når de *forklarer*, gir de innsikt i hvordan de har kommet fram til svaret de har fått. Nøkkelhandlingen *å begrunne* handler om å argumentere for valgene man har gjort, mens *å rekonstruere* handler om å endre sin forklaring eller sitt svar. Når elevene samhandler i grupper, foregår det gjensidig og dynamisk posisjonering av deltakerne i gruppa.

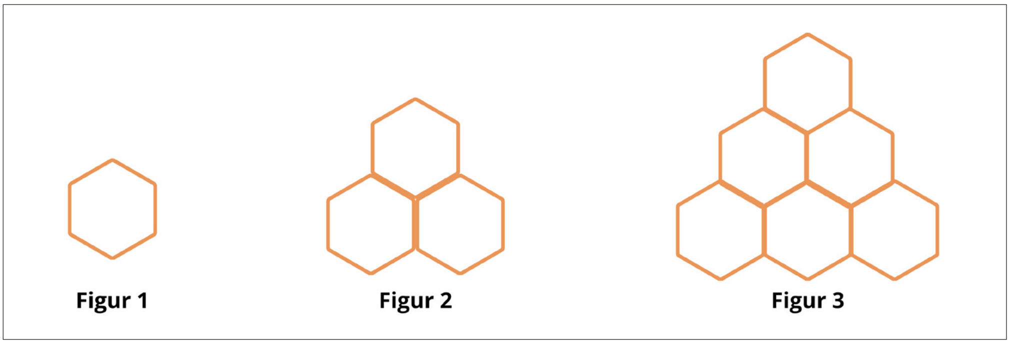
Davies and Harré (1990) peker på at posisjonering kan observeres i interaksjoner samtidig som det er knyttet til subjektive valg i samskapte storylines (s. 48). Med "subjektive valg" menes her de valg eleven gjør i her-og-nå-situasjonen. Dette betyr ikke at valget tas av individet som en isolert enhet. Både subjektive valg og posisjonering forstås som relasjonelle fenomener som påvirkes av tidligere og påvirker kommende interaksjoner. Når elever samhandler kan de posisjonere hverandre gjennom sin kommunikasjon, men de kan også posisjonere seg selv. Davies and Harré (1990) argumenterer for at posisjonering er dynamisk og gjensidig. Hvordan elever posisjonerer andre og seg selv er forankret i den enkeltes kulturelle og historiske bakgrunn, og derfor ikke nødvendigvis basert på bevisste valg og intensjoner. Posisjoneringsteori har blitt "importert" til det matematikkdidaktiske fagfeltet gjennom det siste tiåret med fokus på: posisjonering for å forstå deltakelse i matematiske læringsfellesskap (Andersson & Wagner, 2019), storylines som kontekst for tilgjengelige posisjoner i fagfeltet matematikkdidaktikk (Herbel-Eisenmann et al., 2015) og posisjonering i matematikk som immanent (Wagner & Herbel-Eisenmann, 2009). I denne artikkelen bygger jeg videre på disse arbeidene og bruker posisjoneringsteorien til å undersøke elever som presterer lavt sine muligheter for å delta i matematiske læringsfellesskap.

Elever som har en historie med lave prestasjoner i matematikk, kan ofte posisjoneres som mindre kompetente av både seg selv (Heyd-Metzuyanim, 2013), læreren (Straehler-Pohl et al., 2014) og medelevene (e.g., Simensen, 2022). Ben-Yehuda et al. (2005) peker på at nettopp denne gjensidige posisjoneringen som er forankret i tidligere erfaringer, er en av utfordringene når samfunnet velger å definere elever som lavt presterende eller mindre kompetente i matematikk. De illustrerer gjennom empiri og tidligere forskning hvordan det å bli definert som lavt presterende eller mindre kompetent, kan føre til selvoppfyllende profetier der eleven selv mister troen på egne evner og dermed posisjonerer seg som ikke-kompetent. I en studie gjennomført av Simensen et al. (2023) fortalte elever om hvordan de hadde gått gjennom store deler av skolegangen sin og følt seg som dumme og ikke-kompetente i matematikk. Disse følelsene hadde gjort at de posisjonerte seg uten mulighet for å delta i matematiske læringssituasjoner og de trodde dette var en posisjon som ikke kunne endres. Flere av elevene i studien fortalte at de likevel hadde endret posisjon og forstått at også de kunne lære matematikk etter å ha blitt møtt av en lærer som så deres styrker og behandlet dem slik at de fikk tillit og følte trygghet (Simensen et al., 2023). Dette samsvarer med andre studier som har vist at elever som strever med matematikk kan ha et ubenyttet matematisk potensial (Boaler & Sengupta-Irving, 2016; Empson, 2003).

Innenfor posisjoneringsteori forstås posisjonering som immanent, altså her-og-nå og samskapt av de som bidrar inn i en gitt interaksjon (Davies & Harré, 1990). Resultater fra Simensen et al. (2023) illustrerer at det kan være utfordrende for elever å se forbi her-og-nå-situasjonen. Dersom en elev opplever seg selv som ikke-kompetent i matematikk, kan eleven mangle troen på at de kan klare å lære matematikk. Davies (2022) har vist hvordan deltakere kan oppfatte de tilgjengelige posisjonene ulikt, og noen ganger kan deltakerne ha direkte motstridende forståelser av hvilke posisjoner som er tilgjengelige. Et eksempel kan være når to elever, elev A og elev B, jobber sammen og den ene eleven ønsker å hjelpe den andre eleven. Selv om elev B ønsker å hjelpe elev A og har gode intensjoner og ønsker å være en god medelev, kan elev A oppfatte det som at elev B ønsker å framheve sine egne styrker for å sette seg selv i et godt lys. Elev A opplever altså forsøket på å hjelpe som noe negativt, mens elev B har gode intensjoner og mener hjelpen er positiv. Dette eksemplet kan knyttes opp mot *rettigheter* og *plikter*, som Harré (2012) argumenterer for er grunnsteiner i posisjoneringsprosesser. En elev som strever med matematikk, kan tenke at det er en rettighet at andre elever forklarer hvordan oppgaven kan løses. Eleven vil da verdsette å få en beskrivelse av hvordan oppgaven kan løses. En annen elev som strever med matematikk, kan tenke at det er en rettighet å få lov til å løse oppgavene selv. Eleven vil da kunne oppleve at det å få en forklaring på hvordan oppgaven kan løses, posisjonerer eleven som ikke-kompetent uten mulighet til å delta i matematiske meningsskapende prosesser. Disse ulike forståelsene av rettigheter i læringsfellesskapet illustrerer noe av utfordringene knyttet til inkluderende praksiser som skaper muligheter for alle elevers deltakelse i matematiske læringsprosesser.

Metode

I denne artikkelen rapporteres delfunn fra en flerkasusstudie med syv fokuselever (13-14 år) fra ulike skoler i en norsk kontekst. Elevene ble invitert til å delta etter at jeg hadde hatt kontakt med læreren deres, som mente at disse elevene presterte lavt i matematikk. Jeg har observert fokuselevene i ulike smågrupper der de har samarbeidet med høyere presterende medelever om å løse LIST-oppgaver i smågrupper. LIST-oppgaver er oppgaver med Lav Inngangsterskel og Stor Takhøyde. Dette betyr at oppgavene skal være lette å forstå for alle elevene. Videre skal oppgavene kunne løses på flere måter, noen mer konkret og andre mer abstrakt og symbolsk (Simensen & Olsen, 2019). To av oppgavene som ble brukt i studien tok utgangspunkt i Diamantfigurene (se figur 1). I den ene oppgaven skulle elevene finne antall brikker i de ulike Diamantfigurene og uttrykke både rekursiv og eksplisitt sammenheng mellom figurtall og antall brikker (kvadratisk sammenheng). Den andre oppgaven hadde lik struktur, men her skulle elevene finne sammenhenger knyttet til omkrets (lineær sammenheng).



Figur 1. *Diamantfigurene som ble brukt i oppgavene (Simensen, 2022, s. 78).*

Hensikten med observasjonene av smågrupper som arbeidet med LIST-oppgaver har vært å få innsikt i hvordan fokuselevene aktualiserte matematisk kunnskap gjennom nøkkelhandlinger og hvordan muligheten til å uttrykke nøkkelhandlinger ble regulert i smågruppene. Det er altså interaksjonen mellom fokuselevene og medelevene, og fokuselevenes deltakelse, som har vært hovedfokus i analyseprosessen.

Analytisk tilnærming

Den analytiske prosessen var inspirert av Radford (2014) som vektlegger elevenes multimodale handlinger som aktualisering av kunnskap. Som en følge av dette, rettet analysen oppmerksomheten mot elevenes multimodale handlinger i de heterogene smågruppene. Elever som presterer lavt i matematikk kan ha et mangelfullt begrepsapparat og deres verbale ytringer kan derfor gi lite innsikt i hvordan de deltar med matematisk kunnskap. Et eksempel er den verbale ytringen "den ganger med den", som ikke gir samme innsikt som en video der man kan se hva eleven peker på og hvordan eleven knytter småord som *den, hit, dit, slik, her* opp mot materiell for å forklare matematiske ideer. Dette er beskrevet mer detaljert i min doktorgradsavhandling (Simensen, 2022).

Analysen ble gjennomført på to nivåer, først på kasusnivå og deretter på krysskasusnivå (Simensen, 2022). Innenfor rammene av teorien om objektivisering har jeg vektlagt analyseenheten som forankret i en forståelse av kunnskap som potensiell og alltid i bevegelse. Forståelsen er basert på at kunnskap aktualiseres innenfor rammene av medierende virksomhet, altså skapende og formidlende virksomhet. Med utgangpunkt i disse epistemologiske betraktningene, har jeg definert arbeidsøktene som studiens analyseenhet. Arbeidsøktene er definert og avgrenset av tid, oppgaver og gruppesammensetning. Hver av fokuselevene deltar i flere arbeidsøkter, der de jobber med ulike oppgaver og ulike medelever. Dette betyr at fokuseleven er del av ulike medierende virksomheter som potensielt kan bidra med unik innsikt i fokuselevens deltakelse, og derfor også i matematiske læringsmuligheter for elever som presterer lavt i matematikk.

Jeg har benyttet analyseprogrammet NVivo for å gjennomføre deduktiv koding med utgangspunkt i multimodale nøkkelhandlinger (Dekker & Elshout-Mohr, 1998). Nvivo gjorde det mulig å knytte kodene direkte til videoen slik at jeg kunne spille av video, transkripsjoner og koder synkront. Denne synkrone avspillingen har vært avgjørende for å få innsikt i multimodale aspekter ved elev–elev-interaksjonene. Flere detaljer knyttet til studiens metodiske tilnærming er gjort rede for i Simensen (2022).

Resultater

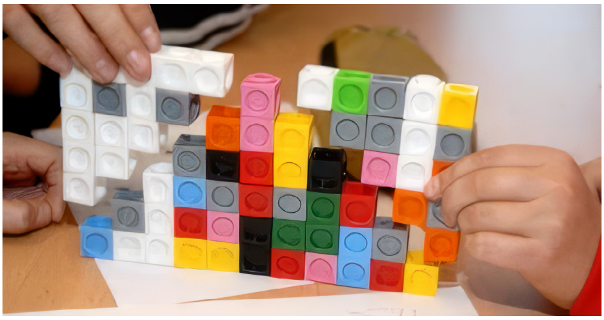
For å få innsikt i *hvordan medelevers regulerende handlinger kan posisjonere elever som presterer lavt i matematikk når de jobber sammen i heterogene smågrupper* har jeg rettet oppmerksomheten mot elevenes handlinger på to nivå: nøkkelhandlinger og regulerende handlinger.

Nøkkelhandlinger – aktualisering av matematisk kunnskap

Min tolkning av nøkkelhandlinger har vært en deduktiv prosess der jeg har hatt *prosessmodellen* som teoretisk utgangspunkt (Dekker & Elshout-Mohr, 1998). Dette betyr at jeg har brukt nøkkelhandlingene fra *prosessmodellen*: å vise, å forklare, å begrunne eller å reformulere en matematisk ide. Slike nøkkelhandlinger kan uttrykkes muntlig, gjennom tekst eller tegning, ved bruk av materiell, eller ved å kombinere ulike modaliteter. I mitt datamateriale fant jeg at alle fokuselevene (elever som presterer lavt i matematikk) uttrykte nøkkelhandlingene *vise* og *forklare*. Disse var de mest frekventerte nøkkelhandlingene uttrykt av fokuselevene. Nøkkelhandlingen *begrunne* fant jeg at tre av syv fokuselever benyttet i sin aktualisering av matematisk kunnskap. Den fjerde nøkkelhandlingen, *reformulere*, identifiserte jeg i alle fokuselevenes aktualisering av kunnskap, men den var likevel sjeldnere enn nøkkelhandlingene *vise* og *forklare*.

Dekker og Elshout-Mohr (1998) definerer nøkkelhandlingen *vise* som respons til spørsmålet "hva har du fått?" (s. 306, min oversettelse). Dette betyr at en elev som svarer på dette eller liknende spørsmål med "36" eller ved å peke på arket sitt, har uttrykt nøkkelhandlingen *vise*. Det å *vise* gir derfor ikke alltid innsikt i hvordan eleven har tenkt, men slike nøkkelhandlinger kan være et av de første stegene som gjør at eleven kommer i posisjon til å *forklare* hvordan de har tenkt. I kasuset Luna illustreres dette når hun først svarer "35" (*vise*) og deretter *forklarer* "Fordi 5 er 30 [peker på tabellen], og 5 ganger mer er 30 mer, og det blir 60" (Simensen, 2022, s. 107-108). Det første som kan være verd å merke seg her, er at hun svarer feil når hun aktualiserer kunnskapen gjennom nøkkelhandlingen *vise*. Når hun får rom til å forklare hvordan hun tenker, benytter hun seg av en tabell elevene har fylt ut i arbeidet med oppgaven. Forklaringen hennes uttrykker hun derfor gjennom å kombinere muntlig språk (tale), kroppsspråk (peke) og materiell (tabellen).

I tråd med det som ble illustrert i kasuset Luna, *forklarte* ofte fokuselevene matematiske ideer gjennom multimodale handlinger, altså ved å kombinere muntlig språk, kroppsspråk og bruk av materiell. Materiell kan brukes som konkretisering (for eksempel telle alle kubene), men det kan også brukes som en del av abstraksjonsprosesser. Et eksempel på at materielle brukes for å generalisere, framkom i kasuset Elsa da hun brukte den fysiske diamantfiguren 5 til å peke på imaginære rader for å beskrive diamantfigur 10: "Også figur 10. Finn omkretsen til figur 10. Og dette er figur?



Figur 2. *Multimodal nøkkelhandling reformulere (Simensen, 2022, s. 159).*

[peker på diamantfigur 5]. 5? 6, 7, 8, 9, 10 [peker på imaginære rekker]. Det blir jo en hel haug med rekker" (Simensen, 2022, s. 151). I mitt datamateriale var fokuselevenes forklaringer ofte av multimodal karakter, altså knyttet til bruk av materiell (tegning, tabell, brikker, klosser etc.). Det som imidlertid er mer interessant, er at disse multimodale forklaringene ofte inneholdt abstrakte matematiske ideer der eleven generaliserte matematiske ideer med utgangspunkt i tilgjengelig materiell. Det som videre er verd å merke seg, er at jeg ofte identifiserte nøkkelhandlingen *forklare* i etterkant av at fokuseleven hadde uttrykt matematiske ideer gjennom nøkkelhandlingen *vise*.

Når det gjelder nøkkelhandlingen *begrunne*, identifiserte jeg i liten grad denne i mitt datamateriale. Dekker og Elshout-Mohr (1998, s. 306) sier at denne nøkkelhandlingen alltid er en respons på kritikk. Nøkkelhandlingen *begrunne* vil derfor sett isolert kunne være identisk med nøkkelhandlingen *forklare*. For å skille disse nøkkelhandlingene må man altså se på hva som blir kommunisert i forkant av dem. I kasuset Sol holdt elevene på med å finne ut hvor mange brikker det er i diamantfigur nummer 20 (altså trekanttall 20). De har funnet ut at det er 55 brikker i figur nummer 10, og Sol foreslår at de må legge til 165 for å finne figur nummer 20. Medeleven Ted sier da: "Ja, da må du ha telt feil" (*kritikk*). Sol *begrunner* da sin matematiske idé med: "Nei, vi skal bare ned til 10. 20 pluss 19 pluss 18 pluss 17 pluss 16 pluss 15 pluss 14 pluss 13 pluss 12 pluss 11. [bruker kalkulator] 155 var det" (Simensen, 2022, s. 139). Dette kunne vært tolket som en *forklaring*, men fordi det er en respons til *kritikk*, blir det tolket som en *begrunnelse*.

Analysen identifiserte den fjerde nøkkelhandlingen, *reformulere*, hos alle fokuselevene. Den framkom imidlertid ikke like ofte som nøkkelhandlingene *vise* og *forklare*. Når fokuselevene *reformulerte* sine matematiske ideer, utrykte de seg ofte multimodalt. Et eksempel på dette framkom i kasuset Kim, da han transformerte et tårn slik at det ble et rektangel (se figur 2). Gjennom denne transformasjonen brukte han en multimodal nøkkelhandling for å uttrykke den eksplisitte sammenhengen mellom figurtallet og antall kuber i figuren (kvadratisk sammenheng).

Da medelevene hans kritiserte ham for å bruke klossene til å uttrykke matematisk kunnskap, forklarte han videre:

> "Nei, nei. Men det er jo bare å si 'den (grunnlinja)' ganger 'den (høyden)'. For da får du svaret uten å gjøre det på ordentlig, uten å snu dem. Da blir det hele den nederste ganger den i midten [flytter fingeren horisontalt og vertikalt på den avbildede tårnfigur 6]."

Eksemplet fra kasuset Kim illustrerer hvordan han aktualiserte ideen gjennom å kombinere og flytte seg mellom ulike modaliteter: muntlig språk, kroppsspråk (peke), bildemateriell (avbildet figur) og klossene som materiell. I kasuset May viser analysen hvordan medelevene inviterer May til å delta gjennom å *foreslå handling* og *gi tilgang til materiell*: "May har du lyst å telle hvor mange det er rundt den første [gir May oppgavearket med bildet av figurene og en blyant]?" May starter med å telle kantene og forklarer videre at man "Ganger med figurnummer [peker på ruta med 'figurnummer' i tabellen]", før hun avslutter med å si at man kan skrive "N ganger 6" (Simensen, 2022, s. 122).

Regulerende handlinger – invitasjon til/hindring av nøkkelhandlinger

For å undersøke *hvordan medelevers regulerende handlinger kan posisjonere elever som presterer lavt i matematikk når de jobber sammen i heterogene smågrupper* har jeg sett på medelevenes handlinger i forkant av fokuselevenes nøkkelhandlinger. Analysen identifiserte syv regulerende handlinger som åpnet for/inviterte til aktualisering av matematiske ideer og tre handlinger som hindret/blokkerte aktualisering (se tabell 1).

Noen av de regulerende handlingene inviterer eksplisitt fokuselevene til å bidra med nøkkelhandlinger: *be om forklaring*, *foreslå handling* og *gi tilgang til materiell*. Dette er regulerende handlinger der medelevene henvender seg konkret til fokuselevene og etterspør deres matematiske bidrag. Slike handlinger vil ikke alltid føre til at fokuseleven aktualiserer matematisk kunnskap. Et eksempel på dette framkom i kasuset May når medeleven Tom sa "Okey, forklar til meg" (Simensen, 2022, s. 119), og May ikke svarte noe. Noen av de regulerende handlingene er implisitt inviterende: *bidra med nøkkelhandling*, *kritisere* og *bidra med stillhet*. Det viser seg at når medelevene bidrar med nøkkelhandlinger og forteller hvordan de har tenkt, fører dette ofte til at fokuselevene også uttrykker nøkkelhandlinger. På samme måte bidrar kritiske innspill og stillhet til at fokuselevene får mulighet til å aktualisere matematisk kunnskap. Den regulerende handlingen *møte fremmedhet* henger sammen med oppgavens natur og analysen viser at denne kan bidra til at medelevene gir fokuseleven rom til å uttrykke nøkkelhandlinger. Denne regulerende handlingen illustrerer at posisjonering ikke nødvendigvis er knyttet til intensjoner om å invitere eller hindre deltakelse.

Tabell 1. *Regulerende handlinger som framkom i analysen (Simensen, 2022, s. 173).*

Regulerende handlinger									
Åpne for/invitere til aktualisering							Hindre/blokkere aktualisering		
Be om forklaring	Foreslå handling	Bidra med nøkkelhandling	Kritisere	Møte fremmedhet	Bidra med stillhet	Gi tilgang til materiell	Hindre tilgang til materiell	Ignorere	Uttrykke seg nedsettende

De regulerende handlinger som hindrer fokuselevene fra å aktualisere matematisk kunnskap er: *hindre tilgang til materiell*, *ignorere* og *uttrykke seg nedsettende*. De kan uttrykkes verbalt, kroppslig eller som en kombinasjon. Et eksempel på kombinasjon av verbal og kroppslig ytring, er fra kasuset Elsa når medeleven Lars sier "Hysj nå på deg!" samtidig som han skyver Elsas hånd bort fra materiellet (Simensen, 2022, s. 150). Et eksempel på å uttrykke seg nedsettende, er fra kasuset Sol når medeleven Jim sier "Herregud, du er dum i hodet" (Simensen, 2022, s. 145). Slike regulerende handlinger framsto som mulige hinder for fokuselevenes videre deltakelse og kan dermed forstås som at de posisjonerer elever som presterer lavt i matematikk som ikke-kompetente uten mulighet til å delta i gruppas aktualisering av matematisk kunnskap.

Diskusjon

I resultatdelen har jeg løftet fram funn knyttet til nøkkelhandlinger og regulerende handlinger som regulerende faktorer i heterogene smågrupper. I diskusjonsdelen ønsker jeg å diskutere disse resultatene innenfor rammene av posisjoneringsteori (Davies & Harré, 1990). For å løfte fram elever som presterer lavt sine læringsmuligheter, har jeg valgt å knytte diskusjonsdelen eksplisitt opp mot noen av kasusene i min hovedstudie. Målet er å diskutere matematiske læringsmuligheter forankret i *hvordan medelevers regulerende handlinger kan posisjonere elever som presterer lavt i matematikk når de jobber sammen i heterogene smågrupper*. Davies og Harré (1990) peker på at posisjonering kan observeres i interaksjoner samtidig som det er knyttet til subjektive valg i samskapte storylines (s. 48). En av fokuselevene i min studie framsto som svært reservert i flere av gruppene hun deltok i, hun sa lite og distanserte seg fra gruppa ved å trekke stolen godt ut fra bordet de satt rundt. Når de andre spurte om hun skjønte oppgaven, nikket hun uten å si noe. Medelevene inviterer henne til å forklare hvordan hun tenkte ved å si "forklar til meg. Jeg trenger en forklaring" og "jeg vil ha henne med". Dette kan forstås som den regulerende handlingen *be om forklaring*. Fokuseleven svarer ikke på disse regulerende handlingene, altså kan de forstås som handlinger som ikke bidrar til at hun posisjoneres som deltaker i gruppas aktualisering av matematisk kunnskap. En av årsakene til dette, kan være at medeleven sier at det er han som trenger en forklaring og han vil ha henne med. Dette kan tolkes som lave forventninger til fokuselevens muligheter til å bidra til gruppas aktualisering av matematisk kunnskap. Hun inviteres til å bidra fordi elevene er oppfordret til å la alle i gruppa delta. Flere studier har undersøkt hvordan lærerens lave forventninger kan posisjonere elever som presterer lavt i matematikk som ikke-kompetente (e.g., Heyd-Metzuyanim, 2013; Straehler-Pohl et al., 2014; Tait-McCutcheon & Loveridge, 2016). Resultatene fra min studie tyder på at også medelevers forventninger påvirker posisjoneringen av elever som presterer lavt i matematikk. I en annen gruppe framstår eleven fortsatt som reservert, men medelevene inviterer henne til å delta gjennom å *foreslå handling* og *gi tilgang til materiell*. Her posisjoneres fokuseleven som en som kan bidra i gruppas arbeid og hun avslutter med å si hva som er det eksplisitte uttrykket for å finne omkretsen til diamantfigurene. Disse eksemplene illustrerer noe av kompleksiteten med matematiske læringsmuligheter i inkluderende klasserom: Elever vil ha ulike læringsmuligheter i matematikk, også når de hører til det samme matematikk-klasserommet. Dette samsvarer med resultater fra studier som har undersøkt elev–elev-interaksjoner (e.g., Barclay, 2021; Esmonde & Langer-Osuna, 2013).

Når fokuselevene bidro med nøkkelhandlinger som uttrykte feilaktig eller unøyaktig matematisk kunnskap, var medelevenes respons oftest *ignorering* og noen ganger *kritisering* av matematisk idé. Mens kritisering ofte bidro til at fokuseleven aktualiserte matematisk kunnskap gjennom å *forklare* sitt resonnement, bidro *ignorering* stort sett til å hindre videre deltakelse. Analysen viste at *ignorering* var en av de regulerende handlingene som var svært effektiv for å hindre elever som presterer lavt fra å delta i matematiske samtaler. Sett i lys av Bakhtin (1986) sin tanke om at ingen ting er verre enn mangelen på respons (s. 127), er ikke dette et overraskende funn. Funnet er videre i tråd med funn rapportert av Ryan (2019) som viser at elever som aktualiserer matematiske ideer på en måte som skiller seg fra de kjente matematiske normene, kan bli hindret av medelevene fra å delta videre i aktualiseringen av matematisk kunnskap. Dette gjelder både når elever uttrykker unøyaktige matematiske ideer og når de uttrykker seg utenfor norm, for eksempel multimodalt. I oppgavene som ble brukt i min studie, var ett av spørsmålene å finne flere strategier/framgangsmåter for å løse oppgaven. Dette er en formulering som kan oppmuntre elevene til å verdsette og diskutere nye og ikke-kjente løsningsmetoder (Simensen, 2022).

Det å etterspørre ikke-kjente løsningsmetoder kan knyttes opp mot den regulerende handlingen *møte fremmedhet*. Studiens funn viser at fremmedhet posisjonerer elever som presterer lavt i matematikk som kompetente bidragsytere. Dette sammenfaller med tidligere rapporterte funn (Barclay, 2021) og kan videre knyttes til fremmedhet i oppgaveteksten. I en av oppgavene som ble brukt i studien skulle elevene finne omkretsen til diamantfigurer og denne omkretsen skulle oppgis i "Altameter" (en fiktiv måleenhet). Når en medelev som har en historie som høyt presterende i matematikk møter på fremmede begreper som "Altameter", kan dette skape et brudd der det oppstår *stillhet* og eleven som presterer lavt kommer i posisjon til å bidra matematisk. I flere av kasusene var det utfordrende for eleven som presterte lavt i matematikk å komme i posisjon til å bidra matematisk, men når medelevene møtte på fremmede begreper, ble de både stille og mer lydhøre for andre elevers stemmer. Dette er et funn som kan tolkes som at fremmedhet bidro til at medelevene ble posisjonert som mindre kompetente og fokuseleven som mer kompetent (Simensen, 2022).

En av nøkkelhandlingene som ble sparsommelig identifisert i min analyse, er *begrunne*. Som nevnt tidligere, er denne nøkkelhandlingen definert av Dekker og Elshout-Mohr (1998) alltid en respons på, altså et svar til, kritikk. Analysen viser at det er få tilfeller der medelevene uttrykker at de er kritiske til fokuselevenes matematiske ideer. Det viser seg videre at når den regulerende handlingen *kritikk* uttrykkes, følges den stort sett alltid av at fokuselevene uttrykker den matematiske nøkkelhandlingen *begrunne*. Mangelen på kritikk kan ses i sammenheng med *plikter* og *rettigheter* som Harré (2012) beskriver innenfor posisjoneringsteorien. Det kan være at medelevene ser det som sin plikt å ikke kritisere noen som strever med matematikken. Det kan også være at medelevene ser det som elever som strever med matematikken sin rettighet å ikke bli kritisert. Sett i lys av Davies (2022) sine beretninger om hvordan deltakere kan oppleve posisjonering ulikt, er det interessant å se at fokuselevene møter kritikk med å *begrunne* sine matematiske ideer. I min analyse gir dermed medelevers kritikk av matematiske ideer, elevene som strever med matematikken en mulighet for å delta i det matematiske læringsfellesskapet.

Konklusjon

I denne artikkelen har jeg rettet oppmerksomhet mot hvordan medelevers regulerende handlinger kan bidra til å posisjonere elever som presterer lavt i matematikk når de jobber sammen i heterogene smågrupper. Hensikten har vært å bidra til mer kunnskap om hvordan LIST-oppgaver kan bidra til styrkebaserte og inkluderende pedagogikker der alle elever, uavhengig av prestasjoner, kan bidra med matematisk kunnskap.

Funnene fra krysskasusanalysen viser noen mønster i hvilke regulerende handlinger som bidro til å invitere til eller hindre elevene som presterte lavt i matematikk sin aktualisering av matematisk kunnskap. De regulerende handlingene som oftest inviterte disse elevene sin aktualisering er: *etterspørre forklaring*, *foreslå handlinger*, *bidra med nøkkelhandlinger* (forklare egen forståelse), *kritisere*, *møte fremmedhet*, *bidra med* *stillhet* og *gi tilgang til materiell*. Handlingene som oftest hindret aktualisering er: *hindre tilgang til materiell*, *ignorere* og *uttrykke seg nedsettende*. Når medelevene brukte inviterende handlinger, kom fokuselevene i posisjon til å aktualisere matematisk kunnskap og de fikk delta i matematiske læringsmuligheter. Når medelevene brukte hindrende handlinger, ble fokuselevene posisjonert som ikke-kompetente og fikk ikke delta i matematiske læringsmuligheter. Regulerende handlinger som inviterende og hindrende, er en sterk forenkling av læringsmuligheter for elever som presterer lavt i matematikk. Posisjonering er en dynamisk prosess der elevene i interaksjonen gjensidig påvirker og posisjonerer hverandre. Denne prosessen påvirkes av omgivelsene, konteksten og elevenes tidligere erfaringer. For eksempel vil oppgavens natur kunne påvirke hvordan elevene posisjonerer hverandre. Analysen viste at begreper som oppleves som fremmede for elever som presterer høyt i matematikk, kan bidra til at elever som presterer lavt posisjoneres som kompetente deltakere i gruppa.

Ett av de sterkeste funnene i den rapporterte studien, er at elever som presterer lavt i matematikk kan bidra betydelig med sofistikert aktualisering av matematiske ideer når heterogene smågrupper jobber med LIST-oppgaver. Dette samsvarer med funn rapportert av Barclay (2021), og vil ha betydning for hvilke oppgaver som brukes når smågrupper brukes som arbeidsform i inkluderende matematikk-klasserom.

Referanser

Andersson, A., & Wagner, D. (2019). Respond or dismiss: Interactions that may support loving, bullying and solitude in mathematics. *Journal of the Canadian Association for Curriculum Studies*, *17*, 47-74.

Bakhtin, M. (1986). *Speech genres and other late essays*. University of Texas Press.

Barclay, N. (2021). Valid and valuable: Lower attaining pupils' contributions to mixed attainment mathematics in primary schools. *Research in Mathematics Education*, *23*(2), 208-225.

Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevski, L. & Sfard, A. (2005). Doing wrong with words: What bars students' access to arithmetical discourses. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*, 176-247.

Boaler, J. & Sengupta-Irving, T. (2016). The many colors of algebra: The impact of equity focused teaching upon student learning and engagement. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 179-190.

Davies, B. (2022). Positioning and the thick tangles of spacetimemattering. *Qualitative Inquiry*, *29*(3-4), 466-474.

Davies, B. & Harré, R. (1990). Positioning: The discursive production of selves. *Journal for the Theory of Social Behaviour*, *20*(1), 43-63.

Dekker, R. & Elshout-Mohr, M. (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(3), 303-314.

Empson, S.B. (2003). Low-performing students and teaching fractions for understanding: An interactional analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(4), 305-343.

Esmonde, I. & Langer-Osuna, J.M. (2013). Power in numbers: Student participation in mathematical discussions in heterogeneous spaces. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 288-315.

Herbel-Eisenmann, B.A., Wagner, D., Johnson, K.R., Suh, H., & Figueras, H. (2015). Positioning in mathematics education: revelations on an imported theory. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(2), 185-204.

Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics—teacher–student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(3), 341-368.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM*, *46*(3), 349-361.

Ryan, U. (2019). Mathematical preciseness and epistemological sanctions. *For the Learning of Mathematics*, *39*(2), 25-29.

Schmidt, M.C., & Thygesen, S. (2024). Think carefully, let's bond, and other tutoring strategies: Socio-academic participation patterns in peer tutoring. *European Journal of Inclusive Education*, *3*(1), 25-42.

Simensen, A.M. (2022). *Matematiske læringsmuligheter for alle: En styrkebasert flerkasusstudie om elever som presterer lavt i matematikk sin deltakelse i heterogene smågrupper* (Bd. 365). [PhD thesis] Universitetet i Agder. https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/bitstream/handle/11250/2987450/Simensen%20avhandling%202022_03_07.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Simensen, A.M. & Olsen, M.H. (2019). Tasks that enhance creative reasoning: supporting gifted pupils in inclusive education systems. I M. Nolte (Red.), *Including the Highly Gifted and Creative Students – Current Ideas and Future Directions. The 11th international conference on mathematical creativity and giftedness (MCG 11)* (s. 202-208). WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Straehler-Pohl, H., Fernández, S., Gellert, U. & Figueiras, L. (2014). School mathematics registers in a context of low academic expectations. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 175-199.

Tait-McCutcheon, S.L. & Loveridge, J. (2016). Examining equity of opportunities for learning mathematics through positioning theory. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(2), 327-348.

Wagner, D., & Herbel-Eisenmann, B. (2009). Re-mythologizing mathematics through attention to classroom positioning. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 1-15.

Watson, A. (2002). Instances of mathematical thinking among low attaining students in an ordinary secondary classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(4), 461-475.

English abstract

The project reported here is a multiple case study that addresses mathematical learning opportunities for low achieving students (age 13-14) while working in heterogeneous groups. The study is based on the theory of objectification and positioning theory and discusses how peers' multimodal actions regulate low achieving students' participation in the group's actualization of mathematical knowledge. To investigate this, we videorecorded students work on rich tasks in small groups. The findings show examples of regulating actions that might regulate low achieving students' participation. Further, the study illustrates that rich tasks can cultivate mathematical learning opportunities in inclusive classrooms.

Restructuring the university course Mathematics for All: An action research

Ósk Dagsdóttir, University of Iceland

Edda Óskarsdóttir, University of Iceland

Abstract: *The purpose of this educational action research was to understand how we can restructure the course Mathematics for All, a graduate-level course taught at the University of Iceland. Data was gathered and analysed thematically and cyclically with an open questionnaire at the end of the course and individual interviews a year later. Findings show that the course influenced participants' understanding of mathematics education and their professionalism. The interviewed participants were able to utilise problem solving and discussions in their classroom but faced challenges and needed ongoing support to implement their learnings in class.*

Introduction

Inclusive education is the school policy in Iceland (Compulsory School Act No. 91/2008). This policy is based on international standards of social justice, democracy, human rights and the participation of all (Ainscow, 2020). These fundamental principles focus on schools working to remove barriers to participation and all learners have the right to inclusive compulsory education where the educational and social requirements of each student are met in the learning community of a common local school (Ministry of Education, Science and Culture, 2014). The national curriculum recognises that compulsory school learners are diverse and their needs varied. The curriculum is based on competence criteria for all subject areas and in mathematics those focus on process and skills (Ministry of Education, Science and Culture, 2014).

Mathematics for All is a 10 ECTS graduate-level course that we (Ósk and Edda) teach at the School of Education, University of Iceland. The course focuses on theories and research on how children learn mathematics, the challenges they encounter and how to design and adapt the mathematics curriculum to diverse groups of learners. Additionally, the focus is on course participants developing an understanding of themselves as mathematics learners and users. In the course we, as teacher educators, have found it important to model inclusive teaching practice as course participants need to experience learning mathematics in an environment that reflects the environment they are expected to create for their own learners in mathematics (Moore, 2005).

We – the teachers of the course – have different strengths and academic backgrounds. Both of us were schoolteachers before coming to work in academia: Ósk has taught mathematics at all school levels and Edda was a special needs teacher for 20 years, focusing on working with the challenges learners encounter in learning mathematics. We see our different experiences and expertise as a strength for the course, as Ósk focuses on mathematics pedagogy and creativity while Edda focuses on inclusive education and working with diverse learners.

Through the years, the course Mathematics for All has been restructured and developed through action research (Óskarsdóttir & Guðjónsdóttir, 2004; Guðjónsdóttir & Kristinsdóttir, 2006; Guðjónsdóttir et al., 2009; Guðjónsdóttir & Kristinsdóttir, 2011). Continuing in this tradition, the purpose of our action research is to gain an understanding of how the course can be restructured to influence teacher professionalism and mathematics teaching. The aim is to investigate how the course has influenced participants' teaching practice and understanding of teaching mathematics to diverse groups of learners. Our research question is: How can we restructure the course Mathematics for All to empower teachers to teach mathematics to diverse groups of learners?

Conceptual framework

The conceptual framework consists of the ideas emphasised in the course Mathematics for All. The foundation is inclusive education and practices that are fundamentally based on the ideology of social justice, democracy, human rights and full participation of all (Ainscow, 2020). At the heart of the course ideology lies the premise that individuals have different requirements for achieving the same goals. This means that teachers need to be positioned and empowered to provide effective mathematics learning environments based on equity and access (Tan & Torius, 2018). The challenge of providing a quality mathematics education for all goes beyond the classroom level and involves a rethinking of the systemic and institutional structures which mediate both teaching and learning (Lisenbee & Tan, 2019; Roos, 2019). The focus is not only on how to assist learners experiencing difficulties in learning mathematics, but also how to structure mathematics education such that it no longer disables and alienates so many learners in mathematics.

According to Luria et al. (2017) equity can be increased in a mathematical classroom through various methods such as employing open-ended problems, modelling and discussions of mathematical concepts and incorporating cultural awareness and creativity into curricula and the classroom environment. Thus, teachers who aim to include all learners in mathematics need to be responsive, competent and able to express and explain mathematics in various ways (Lindenskov & Lindhardt, 2020; Roos, 2023). According to Scherer and Bertram (2024) there is a need in mathematics teacher education to create situations that support teacher students to reflect on their mathematical knowledge and course activities must be discussed openly to investigate differences in how people learn mathematics.

To support learner understanding in mathematics, it is important for the mathematics teacher to create an inclusive learning community in the class, where the primary focus is not on "right or wrong" solutions but rather to discuss different ways of approaching a given mathematical task (Boaler, 2016). In general, classroom practice should encourage students to explain and reason about solution strategies, along with considering solution strategies and associated reasoning (Scherer et al., 2016). Boaler (2016) argues that a growth mindset and flexible interaction with numbers can support students to become better learners in mathematics. Those with a fixed mindset believe that people are either good at mathematics or not and those beliefs can hinder learning, while those with a growth mindset believe everyone can improve in their learning, which can support them to exert themselves and enjoy their learning (Boaler, 2016).

An important factor in working with diverse groups of students is to focus on discussions (Valero et al., 2008). Discussions about problems and concepts can support learners towards developing their mathematical understanding in a collaborative learning community (Yeh et al., 2017). There should be a mathematical goal driving the discussions. For discussion to be successful, teachers need to be role models and communicate that everyone is a sense-maker as they support learners in deciding how and what to share, as well as to be oriented to one another and to the mathematical ideas (Kasemi & Hintz, 2014). Presenting mathematics visually with hands-on projects can also support students to think flexibly and develop mathematical understanding (Boaler, 2016: Luria et al., 2017).

The course context

The course Mathematics for All is taught at a master's level and participants are student teachers and practising teachers who teach at all levels of the education system, together with special needs teachers and social educators. The course was originally aimed at special education teachers, and it focused on difficulties that learners have in mathematics, how to analyse those problems and how to teach accordingly. As the idea of inclusion has developed to incorporate all learners, so has the focus of the

Table 1. *An overview of the course themes, emphasis and assignments*

Theme	Emphasis	Graded assignments
The conceptual background of the course	Research on mathematics learning and the development of children's understanding. Theories of inclusion, equity, creativity, growth mindset and universal design for learning in mathematics.	1. The ideology (20%), individual project. Writing a synopsis based on selected articles and book chapters (from a list) related to the subject of Mathematics for All.
The learner in mathematics	Tasks for all learners. A sociocultural view of learning and how it takes place in the classroom community. Difficulties in learning mathematics. Cognitively guided instruction and problem solving. Promoting high-quality mathematics and visual learning. Mathematics learning in multicultural/multilingual settings.	2. Field observation (20%), collaborative project. Students choose between: a. Set and analyse a mathematical task for learners and discuss solutions with them. b. Observe teaching and conduct an interview with a teacher. c. Interview with a learner about their experience of learning mathematics.
The teacher in mathematics	Teaching methods that are suitable for diverse learners. Building optimal learning environments and powerful classrooms. Using dialogue and formative assessment in the mathematics classroom.	3. Final project (30%) related to the course themes (collaborative project). 4. Self-assessment (9%) of what participants have learnt in the course (individual task).

course changed. Now the emphasis is on how to support course participants to work with diverse learners in developing their mathematical thinking and skills, and on the teacher's ability to evaluate and promote learning through exploring their own understanding of mathematics.

The course content is based on the conceptual framework of the study and organised into three themes: the conceptual background that the course builds on, the learner in mathematics and the teacher in mathematics. Table 1 provides an overview of the course, the emphasis and graded assignments under each theme.

Reading material and a recorded lecture are made available to participants a few days before the class meets. In class we begin by discussing the reading material and lecture whereafter participants are given a mathematical task to work on, either in small groups or individually, using hands-on material. The emphasis is always on discussing the different methods participants used to solve the tasks, although they come to the same conclusion. Our aim is to act as role models for participants, so they learn about how to conduct open discussions about mathematics, how to create an inclusive space for talking about different ways of approaching mathematical tasks and to see how differently people think in mathematics.

Methodology

Action research is an umbrella term encapsulating many ways of researching practice. We understand it as being teacher or practitioner research (Cochran-Smith, 2005) that places the practice at the centre in order to find out how to improve it. Because of this focus on practice, action research is small-scale and the intention is to improve or change practices and report on that development. The research topic arises from the practitioners' questions or ponderings about their practice, and the goal is not to report facts of knowledge but to improve practice and add to what was known previously (Baumfield et al., 2013; McNiff, 2013).

The purpose of this action research is to gain an understanding of how the course Mathematics for All can be restructured to influence teacher professionalism and mathematics teaching. Participants in the study include us – the two teachers of the course – together with 20 participants who attended the course in the autumn term of 2022. All ethical procedures were adhered to: teachers gave informed consent and pseudonyms were used to hide their identities (Siðareglur háskólanna, e.d.).

This action research is based on three cycles of inquiry in which the outcomes of earlier cycles influence subsequent thinking and understanding. In the first cycle participants completed an online questionnaire with open questions at the end of the course in December 2022. Of the 20 course participants, 12 completed the questionnaire. In the second cycle three participants were interviewed individually in January and February 2024. The interviews were semi-structured and focused on participants' descriptions of their views and experiences of the course and the influence on their teaching. The third cycle of the research focused on reflecting on and analysing all the data as well as implementing changes in our Mathematics for All course that will be next taught in autumn 2024. Throughout the research we have written research notes and journal entries that also form part of the data. Table 2 provides an overview of research cycles and the data collected.

Data was analysed using inductive thematic analysis. For each cycle we first analysed the data individually and then together. By analysing the data both individually and together we achieved triangulation that added to the trustworthiness of the study (McNiff, 2013). In the individual analysis we used colours to search for codes, categories and themes inductively. In our collaborative analysis we compared our categories and themes and agreed on the ones that were most descriptive and would

Table 2. *Research cycles and data*

Research cycle	Data
First cycle	An online questionnaire with open questions about participants' learning from the course asking participants to reflect on: • Own learnings and achievement of learning outcomes • The usefulness of the course for teaching • Wishes for future learning and development as a mathematics teacher for all
Second cycle	Individual interviews focusing on participants' views and experiences a year after attending the course: • Embla, third grade teacher (Nov 2023) • Sif, fifth grade teacher (Nov 2023) • Jóna, special needs teacher in fourth and fifth grades (Feb 2024)
Third cycle	Summary of the findings from the first and second cycle and collaborative review of all data with the aim of making sense of the participants' experiences.

support us in answering the research question. The themes that developed are explained in the findings.

Findings from the first cycle

The first cycle findings are based on the analysis of the end-of-course questionnaire that 12 participants completed. The replies to the questionnaire were in the form of written reflections and statements. Three core themes came out of our analysis from this cycle: participant understanding of mathematics learning, understanding one's own professionalism and teaching practice and learning from each other. We will discuss each of those themes below, providing examples of how participating teachers described their own experiences.

Participant understanding of mathematics learning

All participants were clear in their statements that the course material and projects had improved their understanding of their own mathematics learning and that of students. Anna, a preschool teacher, discussed what she learnt about fixed and growth mindsets in the course and wrote the following: "I have discovered that I have a fixed mindset in mathematics – I have now consciously tried to change to a growth mindset." She shows how she was actively reflecting on her own mindset in mathematics and made a connection to creating "a meaningful learning environment" for her students.

Bjarni, who was studying to be an upper secondary school teacher, commented that he would be able to use a great deal of what he had learned in the course, "for example about drilling and to place emphasis on quality rather than quantity of practice", thereby showing that he was changing his understanding of how people learn mathematics and wanted to focus on understanding rather than mindless repetition of many problems.

Sigrún, also an upper secondary school teacher, commented on her own improved mathematical understanding:

> "One thing I remember was […] about the equal sign and [how I learned in the course] that it means you have to do the same on both sides but not just to move the numbers and change the other signs => it is not the same thing. This was an 'Ah-HA!!' moment for me."

Sigrún's reflection is a testament to her growing understanding of mathematics. Her educational background was in sciences, where she had learned substantial mathematics but had not understood the equal sign and equations in this way prior to the course. She takes this as an example of how the course supported her to develop her own understanding of mathematics.

Understanding one's own professionalism and teaching practice

There were several participants who explained how the course had influenced their professionality and teaching practice. Not all of the participants were teaching at the time of the course, such as Embla, a seasoned teacher at the comprehensive level who was on study leave, who wrote:

> "This course has increased my self-confidence in teaching maths: I have more tools than before and more knowledge and ways to work with learners. I want to use more diverse teaching methods, and work from the curriculum goals but not just the textbooks. I'm finishing the course full of good intentions!"

Embla's experience was that the course improved her confidence in teaching and gave her tools and knowledge. Through her words the emphasis on working from textbooks in mathematics lessons is evident. However, she clearly wishes to use more diverse teaching methods and she further states that she left the course full of hope and wanting to apply what she had learned.

Hanna, also a teacher at the comprehensive school level, stated: "I have learnt incredibly many things, both about all kinds of tasks and about creativity that I can use in my teaching. I have read lots of interesting research on mathematics teaching." From Hanna's comment it is clear that the focus on reading research in the course is important for teachers developing as professionals.

Learning from each other

The diversity of the class participants, in terms of teaching experience, school level, age and background, was a strength and course participants with different backgrounds felt that their needs were met. Anna, a preschool teacher, stated:

> "I learned that number sense is the foundation for mathematical learning for children. The goal was to add accessible shapes, numbers and games in my class. I made a shopping game where the product prices were marked and the children paid with money, a fun game where children learn by experimenting and playing."

Anna explained how she, as a preschool teacher, learned practical methods for her teaching of young children and emphasised number sense. In the survey Bjarni wrote: "I have been introduced to diverse teaching methods that I can use as a teacher, also for other subjects. I realize better which challenges students face and what ways there are to work through those challenges." This implies that Bjarni, as a secondary school teacher, experienced that he could apply his learning to teaching young people and understand the challenges that they face in mathematics learning.

Linda, a primary school teacher, stated:

> "I have learned a lot, but now the importance of discussion to solve problems comes to mind, I mean the lessons in which we have collaborated on solutions. I have seen how much I can really learn from others, and I take that with me into my own teaching where I emphasize that students describe how they solve problems with the aim of supporting other students' learning. I feel I have acquired a new vision of mathematics education."

The point that Linda makes here about learning from others resonates with what we have experienced when teaching the course: that the diversity of the group was a strength. Course participants with different backgrounds, experience and age employ various ways to solve problems assigned in class and they learn from each other. An example of this was a problem with two unknown numbers where one of the teachers studying to be a secondary school teacher solved it with an equation whereas a primary level teacher used blocks. Both found a way to solve the problem and as they discussed and shared their solutions, they learned about each other's methods and gained insight into how differently one can approach mathematics.

Findings from the second cycle

The findings from the second cycle are based on the analysis of three semi-structured individual interviews. The participants who we interviewed all worked in teams in their schools and shared the responsibility of teaching mathematics with other teachers. Embla taught third grade, Sif was a fifth grade teacher and Jóna was a special education teacher in grades four and five. The next sections are organised according to the teachers' individual stories, as their unique experiences provide an insight into how teachers work with Mathematics for All.

Embla's experience

Embla relates that she took on a new class in the autumn with a very diverse group of students and that a great deal of her time has been focused on classroom management. She said that because of this and in relation to problems with class schedules and collaboration with other teachers, her teaching has been more conventional than she had hoped for. She did, however, explain that she and the other teachers in her team had weekly rotating stations with different projects for their students. In those, they worked with hands-on assignments, and she believed that this represented quality time for the students and were the "best lessons".

When she finished the course she was full of enthusiasm and good intentions, and what she found most interesting was watching videos of students' discussions in class and explained how they were thinking. As Embla was on leave from work to focus on her studies when she attended the course, she noted that there were many instances that it would have been great to have been teaching at the time. She believes that what she learned was so connected to practice that it is important to be able to incorporate it straight away in the classroom.

Sif's experience

Sif shares that she always tries to approach teaching in a lively and interesting manner. She states: "After the course I was fascinated by the ideas presented there and I wanted to support number sense through play, games and using manipulatives." However, she mentioned that she does not have access to the manipulatives she needs, as in her school "those are only available for the youngest grades, even if older students could also benefit from hands-on work." She explains that she uses different games in her lessons and that she makes an effort to have those accessible.

For Sif, learning about cognitively-based instruction was the highlight of the course and last year she used that in weekly lessons with problem solving. She wants to engage students in discussions about their solutions and says: "I find it remarkable that even when they have difficulties with mathematics, they can explain very well how they find a solution." She explains that in her experience, the students learn from listening to others sharing their solutions. Sif wishes to emphasise problems and discussions more and shares that she would like to learn more about how to create problems that deal with different mathematical concepts.

Sif explains that her main challenge is to work with teachers who are not familiar with these ideas of mathematics education and are not ready to change their way of teaching mathematics. She also mentions that the diversity of the student group is a challenge and that it can be hard to not get too attached to the textbooks. She is clear that she wants all the students to work with the same learning materials, though she emphasises meeting the needs of each and every one. She believes that it is not good if students get stuck in special education away from the class for many years, which she thinks is too common. She shares that sometimes the students lose faith in their abilities, but she explains to them that learning takes time and even if they do not know something, they will always get another chance to learn it better.

Jóna's experience

Jóna is an experienced special educator. She works collaboratively with the class teachers in fourth and fifth grade, some of whom have not taught at this school level before. She sometimes takes a group of students to her classroom but she also works in the students' classroom, although the classroom schedules can be a challenge. Jóna mentions problem solving and discussions as her main learnings from the course. She emphasises flexibility in her practice.

Jóna is concerned that at times the textbooks control the lessons, and she wishes to focus more on curriculum competence criteria from the national curriculum rather than pages in the book. However, she and her co-teachers sometimes do hands-on projects that help students learn and understand concepts better through collaboration, as well as to focus on discussions and problem solving. She shares an example of this: "Recently we did a collaborative project in geometry where the students were to design a case for a rubber. They had to describe the form, measure it, and count small squares." She feels that these kinds of projects are too rare, but these lessons are the ones where the teachers can check whether the students are meeting the curriculum competence criteria.

Jóna states that the students in the special education classroom usually work individually as they are at different places in their mathematics learning, and some are also new to the language. She has tried to have students collaborate and work on problem solving and she wants to have more variety in her teaching.

> "Sometimes I want to discuss a certain topic in mathematics, even if they are not all in the same place. Students have a hard time listening and participating if they are not at the same place. So we give those who are slower a discount, so that they do less. Then we are all able to discuss the same material."

Being at the "same place" seems to refer to where the students are in the textbook, illustrating the fact that the textbook affects the learning process more than the competence criteria of the curriculum.

Findings from the third cycle

Through the findings participants describe how the course has empowered them and gave them inspiration for wanting to employ their learning in school as they reflected on what could be improved and what they wanted to change in their practice. The participants in cycles one and two all mention that the course pushed them to use dialogue in their mathematics classroom. They aspired to emphasise problem solving as a method of learning after studying it in the course. The teachers described how useful and important they had found using manipulatives in the course and wanted to use these in their teaching. They aimed to teach according to their vision and the national curriculum competence criteria but felt that the textbooks often dictated the learning process.

Various challenges were mentioned as participants incorporated the lessons learned from the course into their teaching. The diversity of the student group was a challenge. Another challenge was connected to collaboration with co-teachers, who were inexperienced or had a different view of how to teach mathematics and were not ready to change their teaching practice. Organisational factors were also mentioned as a challenge. These include conflicts in the class schedule, having large groups of students in class and lacking access to manipulatives.

Discussion and conclusion

This action research project has aimed to find an answer to the research question: How can we restructure the course Mathematics for All so that participants are empowered to teach mathematics to diverse groups of learners? The findings show us that overall, the participants have found the course helpful for developing their professionalism and views of teaching mathematics. The participants were clear that the joint learning experience of seeing and valuing the different ways to solve problems assisted them in realising that there are different ways to learn mathematics. Furthermore, to support all students, teachers need to be open to different ideas and solutions and help their students to embrace such a manner of working.

Our interviews with the three teachers, which were help a year after they attended our course, show that they seem to have equity and student access to mathematics at heart as they discuss their practice (Ainscow, 2020; Tan & Torius, 2018). They aim to be responsive and want to express and explain mathematics in various ways

(Roos, 2023; Scherer et al., 2016) and focus on problem solving and discussions about mathematics in class (Boaler, 2016; Lindenskov & Lindhardt, 2020; Luria et al., 2016). However, it seems that the structure and culture of schools restricts their resolve so that their teaching is often based on following the textbooks (Roos, 2019).

In answering our research question on how we can restructure our course with the aim of strengthening teachers' understanding and empowering them to teach mathematics to diverse groups of learners, the findings provided valuable insights. The questionnaire provided us with information on how the participants experienced the course, whereas the interviews shed light on how teachers utilised their learning for their teaching.

The strengths of the course, as our findings unveil, are the elements that empower and inspire participants to make changes in their mathematics teaching. As we restructure the course, we need to make sure these elements are still in place. However, we have learnt that an added focus is needed on how to organise mathematics lessons, with a balance between using textbooks and modelling tasks and methods. The findings have given us an insight into the importance of placing an even stronger emphasis on the role of collaboration, discussions, open problem solving and diverse activities for diverse learners.

According to the findings, participants seem to have adopted a new way of thinking about mathematics teaching and learning. Those teaching in schools intended to make changes in their teaching but encountered various obstacles, as we learned in the second cycle. To support the participants in overcoming these hindrances an assignment is called for where we give them structured feedback on how they can further develop their ideas of teaching in collaboration with others. This assignment could be a reflective journal that runs through the whole course, where participants document their experiences, their successes and challenges. We would then encourage teachers to continue writing this journal after they complete the course to understand and enhance their teaching.

The various structural challenges that teachers face in schools are often not in their power to change and are out of the scope of our course, but nonetheless need to be discussed to enable teachers to develop their teaching practices (Lisenbee & Tan, 2019; Roos, 2019). Thus, we see a need for further research focusing on how teachers are empowered and supported to work in inclusive ways at the school level, with an emphasis on effective, quality mathematics education for all.

References

Ainscow, M. (2020). Inclusion and equity in education: Making sense of global challenges. *Prospects*, *49*, 123-134. https://doi.org/10.1007/s11125-020-09506-w

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Baumfield, V., Hall, E. & Wall, K. (2013). *Action research in education: Learning through practitioner enquiry*. SAGE. https://doi.org/10.4135/9781526402240

Cochran-Smith, M. (2005). Teacher educators as researchers: Multiple perspectives. *Teaching and teacher education, 21*(2), 219-225. https://doi.org/10.1016/j.tate.2004.12.003

Compulsory School Act No. 91/2008. https://www.government.is/media/menntamalaraduneyti-media/media/frettatengt2016/91_2008-Compulsory-School-Act-ENGLISH-Uppfaert-Jan-2017.pdf

Guðjónsdóttir, H. & Kristinsdóttir, J.V. (2006). Teaching all children mathematics: How self-study made a difference. In D. Tidwell & L. Fitzgerald (eds.), *Self-study and diversity,* (pp. 195-212). Brill.

Guðjónsdóttir, H. & Kristinsdóttir, J.V. (2011). Team-teaching about mathematics for all: Collaborative self-study. In S. Schuck & P. Pereira (eds.), *What counts in teaching mathematics, Self-study of teaching and teacher education practices*, (pp. 29-43). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0461-9_3

Guðjónsdóttir, H., Kristinsdóttir, J.V. & Óskarsdóttir, E. (2009). Mathematics for all: Working with teachers. In K. Linnanmäki & L. Gustafsson (eds.), Different learners – different math? (pp. 273-284). *Proceedings of the 4th Nordic Research Conference of Special Needs Education in Mathematics.*

Kasemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk: How to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.

Lindenskov, L. & Lindhardt, B. (2020). Exploring approaches for inclusive mathematics teaching in Danish public schools. *Mathematics Education Research Journal, 32*, 57-75. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00303-z

Lisenbee, P.S., & Tan, P. (2019). Mentoring novice teachers to advance inclusive mathematics education. *International Journal of Whole Schooling, 15*(1), 1-27.

Luria, S., Sriraman, B., & Kaufman, J. (2017). Enhancing equity in the classroom by teaching for mathematical creativity, *ZDM*, *49*(7), 1033-1039. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0892-2

McNiff, J. (2013). *Action research: Principles and practice*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203112755

Ministry of Education, Science and Culture. (2014). *The Icelandic national curriculum, guide for compulsory schools – with subject areas.* https://www.government.is/library/01-Ministries/Ministry-of-Education/Curriculum/adalnrsk_greinask_ens_2014.pdf

Moore, J. (2005). Transformative mathematics pedagogy: From theory to practice, research, and beyond. In A.J. Rodriguez & R.S. Kitchen (eds.), *Preparing mathematics and science teachers for diverse classrooms*. Lawrence Erlbaum.

Óskarsdóttir, E. & Guðjónsdóttir, H. (2004). How are special education teachers prepared to teach mathematics? In A. Engström (editor), *Democracy and participation: A challenge for special* *needs education in mathematics* (pp. 239-248). Conference proceedings from NORSMA 2 in Örebro, October 2003.

Roos, H. (2019). *The meaning(s) of inclusion in mathematics in student talk: Inclusion as a topic when students talk about learning and teaching in mathematics*. (unpublished PhD dissertation) Linnaeus University Press. https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:lnu:diva-82397

Roos, H. (2023). Students' voices of inclusion in mathematics education. *Education Studies Math 113,* 229-249. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10213-4

Scherer, P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L., & Opitz, E.M. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: How can research support practice? *ZDM 48*, 633-649. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0800-1

Scherer, Petra, and Jennifer Bertram. (2024). Professionalisation for inclusive mathematics—teacher education programs and changes in pre-service teachers' beliefs and self-efficacy. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01580-0.

Siðareglur háskólanna um vísindarannsóknir. (2020). [Ethics guidelines for universities for scientific research] https://www.hi.is/sites/default/files/ame18/reglur_sidanefnd_hv_5_nov_2020.pdf

Tan, P., & Thorius, K.K. (2018). En/countering inclusive mathematics education: A case of professional learning. *Mathematics Teacher Educator, 6*(2), 52-67. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.6.2.0052

Valero, P., Meaney, T., Alrø, H., Fairhall, U., Skovsmose, O. & Trinick, T. (2008). School mathematical discourse in a learning landscape: Understanding mathematics education in multicultural settings. *Nordic Studies in Mathematics Education, 13*(4), 69-94.

Yeh, C., Ellis, M.W., & Hurtado, C.K. (2017). *Reimagining the mathematics classroom: Creating and sustaining productive learning environments, K-Grade 6*. NCTM

Dansk abstract

Formålet med denne pædagogiske aktionsforskning var at forstå hvordan man kan omstrukturere kurset matematik for alle, et kursus der undervises i på kandidatniveau på Islands Universitet. Data blev indsamlet og analyseret tematisk og cyklisk via et åbent spørgeskema ved afslutningen af kurset og via individuelle interviews et år senere. Resultaterne viser at kurset påvirkede deltagernes forståelse af matematikundervisning og deres professionalisme. De interviewede deltagere var i stand til at bruge problemløsning og diskussioner i deres klasseværelse, men stod over for udfordringer og havde brug for løbende støtte til at implementere deres læring i klassen.

Implementera en språklig teori för innehållsinkluderad matematikundervisning


Cecilia Segerby,
Högskolan Kristianstad


Christina Svensson,
Högskolan Kristianstad

Abstract: *Forskare betonar vikten av att arbeta språkutvecklande i alla ämnen, vilket är särskilt viktigt i Sverige då matematikämnet domineras av enskilt arbete. I studien har tre mellanstadielärare identifierat decimaltal som utmanande för elever i åk 4. Två forskninglektioner har utifrån detta utformats av lärarna och två forskare med utgångspunk i en Learning study för att utveckla elevernas förståelse för decimaltal. Språkteorin Systemisk Funktionell Lingvistik har bidragit i både designen av lektionerna och som analysverktyg. Studiens resultat visar på vikten av att noga välja ut vilka begrepp, representationsformer, elevaktiviteter samt frågeställningar, som blir avgörande för att skapa en innehållsinkluderad matematikundervisning, dvs riktat fokus på att främja alla elevers kunskapsutveckling, gällande decimaltal.*

Introduktion

Forskning understryker språkets centrala roll i olika ämnesområden, där lärares förmåga att stödja elevers språkutveckling är avgörande för deras lärande (Alatalo, 2015). Trots detta rapporterar många matematiklärare att de saknar kunskap i effektiva språkstödjande typer av undervisning (Teledahl, 2016). Detta är problematiskt eftersom användandet av språket är nära relaterat till elevernas matematiska förmåga samt att lärarnas kunskaper och kompetens är de viktigaste faktorerna för att stödja elevernas utveckling och lärande. I Sverige domineras matematikundervisningen av individuellt arbete i matematikböckerna (Roos, 2020), och den muntliga kommunikationen begränsas oftast till lärarledda instruktioner och uträkningar utan möjlighet till elevinteraktion (Hiebert & Grouws, 2006). Dock används även kommunikationsformen initiering–respons-utvärdering (IRE) där läraren ställer slutna frågor med förutbestämda svar som sedan utvärderas av läraren (Gibbons, 2006), vilket begränsar elevernas möjlighet till att utveckla sina resonemang. Öppna frågor som främjar djupare tänkande är sällsynta, trots att de kan berika matematikundervisningen (Sullivan & Lilborn, 2002) och bidra till en mer inkluderande undervisningskultur.

Tidigare forskning visar på att ett framgångsrikt tillvägagångssätt för att nå en förändring av rådande arbetssätt är att lärare och forskare samarbetar i cykliska processer kring lärares egna ställda problemformuleringar (Marton, 2014; Segerby, 2017; Svensson, 2022). Detta samarbete är då baserat på vetenskapliga teorier för undervisningsutveckling. Studien i denna artikel är en del av ett skolutvecklingsprojekt som fokuserar på att förbättra elevernas matematikkunskaper genom att involvera lärarna i gemensam professionell undervisningsutveckling baserad på Learning Study (LS)-metoden (Marton, 2014). Ämnesinnehållet som behandlas i denna artikel är decimaltal som definierats som problematiskt av tre mellanstadielärare på en skola i södra Sverige. Decimaltal är en viktig grundsten inom matematiken, som i tidigare forskning (Björk m.fl., 2019; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Venenciano m.fl, 2015) identifierats vara en utmaning i matematikämnet för alla elever. (Manzzocco & Devin, 2008). Det har dock visat sig vara speciellt utmanande för elever som befinner sig i matematiksvårigheter att korrekt kunna namnge samt storleksordna decimaltal. Ni och Zhous (2005) menar på att elevers utveckling av decimaltal inte enbart är en fråga om samspel mellan deras tidigare kunskaper och ny kunskap utan också en fråga om hur kunskap och tänkande om tal utvecklas. Eleven behöver även utveckla förståelse gällande sambanden mellan naturliga och rationella tal genom att inse att talens uppbyggnad utgår från samma strukturer (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Det kan innebära att få syn på talens värde genom positionsförflyttningar till höger respektive vänster om decimaltecknet (Björk m.fl., 2019). Vissa kritiska aspekter kan dock uppenbara sig vid utvecklad förståelse av talens gemensamma struktur som läraren behöver beakta i sin undervisning. Utifrån tidigare studier framgår det att konceptuell förståelse grundas i att eleven utvecklar förståelse om hur tals mindre enheter utvecklas i det oändliga. I undervisningen kan till exempel mätning i form av tiondelar och hundradelar i olika talbaser stödja elevers utvecklade förståelse för rationella tal (Venenciano m.fl, 2015). Det innebär med utgångspunkt i tidigare studier att detta matematikinnehåll är ett komplext område som behöver behandlas i relation till alla elevers visade för- och efterkunskaper.

I denna studie har lärarna tillsammans med forskare (författarna till artikeln) konstruerat för- och eftertest samt genomfört två forskningslektioner med syfte att förbättra årskurs 4 elevernas kunskaper om decimaltal. Ingen av eleverna i klassen har svenska som förstaspråk och det innebär att eleverna behöver lära sig både svenska och matematikkunskaper parallellt. I denna studie har LS-metoden kombinerats med den språkliga teorin Systemisk Funktionell Lingvistik (SFL) (Halliday & Hasan, 1985) för att främja innehållsinkluderad undervisning. Det innebär ett riktat fokus på undervisningens innehåll där språket är i fokus för att främja alla elevers kunskapsutveckling.

Detta är väsentligt då tidigare forskning (Ahlholm & Portaankorva-Koivisto, 2018) visar på att kunskapsbrister i undervisningsspråket anses vara en betydande faktor för att förhindra låga prestationer i matematiken bland andraspråkselever. I Smiths m.fl. (2023) studie med andraspråkselever i åk 5 och 8 implementerades språkliga aspekter i matematikundervisningen, vilket bidrog till att utveckla elevernas kommunikationsförmåga och därmed deras matematiska kunskaper. Vidare framhåller Truxaw och Rojas (2014) vikten av att utgå ifrån olika språkliga resurser i matematikundervisningen för att skapa mening gällande de matematiska begreppen. Med utgångspunkt i tidigare studier för att främja alla elevers kunskapsutveckling syftar studien till att bidra med kunskaper om hur cykliska processer baserat på språkliga teorier möjliggör innehållsinkludering för alla elever i en årskurs 4 gällande decimaltal. Det har föranlett följande problemformulering för vår studie:

> *Hur kan lektionsdesignen, där språkliga aspekter implementeras i undervisningen, bidra till alla elever i en årskurs 4 får kunskapsutveckling av decimaltal?*

Teori

Systemisk Funktionell Lingvistik (SFL) är en språkteori, där språket anses vara en resurs som människor använder för att uttrycka meningsskapande i ett specifikt sammanhang (Halliday & Hasan, 1985). Målet är att förklara, inom en given kulturell och social kontext, vad människor menar och hur de använder sina språkliga resurser för att uttrycka detta. Den kulturella kontexten relaterar till speciella antaganden och förväntningar, exempelvis gällande matematikbokens, matematiklärarens och elevernas roller under matematiklektionerna.

Den sociala kontexten utgår ifrån att varje text handlar om något (ideationella metafunktionen), är adresserad till någon (interpersonella metafunktionen) och bygger på textens struktur (textuella metafunktionen) (Halliday & Hasan, 1985). Ideationella metafunktionen hänvisar till vad som händer, det vill säga vad det är som deltagarna är engagerade i, där valet av begrepp relevanta för kontexten är i fokus, vilket i denna studie berör decimaltal. Interpersonella metafunktionen utgår ifrån vem som deltar och vilka roller och status de har samt vilken typ av relationer som uppstår mellan deltagarna (Halliday & Hasan, 1985). Frågeställningar, dvs vad de syftar till för djupare resonemang eller förutbestämda svar samt val av personliga pronomen, blir i denna studie centrala. De personliga pronomen som "du" och "jag" identifierar de (-n) huvudsakliga aktörerna (Herbel-Eisenmann, 2007). Textuella metafunktionen utgår ifrån konstruktionen av texten och vad den förmedlar och om det är sammanhängande eller ej för att skapa förståelse (Halliday & Hasan, 1985). I denna studie utgår den textuella metafunktionen ifrån olika representationer, exempelvis konkreta material såsom 1000-kuber och 100-rutor, och abstrakta som att exempelvis skriva 0,23, och hur de individuellt, men även tillsammans, bidrar till att göra de matematiska begreppen begripliga och hanterbara för eleverna gällande decimaltal.

Metod

Studien utgår ifrån en skola i ett socioekonomiskt utsatt område, där måluppfyllelsen i matematikämnet är mycket låg, och ingen av eleverna har svenska som förstaspråk. I projektet ingår tre åk 4-6 lärare, elever i åk 4, två forskare (författarna till artikeln) samt en skolledare. Lärarna har identifierat decimaltal som ett problematiskt område gällande elevernas förståelse bland annat genom att utgå ifrån resultat ifrån diagnosmaterialet "Förstå och använda tal" (McIntosh, 2020). Klassen som studien utfördes i består av tolv fjärdeklassare, där klassläraren identifierat matematiksvårigheter hos fyra av eleverna.

Genomförande och bearbetning

Vi, lärare och forskare, har med utgångspunkt i samarbetsmetoden LS (Marton, 2014) tillsammans konstruerat egna för- och eftertest (inspirerat av McIntosh, 2020), planerat, genomfört och värderat hur det matematiska innehållet decimaltal har urskilts av de deltagande eleverna i studien. För- och eftertest (se bilaga 2) omfattas av positionssystemet med fokus på decimaltal; tiondelar, hundradelar och tusendelar samt uttryckta enhetsomvandlingar i decimaltal för m, dm och cm för en årskurs 4.

Det teoretiska verktyget SFL har använts vid lektionsplanering och även vid efterföljande analys av lektion, vilket har korrelerats tillsammans med resultaten för det genomförda för- och eftertestet. Datainsamlingen utgörs av två inspelade forskningslektioner, 48.53 min respektive 49.27 min, samt ett för- och två eftertest ifrån 12 av eleverna. Skriftliga samtycke har samlats in i enlighet med Helsingforsdeklarationen och Vetenskapsrådets principer har följts (Vetenskapsrådet, 2017). Ingen datainsamling skedde gällande de elever i klassen som inte samtyckt till studien. Upplägget av forskningslektionerna finns sammanställt i bilaga 1. Studiens analysmetoder följer en progressionslogik enligt nedanstående figur 1.

Figur 1. *Översikt över analysmetoder*

Studiens analys följer en progressionslogik i fem steg. Två analysmetoder, kvalitativ- och kvantitativ ansats, har använts i de fem olika stegen. Första steget utgörs av det konstruerade förtestets sammanställning både på gruppnivå och individnivå samt beräknat medelvärde. Andra steget som består av en kvalitativ ansats ingår analys av den första planerade och genomförda forskningslektionen. Det tredje steget utgörs återigen av en kvantitativ ansats som består av sammanställning av genomfört eftertest både på grupp och individnivå samt beräknat medelvärde. Det fjärde steget består återigen av en kvalitativ ansats som består av den andra planerade och genomförda forskningslektionen. Slutligen genomförs ett sista eftertest som i femte steget består av en kvantitativ ansats utifrån ett beräknat medelvärde. För- och eftertest i samtliga steg består av samma sex uppgifter. Resultaten från förtest, eftertest och de två forskningslektionerna bygger på varandra och leder till den slutliga analysen. Den slutliga analysen utgår ifrån SFLs (Halliday & Hasan, 1985) ideationella, interpersonella och textuella metafunktioner för att besvara studiens syfte och frågeställning.

Resultat och analys

En sammanställning över resultaten av testen presenteras inledningsvis vilken följs av resultaten ifrån de två forskningslektionerna. En gemensam analys med utgångspunkt i SFL avslutar denna del.

Resultat av för- och eftertest

Tabell 1. *Sammanställning över resultaten av för- och eftertest 1 och 2.*

N=12	Resultat Decimaltal						
Uppgifterna	1a	1b	1c	2	3	4	Medelvärdet i klassen
Förtest (totala antalet elever med rätt svar på uppgiften)	4	1	1	3	3	0	1/6
Eftertest 1 (totala antalet elever med rätt svar på uppgiften)	**10**	**9**	**9**	**9**	**9**	4	**4,55/6**
Eftertest 2 (totala antalet elever med rätt svar på uppgiften)	10	**12**	9	**12**	**12**	**9**	**5,33/6**

fetstil=signifikant förbättring

Resultat av forskningslektionerna

Både lektion 1 och lektion 2 är indelade i tre delar (se bilaga 1) där lektionsdesignen är baserad på ideationella metafunktion i relation till matematiska begrepp och textuella i relation till matematiska representationer. Läraren har i excerpten förkortningen L och elevgruppen har förkortningen E. *Lektion 1*

I följande excerpt går det att urskilja hur läraren presenterar sambanden mellan hur vi läser ut skrivna heltal och decimaltal på tavlan (framme i klassrummet) i början av lektionen.

Excerpt 1: (06.15)

L: Tiondel, precis. Bra att du rättade det. Tiondel. Så man kan också säga så här, 7 876 och fyra tiondelar. Så kan man säga. Eller så kan man säga som x sa, 7 876,43. Hade det stått så här då, hur skulle vi ha sagt det här då? (visar på annat tal där siffran 4 byter position åt vänster).

Läraren fortsätter att rikta elevernas uppmärksamhet mot tavlan i följande excerpt. Det genom att fokusera på talens värde genom att namnge siffrans position som talsort i riktning vänster (heltal) och höger (decimaltal).

Excerpt 2: (07.15)

L: Nej, det finns inga endelar, utan ental. Den här siffran, den enda av de här talsorterna som börjar på en. Annars så är det ... Så detta är starten för allting, kan man säga, ental är starten. Sen framför entalen, vilken kommer sen?

E: Tiotal.

L: Där har vi tiotal. Efter entalet och efter decimaltecknet, vilken talsort har vi där?

E: Tiondelar.

L: Ja.

L: Nästa siffra, den här, vilken talsort är den?

E: Hundratal.

L: Hundratal, precis.

L: Och vilken talsort är då det du tänker?

E: Hundradel.

L: Ja, precis. Och nu har vi en siffra här till, vilken talsort är det?

E: Tusental.

L: Om vi nu tittar här ... Jag skulle haft en annan penna egentligen. Sexan här, det var ju ental, och starten lite grann på allting kan man säga. Och framför före entalet har vi tiotal. Precis efter entalet och decimaltecknet har vi en tiondel. Tio, tio. Sen hundra hundratal hundradel. Tusental, tusendel. Tusen, tusen. Ser ni vad det är som händer?

I nästa del av lektionen fortsätter läraren att rikta uppmärksamheten mot tavlan. Däremot behandlar läraren nu sambanden mellan heltal och decimaltal genom att utgå från flera representationer än enbart siffersymboler. Läraren ritar upp rektangulära plattor som delas in i tio respektive hundra delar. Dessa plattor färgläggs beroende av siffrans placering till höger om decimaltecknet samt siffrans värde (position). Hundradelar representeras ytterligare genom cirkulära rödfärgade kartongbitar.

Excerpt 3 (18.22)

L: Ja, det låter bra. Hundradelar. Om jag då tar såna röda, hur många såna röda skulle jag ha på den här om det var det här talet (0,04)?

L: Hur många bitar ska jag måla då? Hur många bitar ska jag måla?

E: Fyra.

I tredje delen väljer läraren att visa en film som ska anknyta decimaltal till en vardagskontext genom att mäta längd. Filmen startar med att en person hoppar ett längdhopp som ska mätas och anges som ett decimaltal uttryckt i meter.

Excerpt 4 (25.48)

L: Hur långt det är. En sträcka. Vad tänker E? (inget svar från eleven)

Två, eller kanske tre meter. Någonstans mellan två och tre meter är det. Men finns det verkligen inga tal mellan två och tre, så att vi kan bestämma längden lite mer exakt? (inga svar från eleven) Vi får kika på tallinjen.

Läraren stannar filmen och visar på tallinjen som i filmen utgör en representation för ett formellt mätobjekt.

Excerpt 5 (28:12)

L: Här ser vi en tallinje med heltalen 0 till 5. Mellan varje heltal finns små streck. Vad är det för tal som ligger mitt emellan två heltal? 0,5 Vilket tal kommer före och efter?

Läraren försöker att koppla mätningen av längdhoppet till tallinjen som i filmen utgör en representation för att visa på sambandet mellan mätning uttryckt i decimalform med siffror. Till en början försöker läraren knyta strecken till andra uttrycksformer inom mätning för att längdhoppet ska bli mer exakt och inte uttryckas enbart i meter. När läraren inte får något gehör ifrån eleverna hamnar istället fokus på talens inbördes relationer utifrån storleksordning genom frågor om vilket tal som kommer före och efter.

Lektion 2

Läraren håller en kort repetition från första forskningslektionen gällande sambandet att skriva heltal och decimaltal för att aktualisera elevernas förkunskaper. Det genom att återigen skriva ett decimaltal på tavlan.

Excerpt 6 (10.02)

> L: Varför heter det tal framför decimaltecknet, och del bakom?
> E: För att tal är en heltal och del är inte heltal.
> L: Exakt, precis. Så här är de hela talen, men här efter, då har vi delar av tal bara. Vi har inga hela tal längre, utan då har vi delat upp talet i mindre bitar. Här har vi då delat upp det i hundra små bitar, och så har vi valt en. Är ni med? /…/ Vad har vi för tal mellan 4 och 5?
> E: 4,5
> L: Hur tänker du?

I nästa del av lektionen använder läraren återigen rektanglar som plattor som delas in i rutor som representation för tiondelar samt hundradelar.

Excerpt 7 (24:51)

> L: Här har jag delat upp ett tal, här i hundra delar och här i tio delar. Så hundradelar och tiondelar. Ritar platta (med 100 delar på tavlan och en med 10 delar). Delar upp ett tal i 100 delar och ett i 10 delar. Skriver därefter tre tal; 0,4, 0,52 och 0,134, på tavlan och delar ut papper med plattor till eleverna. Eleverna fyller i plattorna utifrån de tre talen.
> (26: 55) L: Nu vill jag att ni ska storleksordna talen. Jag vill att man tänker för sig själv. Man ska ta det största talet först, och sen är det nästa. Det som kommer efter det, och det minsta. Då har ni tre tal. Jag skulle vilja höra, vilket tal tänker du är det största av de här tre?
> Då tittar vi först. Nollan är exakt samma i alla talen, eller hur? Sen har vi decimaltecken där, och samma sak på alla tre talen. Sen har vi hundratal efter det. Vilken siffra är störst, fyra, tre eller?
> E: Fyra
> L: Precis.
> L: Då tittar vi på nästa siffra. Man kan nog i och för sig börja med den här.

I sista avslutande delen av forskningslektion 2 relaterar läraren hundraplattan förutom tiondelar och hundradelar även till en rektangulär pizza.

Excerpt 8 (29:45)

> L: Vem får störst pizza?

L: Vilka former känner ni till att ni kan skriva tal i? Vad kallas den här formen som ni har på tavlan?
L: Är det bråkform? Decimaltal. Det är former. Men vi jobbar med det också, så formen också. Du sa bråkform. /…/ En siffra här, pratar vi om tiondelar. Är det två siffror här, då pratar vi om hundradelar. Är det tre siffror pratar vi om /…/
(34:11) L: Hur ritar jag talet. Hur ritar jag 0.2 eller två tiondelar (2/10) i det här fallet. Samma tal. Det är bara tre olika sätt, men det är samma tal. (Talet representeras på tre olika sätt, bråkform, decimaltal och hur det läses ut. …
L (47:30) Här har vi tre tiondelar, och sen så målade vi 30 hundradelar. Hur mycket är målat på de här plattorna? Hur tänker du, E?
E: Där har du målat tre, där har du målat 30.
L: Precis. För alltså är 30 hundradelar exakt lika mycket som tre tiondelar.

Analys

Analys av förtest

Resultatet visade på en begränsad förståelse hos eleverna av decimaltal gällande tiondelar, hundradelar och tusendelar samt hur de förhåller sig till varandra, vilket framgår i tabell 1, uppgift 1a, b och c. Endast ett fåtal elever visade på förmågan att storleksordna decimaltal med olika antal decimaler (se tabell 1, uppgift 2 och 3). Ingen elev kunde korrekt koppla ihop decimaltal till längdenheter (se tabell 1, uppgift 4). Medelvärdet på förtestet visade på 1 av 6 möjliga (se tabell 1).

Ideationella metafunktionen

I första lektionen var fokus på jämförelsen mellan heltal med decimaltecken samt diskutera talsorterna; ental, tiotal, hundratal, tiondelar och hundradelar, och dess värde, se excerpt 1, 2 och 3. Dessa centrala begrepp relaterar till *SFLs ideationella metafunktion* som utgår ifrån hur text förmedlar mening genom att beskriva vad texten handlar om i en speciell kontext där relevanta begrepp är i fokus (Halliday & Hasan, 1985). För att förtydliga relationen mellan olika talsorter visade läraren även på ett mönster gällande positionerna i ett tal. Läraren relaterade med detta då tiotal direkt till vänster om ental och tiondelar direkt till höger och liknande kopplingar gjordes samtidigt till hundratal / hundradelar, se excerpt 2. Efter denna lektion visade eftertestet på en signifikant förbättring i elevernas förmåga att lösa uppgifterna 1a, b och c, se tabell 1, eftertest 1. Vidare behandlades begreppet "sträcka" i en film under detta pass, där längd kopplades ihop med decimaltal, se excerpt 4. Enheterna m, cm och dm behandlades, men inga tydliga kopplingar till decimaltal gjordes. Läraren valde istället att fokusera på en tallinje, där relationen mellan närliggande tal med fokus på före och efter olika decimaltal utifrån olika streck på tallinjen visades, se excerpt 5. Eftertest 1 visade på att efter lektionen hade flertalet av eleverna förbättrat sin förståelse för att storleksordna decimaltal, se tabell 1, uppgift 2 och 3, men fortfarande var det få som kunde koppla samman längd uttryckt med decimaltal, se, tabell 1, eftertest 1 uppgift 4.

Den andra forskningslektionen inleddes med en repetition av centrala begrepp kring decimaltal från den första lektionen, vilket aktiverade elevers förkunskaper, se excerpt 6. Lektionen fördjupade förståelsen för att storleksordna decimaltal baserat på deras inbördesrelation, med särskilt fokus på tal som inleds med 0, följt av varierande antal siffror, exemplifierat i excerpt 7. Läraren kopplade sedan ihop bråkform med decimaltal gällande 2/10 och 0,2, se excerpt 8. Läraren representerade sedan 1 hel i tiondelar och hundradelar med de rektangulära plattorna där 3 tiondelar och 30 hundradelar färglades. Denna metod klargjorde sambandet mellan talsorterna, vilket bidrog till att synliggöra att de är lika stora. Efter denna lektion visade eftertestet att samtliga av eleverna nu behärskade att storleksordna tal, se tabell 1, eftertest 2, uppgift 2 och 3.

Interpersonella metafunktionen

Det verbala språket som omfattas av valet av frågor och personliga pronomen relaterar till *SFLs interpersonella metafunktion*, där relationer mellan deltagare är i fokus (Halliday & Hasan, 1985). Valet av frågor blir därmed väsentliga, men även vilka personliga pronomen som används då de utgår ifrån vem som är huvudaktören (Herbal-Eisenmann, 2007). Under första lektionen framkom frågor såsom "Hur många" Vilken kommer sen?" och "Hur många", "Vilken talsort?", se excerpt 1, 2 och 3, och det personliga pronomenet "jag" användes frekvent i frågeställningarna, vilket betonar lärarens roll som huvudaktör, se excerpt 3. Frågorna är mestadels slutna med förutbestämda svar. Vid andra forskningslektionen framkom andra former av frågor. Dessa utgick bland annat ifrån en övning som eleverna utfört självständig och följande öppna frågor ställdes: "Vilket tal tänker du på?", se excerpt 6, och "Hur tänker du?", se excerpt 7. Detta skiftade fokus mot elevernas tankar och inkluderade dem som huvudaktörer genom användningen av "du" där nu öppna frågor används mer frekvent.

Textuella metafunktionen

Textuella metafunktionen relaterar till hur texten (innehållet) presenteras (Halliday & Hasan, 1985). Under första lektionen användes flera olika representationsformer såsom konkret material som illustrerade decimaltal med hjälp av en 100-platta som symboliserade 1 och röda brickor som symboliserade hundradelar, se excerpt 3 samt en bild på decimaltal kopplade till olika talsorter (bild och abstrakt), se excerpt 1 och 2. Slutligen användes en film, se excerpt 4, som representationsform där längdenheter och decimaltal kopplades ihop, men den bidrog inte till att öka elevernas förståelse för decimaltal, som framgår i eftertest 1, uppgift 4 i tabell 1. Dock bidrog användandet av en tallinje i filmen till att tydliggöra decimaltalens inbördesrelationer gällande vad som kommer före respektive efter, se excerpt 5. Vid andra forskningslektionen synliggjordes skillnaderna mellan tiondelar och hundradelar visuellt genom att läraren ritar upp två likadana rutor, där den ena delas in i tiondelar och den andre i hundradelar, se excerpt 7. Detta bidrog till att samtliga elever besvarade 1b korrekt i eftertest 2, se tabell 1. Sambandet mellan bråktal och decimaltal diskuterades sedan vilket följdes av en praktisk övning där eleverna delade in en rektangulär pizza i tiondelar, se excerpt 8. Det resulterade i att majoriteten av eleverna klarade uppgift 4 (se tabell 1) och kunde därmed överföra decimaltal till en annan kontext

Diskussion

Tidigare studier har identifierat bristen på, och behovet av, tillvägagångssätt för att ta itu med praktiska problem, utveckla lösningar och uppnå värdefulla mål inom utbildningsvetenskaplig forskning (Segerby, 2017; Svensson, 2022). I denna studie utgörs problemområdet av förståelsen för decimaltal och hur lärarna kan arbete språkutvecklande för att främja elevernas förståelse kring detta begrepp. Tillsammans med forskare implementerades språkteorin Systemisk Funktionell Lingvistik genom LS-metoden. Resultatet av elevernas kunskapsutveckling om decimaltal ökade signifikant ifrån 1,0 på förtestet till 4,55 efter första forskningslektionen och till 5,33 efter andra forskningslektionen. Detta berodde på flera anledningar i lektionsupplägget, där SFL bidrog till att både utveckla samt synliggöra kritiska aspekter i lektionsdesignen.

Ideationella metafunktionen

SFLs ideationella metafunktion utgår ifrån hur text förmedlar mening genom att beskriva vad texten handlar om i en speciell kontext, där relevanta begrepp är i fokus (Halliday & Hasan, 1985), vilket i denna studie relaterar till området decimaltal med fokus på talsorterna. I den här studien visade läraren inledningsvis skillnaden mellan heltal och decimaltal, där talsorterna hundratal, tiondel, ental, tiondelar diskuterades. Ett mönster presenterades även som visade på bland annat tiotals och tiondelars positioner i relation till entalet i ett decimaltal. Initialt i andra lektionen repeterades innehållet ifrån första forskningslektionen gällande bland annat sambanden mellan naturliga och rationella tal (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Att aktivera förkunskaper är väsentligt så att ny kunskap kan bindas ihop med tidigare kunskap och på så sätt främja kunskapsutveckling. Detta var dock inte tillräckligt för att utveckla kunskaper om decimaltal utan det krävdes även att eleverna erbjöds att få syn på talens strukturer (Ni & Zhou, 2005), vilket först skedde i andra forskningslektionen. Det ledde till att alla elever i studien klarade av att storleksordna talen i eftertestet, vilket i tidigare studier visat sig vara en svårighet för elever med matematiksvårigheter (Manzzocco & Devin, 2008).

Interpersonella metafunktionen

I studien framkom hur lärares val av frågor påverkar elevernas möjligheter att utveckla sitt tänkande inom matematik, specifikt gällande decimaltal. Initialt dominerade IRE-mönster där läraren styrde genom slutna frågor och personliga pronomen "jag", vilket begränsade elevernas konceptuella förståelse. Dessa slutna frågor, som oftast används i matematikundervisningen (Gibbons, 2006), hade förutbestämda svar och fokuserade inte på elevernas tänkande. Vid den andra lektionen skedde en betydande förändring då öppna frågor och pronomenet "du" blev vanligare, vilket flyttade fokus ifrån läraren till eleven (Herbal- Eisenmann, 2007). Denna förskjutning visar på vikten av att utmana elevernas förståelse genom frågor som främjar utforskande tänkande, vilket är i linje med tidigare forskningsresultat (Ni & Zhou, 2005; Sullivan & Lilborn, 2002), som betonar öppna frågors betydelse för matematiskt lärande. Lärarens val av frågor blir därmed oerhört väsentliga eftersom dessa formar klassrumsmiljöns kognitiva möjligheter för eleverna att utveckla sitt tänkande (Sullivan & Lilborn, 2002). Vidare utgör frågorna grunden för vad matematik handlar om och vilken kunskap som efterfrågas (Hiebert & Grouws, 2006).

Textuella metafunktionen

I denna studie framkommer betydelsen av att använda olika matematiska representationer för att synliggöra talens strukturer i syfte att förbättra förståelsen av decimaltal, vilket även tidigare forskning visar på (Björk m.fl., 2019; Venenciano m.fl., 2015). Genom att använda tioplattor och hundraplattor lyckades läraren synliggöra sambandet mellan olika decimalers inbördes relationer, vilket ledde till positiva resultat i elevernas lärande. Första lektionen fick eleverna inte själva arbeta med respektive representationsform, vilket tidigare forskning (Ni & Zhou, 2005) visat på är avgörande för att eleverna ska utveckla förståelsen för decimaltal. Att koppla ihop längdenheter med decimaler förespråkas även i tidigare forskning (Venenciano m.fl., 2015) för att utveckla elevernas kunskaper gällande decimaltal. Under första lektionen visades även en film där sambanden mellan decimaltals tiondelar och hundradelar med centimeter och decimeter inom längd med stöd av 10 bas synliggjordes. Läraren behandlade dock inte detta samband. Det resulterade i att få elever i eftertest 1 kunde överföra denna kunskap till uppgift 4. I den andra lektionen infördes representationer som visade på tiondelars och hundradelars relationer på ett tydligare sätt, där kopplingar till bråktal gjordes tillsammans med praktiska övningar med pizzabilder som skulle delas i tiondelar. Detta tillvägagångssätt bidrog till att eleverna kunde applicera sina kunskaper på nya sätt, där resultatet visade på en ökad förståelse för decimaltalens egenskaper, vilket understryker vikten av att vilja och implementera samt behandla lämpliga representationsformer i matematikundervisningen för att främja djupare förståelse och kunskapsutveckling bland eleverna. Att arbeta med språket och olika språkliga resurser bidrog i denna studie till att utveckla elevernas förståelse för decimaltal. vilket även framkommer i Smiths m.fl. (2023) studie samt som Truxaw och Rojas (2014) betonar vara framgångsrikt i synnerhet för att utveckla flerspråkiga elevers matematikkunskaper.

Implikationer, begränsning, och förslag på fortsatt forskning

Denna studie framhäver hur lärarnas egna problemformuleringar, kombinerat med användningen av SFL, för- och eftertester relaterade till lektionsdesignen, har bidragit till att öka förståelsen för hur en innehållsinkluderad undervisning om decimaltal kan vara utformad. Den belyser även vikten av språkliga aspekter, där SFL används (Halliday & Hasan, 1985), för att förbättra undervisningens kvalité när undervisningen idag framförallt utgår ifrån individuellt räknande i matematikboken (Roos, 2020). Detta känns väsentligt att implementera språkliga aspekter i matematikundervisningen, då tidigare forskning (Ahlholm & Portaankorva-Koivisto, 2018) visat på att just bristande kunskaper kring undervisningsspråket är en huvudorsak till låga prestationer i matematiken bland elever med annat modersmål. Studien utgör därmed en relevans för praktiken, eftersom många lärare upplever svårigheter att språkligt stödja sina elever i matematiken (Teledahl, 2006), vilket är kritiskt då lärarkompetensen har en avgörande roll för elevers lärande. Framgångsfaktorer i lektionsdesignen i denna studie utgjordes av didaktiska val gällande begrepp, representationsformer, frågeställningar, användning av personliga pronomen samt aktiviteter som engagerade eleverna i deras eget lärande.

Studien är dock begränsad i omfattning (endast tolv elever) och ytterligare forskning krävs för att förstå effekten av dessa lektionsdesigner gällande elevers kunskapsutveckling i allmänhet om decimaltal. En uppföljning med ett senare eftertest skulle kunna ge ökade insikter i huruvida elevernas kunskaper om decimaltal är bestående eller ej. Även att skala upp studien med fler elever samt kontrollgrupper skulle kunna ge fler insikter om huruvida elever med just matematiksvårigheter främjas av ett riktat fokus på behandling av det matematiska innehållet i relation till deras kunskapsutveckling.

Referenser

Ahlholm, M., & Portaankorva-Koivisto, P. (2018). The language factor–what exactly is it? Bilingual speakers of Russian and Finnish solving mathematical tasks. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *23*(3-4), 81-103.

Alatalo, T. (2015). Professional Content Knowledge of Grades One – Three Teachers in Sweden for Reading and Writing Instruction: Language Structures, Code Concepts, and Spelling Rules. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60* (5), *1-23*.

Björk, M., Nikula, Å., Stensland, P., & Stridfält, A. (2019). Tecken på teoretiskt tänkande om strukturer i bassystemet. *Forskning om undervisning och lärande*, 7(2), 26-49.

Gibbons, P. (2006). *English Learners' Academic Literacy and Thinking*; NH Heinemann: Porthsmouth, UK, 2006.

Halliday, M.A.K., & Hasan, R. (1985). *Language, context, and text: Aspects of language in a social-semiotic perspective*. Oxford: Oxford University Press.

Herbel-Eisenmann, B.A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 344-369.

Hiebert, J., & Grouws, D.A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*; Lester, F.K., Ed.; Information Age Publishing Inc.: Charlotte, NC, USA, 2007; pp. 371-404.

McIntosh, A. (2020). *Förstå och använda tal: en handbok*. (Upplaga 2). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

Mazzocco, M.M., & Devlin, K.T. (2008). Parts and 'holes': gaps in rational number sense among children with vs. without mathematical learning disabilities. *Dev Sci,11*(5), 681-91. doi: 10.1111/j. 1467-7687.2008.00717.x. PMID: 18801123.

Ni, Y., & Zhou, Y.D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational psychologist*, *40*(1), 27-52.

Roos, H. (2020). *Inkluderande matematikundervisning*. (Första utgåvan). Natur & Kultur.

Segerby, C. (2017). *Supporting mathematical reasoning through reading and writing in mathematics: making the implicit explicit*. Diss. Malmö: Malmö högskola, 2017. Malmö.

Smith, K.H., Silva, C., Weinburgh, M.H., Jones, N.S., & Riggs, B. (2023). Change in Emergent Multilingual Learners' Mathematical Communication: Attending to Language Use and Needs. *The Electronic Journal for Research in Science & Mathematics Education*, *27*(2), 81-98.

Sullivan, P., & Lilburn, P. (2002). *Good Questions for Math Teaching: Why Ask Them and What to Ask, K-6*; Math Solutions Publications Thomsen & Fleming: Sausalito, CA, USA.

Svensson, C. (2022). *Undervisningsutvecklande professionsutbildning för blivande och verksamma matematiklärare: en studie med utgångspunkt i variationsteoretiskt perspektiv* (Doctoral dissertation, Malmö University).

Teledahl, A. (2016). *Knowledge and writing in school mathematics: a communicational approach*. Diss. (sammanfattning) Örebro: Örebro universitet.

Truxaw, M.P., & Rojas, E.D. (2014). Challenges and affordances of learning mathematics in a second language. *Journal of Urban Mathematics Education*, *7*(2).

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction*, *28*(2), 181-209.

Venenciano, L., Slovin, H., Zenigami, F., & Yagi, S. (2015, June). Learning place value through a measurement context. In *Conference Proceedings of ICMI Study* (Vol. 23, pp. 575-582).

Vetenskapsrådet. (2017). *Forskningsetiska principer inom humanistisk och samhällsvetenskaplig forskning.*

Bilaga 1. *Lektionsdesign på de två forskningslektionerna*

Lektion 1 (48:53)	Lektion 2 (49:27)
1. Positionssystemet skillnaden mellan heltal och decimaltal. Begrepp: Ental, tiondelar, tiotal, hundradelar, hundratal, decimaltal, talsort, talvärden, Representationsformer: abstrakt, skriver med siffror.	1. Repetition genom att aktualisera elevernas förkunskaper ifrån tidigare lektion gällande heltal och decimaltal. Begrepp: heltal, Ental, tiondelar, tiotal, hundradelar, hundratal, decimaltal, Representationsformer: abstrakt
2. Olika representationsformer för decimaltal Representationsformerna konkret, bild, muntligt och abstrakt används.	2. Storleksordna Talens inbördes relationer inom decimaltal. Tiondelar och hundradelar förtydligas. Representationsformer: konkret,
3. Kopplingar till vardagskontext Film: behandlar längd, gör kopplingar mellan decimaltal och vardagskontexten inom längd. Begrepp: streck, sträcka, dm Representation: tallinje som är abstrakt	3. Kopplingar till vardagskontext Var och en elev får ett papper med en rektangulär pizza där de ska synliggöra tiondelar och hundradelar utifrån lärarens uppgifter, Representationer: bråkform, decimalform, bild på pizza i rektangulär form

Bilaga 2. *För- och eftertest åk 4*

1a)	Vilka tal finns med 6 och 7?	Svar:
1b)	Vilka tal finns mellan 0,6 och 0,7?	Svar:
1c)	Vilka tal finns mellan 0,06 och 0,07?	Svar:
2.	Vilket tal är störst 6,23 eller 6,3? Ringa in det största talet	
3.	Storleksordna följande tre tal: 7,5 7,49 7,489. Börja med det största.	Svar:
4.	Du hoppar 3 m och 75 cm i längdhopp. Skriv detta i meter.	Svar:

English abstract

Researchers emphasize the importance of working with language development in all subjects, which is especially important in Sweden as the subject of mathematics is dominated by individual work. In the study, three middle school teachers have identified decimal numbers as challenging for students in year 4. Based on this, two research lessons have been designed by the teachers and two research lessons based on a Learning study to develop the students' understanding of decimal numbers. The language theory Systemic Functional Linguistics has contributed to both the design of the lessons and as an analytical tool. The results of the study show the importance of carefully selecting which concepts, forms of representation, student activities and questions, will be crucial to create a content-inclusive mathematics teaching, i.e. targeted focus on promoting all students' knowledge development, regarding decimal numbers.

Regnestrategier og de udfordrede elever i matematik – eksempel fra 6. klasse


Lóa Björk Jóelsdóttir, VIA University College og Aarhus Universitet, Trygfondens Børneforskningscenter


Pernille Bødtker Sunde, VIA University College og KU Leuven

Abstract: *Dette studie undersøger lavt præsterende elevers strategier for regning med flercifrede tal sammenlignet med højere præsterende elever. Lavt præsterende elever defineres som de elever, der er blandt de 35 % lavest scorende i nationale tests i matematik. Data om 685 danske 6.-klasseelevers brug af talbaserede strategier og standardalgoritmer i flercifret addition, subtraktion og multiplikation blev sammenlignet mellem de fem præstationsgrupper i nationale tests. Resultaterne viste en stigende brug af talbaserede strategier for hvert præstationsniveau, men ingen signifikante forskelle mellem præstationsgrupper i brug af standardalgoritme. Talbaserede strategier resulterede oftere i korrekt resultat end standardalgoritmen for alle præstationsgrupper undtagen de 10 % 0lavest scorende.*

Introduktion

Udvikling af fleksibilitet i matematikundervisningen er en del af mål og læseplaner (curriculum aims) i forskellige lande, fx USA, Australien, Singapore (Rittle-Johnson et al., 2012), Holland (Hickendorff, 2018), Belgien (Torbeyns et al., 2018) og Danmark (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019). Fleksibilitet forstås som elevernes viden om flere forskellige strategier til løsning af et problem samt evnen til at skifte mellem disse (Verschaffel et al., 2009).

Anbefalinger om udvikling af fleksibilitet i talbaserede regnestrategier er hverken nye i Danmark eller internationalt. I en dansk kontekst findes der allerede i de klare mål fra 2001 anbefalinger til undervisning rettet mod disse strategier (Undervisningsministeriet, 2001). I gældende Fælles Mål for matematik fra 2019 står der:

> "Det er centralt, at læreren udfordrer og støtter de enkelte elever på en måde, så eleverne udvikler deres regnestrategier på baggrund af deres talforståelse frem for at lære procedurer for opstilling og udregning. Der sigtes ikke mod opøvelsen af standardiserede

> algoritmer. I trinforløbet arbejder eleverne med hensigtsmæssige strategier til beregning, herunder strategier til:
>
> - Hovedregning
> - Overslagsregning
> - Regning med skriftlige notater
> - Beregninger med digitale værktøjer.
>
> Digitale værktøjer, herunder lommeregner og regneark, indgår både som redskab til beregninger og som middel i elevernes fortsatte udvikling af talforståelse." (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019, s. 15)

I en dansk kontekst anbefales dermed at alle elever, uafhængigt af deres niveau, støttes i at udvikle talbaserede strategier. I danske lærebogssystemer findes der således aktiviteter der understøtter denne udvikling (se fx Jóelsdóttir, 2023, s. 112). På trods af dette viser dansk forskning at danske elever ikke er hyppige brugere af talbaserede strategier (Jóelsdóttir & Andrews, 2024), samt at standardalgoritmen er den foretrukne metode til opgaver som fx 199 + 323 på alle klassetrin (Jóelsdóttir & Sunde, 2024).

Anbefalingerne til udvikling af fleksibilitet i regnestrategier varierer dog, især med hensyn til de udfordrede elever. I nogle lande, fx USA og Holland, bliver undervisningen for elever med særlige behov ikke målrettet fleksibilitet, men derimod et fokus på kun én metode (Peltenburg et al., 2012).

Forskning tyder imidlertid på at alle elever, også de lavest præsterende, kan lære flere metoder og anvende talbaserede metoder med succes (Torbeyns et al., 2018). Dog mangler der mere forskning rettet mod elever i matematikvanskeligheder og deres udbytte af enten fleksibilitet eller målrettet fokus på en metode (Verschaffel et al., 2007).

Denne undersøgelse har dermed som mål at udvide vores viden om de lavest præsterende elevers brug af talbaserede strategier og standardalgoritmer samt deres fleksibilitet i arbejdet med regnestrategier for flercifrede tal. Vi undersøger endvidere sammenhængen mellem elevernes metodevalg og udregningssucces og deres generelle niveau i matematik målt ved nationale tests.

Talbaserede regnestrategier

Med talbaserede regnestrategier arbejder eleverne med pladsværdien af cifrene i tallene (Hickendorff et al., 2019) i modsætning til cifferbaserede metoder hvor pladsværdien ignoreres, dvs. at man udelukkende arbejder med tallene fra 0 til 9. Dermed defineres standardalgoritmer som cifferbaserede metoder. Tabel 1 viser eksempler på forskellige talbaserede strategier der tager udgangspunkt i fx dekomposition, sekventielle strategier og komposition (se fx Hickendorff et al., 2019; Peltenburg et al., 2012), samt eksempler på standardalgoritme til addition, subtraktion og multiplikation.

Tabel 1. *Eksempler på regnestrategier med flercifrede tal, delt op i talbaserede strategier og standardalgoritme.*

Talbaserede strategier			Standardalgoritme
Addition: 323 + 199			
300 + 100 = 400 20 + 90 = 110 3 + 9 = 12 400 + 110 + 12 = 522 300 + 100 = 400 23 + 99 = 122 400 + 122 = 522	323 + 100 = 423 423 + 90 = 513 513 + 9 = 522	323 + 200 = 523 523 − 1 = 522 323 − 1 + 199 + 1 322 + 200 = 522	1 1 323 + 199 522
Subtraktion: 103 – 98			
103 − 100 = 3 3 + 2 = 5 103 + 2 − 98 + 2 105 − 100 = 5	103 − 90 = 13 13 − 8 = 5	100 − 90 = 10 3 − 8 = −5 10 + (−5) = 5 98 + 2 = 100 100 + 3 = 103 2 + 3 = 5	0 $\cancel{10}$ 13 (9) $\cancel{1}$03 − 98 5
Multiplikation: 12 x 15			
12 · 15 = 6 · 30 = 180 12 · 10 = 120 120 : 2 = 60 120 + 60 = 180	10 · 10 = 100 2 · 10 = 20 10 · 5 = 50 2 · 5 = 10 100 + 20 + 50 + 10 = 180	12 · 10 = 120 12 · 5 = 60 120 + 60 = 180 15 · 10 = 150 15 · 2 = 30 150 + 30 = 180	1 12 · 15 30 + 15 180

Elever i matematikvanskeligheder og deres strategibrug

Matematikvanskeligheder er ofte relateret til vanskeligheder med den grundlæggende regning (Ostad, 1999), og flere studier har vist en sammenhæng mellem den tidlige strategibrug til etcifret regning og senere færdigheder og generelt matematikniveau (fx Ostad, 1999; Sunde et al., 2023). Sunde et al. (2023) fandt fx at elevernes strategibrug til etcifret addition i starten af 1. klasse kunne forudsige deres færdigheder i 4. klasse i flercifret regning, brøker, ligninger og tekstopgaver. Elever der anvendte simple tællestrategier i starten af 1. klasse, scorede lavere i 4.-klasse-testen end elever som anvendte mere sofistikerede strategier. De lavt præsterende elever anvender generelt mere umodne/usofistikerede strategier og er mere afhængige af backupstrategier, dvs. at de i højere grad anvender tællestrategier (Ostad, 1999; Verschaffel et al., 2007).

Udvikling af strategifleksibilitet er relateret til talforståelse (McMullen et al., 2016) i arbejdet med de fire regningsarter. Elever i matematikvanskeligheder er netop udfordret på deres talforståelse som også er relateret til senere udvikling af matematikkompetencer (Aunio & Niemivirta, 2010). Samtidig viser forskningen at alle elever, herunder de udfordrede elever, med succes kan anvende talbaserede strategier (Peltenburg et al., 2012; Torbeyns et al., 2018; Van Der Auwera et al., 2022). Der er endvidere sammenhæng mellem begrebsforståelse og procedural forståelse og strategifleksibilitet (Rittle-Johnson et al., 2012). Elever i matematikvanskeligheder er også udfordret på deres begrebsforståelse, sammenlignet med deres jævnaldrende elever der ikke har særlige udfordringer i matematik (Geary et al., 2000). Dette kan igen begrænse elevernes strategifleksibilitet, men forskning viser at der er sammenhæng mellem begrebsforståelse og procedural forståelse og udvikling af fleksibilitet (Rittle-Johnson & Schneider, 2015).

Dette studie

Formålet med dette studie er at undersøge forskellene mellem de lavest præsterende elevers strategibrug og de højere præsterende elevers strategibrug, hvor elevniveauet er bestemt ved resultater fra nationale tests i matematik. Vi undersøger specifikt forskellen mellem brugen af talbaserede regnestrategier og brugen af standardalgoritmer, både i forhold til hyppighed af brug og i forhold til regnesikkerhed ved brug (hvor korrekt eleverne regner), samt forskelle på fleksibilitet mellem grupperne.

Vores forskningsspørgsmål er derfor: 1) I hvor høj grad anvender lavt præsterende elever talbaserede regnestrategier og standardalgoritme i regning med flercifrede tal, sammenlignet med normalt og højt præsterende elever? 2) Hvordan er de lavest præsterendes nøjagtighed med hhv. talbaserede strategier og standardalgoritme?

Baseret på tidligere forskning forventes det at de lavest præsterende elever, selvom de er i stand til at anvende de samme typer strategier som højt præsterende elever, anvender færre strategier end højere præsterende elever (Verschaffel et al., 2007), og strategiudviklingen hos de lavest præsterende eleverne forventes at være forsinket sammenlignet med de øvrige elever (Ostad, 1999). Nogle eksperter anbefaler en simplificeret undervisning til studerende med vanskeligheder baseret på deres kognitive begrænsninger, fx relateret til begrænset arbejdshukommelse (Verschaffel et al., 2007). Derfor kan det forventes at resultaterne viser mindre fleksibilitet og mindre brug af talbaserede strategier for de lavest præsterende elever sammenlignet med andre elever.

Deltagere

I denne undersøgelse indgik 731 elever fra 38 6.-klasser (gennemsnitlig alder: 12,5 år ved gennemførelsen af testen) fordelt på 19 skoler i forskellig størrelse fra både mindre og større byer i fem kommuner i Jylland. Eleverne har alle gennemført TriFa-testen (**Tri**-phase **F**lexibility **A**ssessment) til evaluering af deres strategibrug og fleksibilitet (for detaljer se Jóelsdóttir & Andrews, 2024). I analyserne indgår udelukkende de 685 elever (93,7 %, heraf 48 % piger) der også har gennemført de obligatoriske nationale tests i matematik i 6. klasse.

Forud for testen er elevernes forældre/værge informeret, både via et brev delt gennem skolens kommunikationsplatform med mulighed for at melde den enkelte elev fra deltagelse og via en mail med informationer i overensstemmelse med databeskyttelsesloven.

Materialer og fremgangsmåde

Resultaterne fra den nationale test i matematik i 6. klasse blev brugt til at kategorisere eleverne i fem præstationsgrupper som defineret af Børne- og Undervisningsministeriet (2017), se tabel 2. Den nationale test måler generel præstation inden for tre underkategorier: tal og algebra, geometri og måling samt statistik og sandsynlighed. Testresultaterne er standardiserede så elevresultaterne er på en skala hvor gennemsnittet er 0 og standardafvigelsen er lig med 1. Grænseværdierne for hver præstationsgruppe fulgte grænseværdierne for præstationsniveauer i den landsdækkende nationale test i matematik i 2021 (N = 51.197; 93,6 % af alle danske 6.-klasseelever (Børne- og Undervisningsministeriet (u.å))). De 10 % lavest scorende og de næste 25 % defineres som *en del under gennemsnittet* og *under gennemsnittet* (UG1 og UG2), gennemsnitlige præstationer (G) er de 30 % af eleverne som er tættest på gennemsnitsresultatet, og de to højest præsterende grupper repræsenterer de 10 % højest scorende, kaldet *langt over gennemsnittet* (OG2), og de næste 25 % højest scorende elever, kaldet *over gennemsnittet* (OG1).

Tabel 2. *Opdeling i fem præstationsniveauer for de danske nationale tests i matematik, som defineret af Undervisningsministeriet i den normbaserede kategorisering (Børne- og Undervisningsministeriet, 2017), og fordeling af de deltagende elever på de fem niveauer.*

	Lavest præsterende		**Normalt præsterende**	**Højest præsterende**	
	En del under gennemsnittet (UG1)	Under gennemsnittet (UG2)	Gennemsnittet (G)	Over gennemsnittet (OG1)	Langt over gennemsnittet (OG2)
Andel af elever i gruppen	10 %	25 %	30 %	25 %	10 %
Normbaseret fordeling	[0-10 %]	]10-35 %]	]35-65 %]	]65-90 %]	]90-100 %]
N	54	143	202	191	95
Andel af deltagende elever	8 %	21 %	29 %	28 %	14 %

Tabel 2 viser hvordan de deltagende elever i dette studie fordeles på de fem præstationsniveauer. Det fremgår af tabellen at fordelingen ligger tæt på de nationale resultater, men at der er en mindre skævhed da andelen af elever i UG1 og UG2 her er 29 %, og andelen af elever i OG1 og OG2 er 42 %, sammenlignet med 35 % ifølge definitionen.

Elevernes brug af talbaserede strategier blev målt ved hjælp af TriFA (Jóelsdóttir & Andrews, 2023, 2024; Xu et al., 2017) i november/december 2020. Eleverne løste ni regneopgaver med flercifrede tal, hhv. addition, subtraktion og multiplikation, tre opgaver pr. regningsart. Hver opgave var designet til at fremme brugen af forskellige talbaserede strategier (fx 323 + 199 = 323 + 200 − 1), som vist i tabel 1. Dermed møder eleverne netop tal hvor forskellige talbaserede strategier er særlig hensigtsmæssige, afhængigt af opgavens design. Opgaverne var alle uden tekst da der her kun er fokus på elevernes talbehandling i regnesituationer uden kontekst, dvs. at der kun er fokus på tal og regnestrategier i situationer. TriFA blev implementeret i tre faser på maksimum 50 minutter i elevernes klasseværelse. I fase ét løste eleverne individuelt hver opgave med deres foretrukne strategi. I fase to blev eleverne bedt om at løse den samme opgave igen med en eller flere strategier forskellige fra den der blev anvendt i fase ét (plads til maksimalt fire nye strategier), og i fase tre skulle eleverne med et kryds markere den strategi fra fase ét eller fase to som de anerkendte som den bedste strategi for den pågældende opgave. Resultaterne fra fase tre er ikke inkluderet i denne undersøgelse. Forud for hver fase blev eleverne instrueret af en fra forskningsgruppen bag projektet, bl.a. om at se grundigt på tallene og regningsarterne, inden de løste opgaven. Hvis eleverne ville løse opgaven ved hovedregning, uden brug af papir, blev de bedt om at skrive eller tegne hvert trin i løsningsprocessen så godt som de kunne, og hvis opgaven blev løst ved brug af papir, fx når de brugte en skriftlig algoritme, skulle de skrive hvert trin i processen ned. En grundig beskrivelse af testen og evaluering af dens fordele og ulemper findes i Jóelsdóttir & Andrews (2024).

Kodning af elevernes strategier

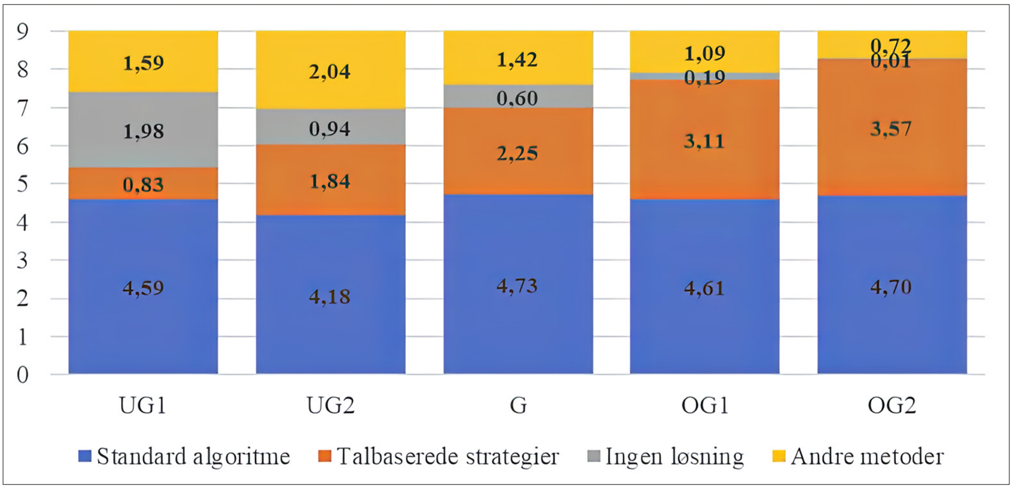
For hver opgave blev elevernes strategibrug kodet separat for fase ét og for fase to. Rigtige svar blev defineret ud fra svar givet i fase ét. Strategierne blev defineret som (i) talbaserede strategier (se tabel 1), (ii) standardalgoritme (se tabel 1), (iii) ingen metode (eleven kommunikerer ikke en løsningsstrategi eller løser ikke opgaven) eller (iv) andre. Kategorien "andre" inkluderer andre strategier, fx andre cifferbaserede strategier, optælling og for multiplikation gentagen addition. Fleksibilitet blev evalueret for hver opgave og defineret som brugen af mindst én ny strategi i fase to. Førsteforfatter og mindst ét medlem af teamet af forskningsassistenter blev trænet til at kode TriFA og kodede alle opgaver uafhængigt af hinanden. Til sidst blev resultatet fra kodningen kontrolleret for uenigheder, og alle uenigheder blev rettet ved hjælp af en kodeguide, og i tilfælde af usikkerhed blev en tredje eksperts mening anvendt til at opnå enighed.

Analyse

Deskriptiv statistik, gennemsnit, beregnes for a) antal opgaver løst med enten standardalgoritme, talbaserede strategier, ingen løsningsmetode eller andre metoder (elevernes foretrukne strategi, data fra fase ét), b) graden af fleksibilitet (data fra fase to) og c) antal opgaver løst med talbaserede strategier i fase ét og/eller fase to. For at undersøge forskelle mellem de fem præstationsgrupper med hensyn til dette anvendes en envejs-ANOVA. I tilfælde af signifikante resultater anvendes Tukeys post hoc-test til at identificere forskellene mellem de enkelte grupper. Yderligere anvendes *t*-test til sammenligning af gennemsnit for antal rigtige løsninger mellem talbaserede strategier og standardalgoritme for hhv. lavt, normalt og højt præsterende elever.

Resultater

Figur 1 viser det gennemsnitlige antal opgaver pr. elev som er løst med hhv. standardalgoritme, talbaserede strategier, ingen løsningsmetode og andre metoder for fase ét. For de ni opgaver øges brugen af talbaserede strategier i fase ét fra 0,83 for UG1 til 2,25 for G og til 3,57 for OG2. For brugen af standardalgoritmen er gennemsnittet konstant på tværs af præstationsniveauerne.

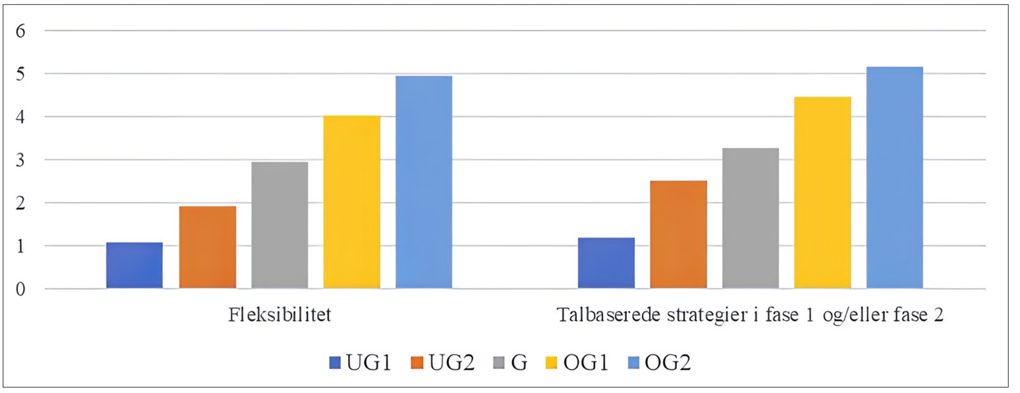


Figur 1. *Gennemsnit for antal løste opgaver i fase ét, med talbaserede strategier, standardalgoritme, ingen løsningsmetode og andre metoder som foretrukne strategityper, opdelt efter præstationsniveauer i matematik.*

Resultater fra en envejs-ANOVA viser en statistisk signifikant forskel mellem niveaugrupperne for brugen af talbaserede strategier ($F(680{,}4) = 17{,}32, p < 0{,}0001$). Yderligere viser Tukeys post hoc-test signifikante forskelle mellem UG1 og G ($forskel = 1{,}42(SE = 0{,}39), t = 3{,}64, p = 0{,}003$) som vokser med højere præsterende grupper. For elevernes manglende løsningsmetode er der en signifikant forskel mellem niveaugrupperne ($F(680{,}4) = 35{,}18, p < 0{,}0001$), og Tukeys post hoc-test viser en signifikant forskel mellem UG1 og UG2 ($forskel = -0{,}89(SE = 0{,}28), t = -3{,}20, p = 0{,}012$) og en voksende forskel mellem UG1 og højere præsterende grupper og mellem UG2 og G ($forskel = -0{,}84\ (SE = 0{,}19), t = -4{,}38, p < 0{,}001$) og en større forskel mellem de højest præsterende grupper. Resultaterne fra en envejs-ANOVA viste ingen statistisk signifikant forskel mellem præstationsniveauer for brugen af standardalgoritme ($F(680{,}4) = 0{,}65, p = 0{,}629$).

I figur 2 præsenteres gennemsnittet for fleksibilitet, beregnet som gennemsnittet af antallet af opgaver løst med mere end én strategi i de første to faser fordelt på de fem niveauer og brugen af talbaserede strategier i mindst én af de to faser, igen opdelt efter niveauer. Resultaterne viser stigende fleksibilitet og stigende brug af talbaserede strategier (i fase ét og/eller fase to) for hvert højere præstationsniveau.

Envejs-ANOVA viser en signifikant forskel mellem niveaugrupperne både for fleksibilitet ($F(680{,}4) = 37.11, p < 0.001$) og for samlet brug af talbaserede strategier i mindst én af de to faser ($F(680{,}4) = 35.53, p < 0.001$). Tukeys post hoc-test viste en signifikant forskel i fleksibilitet mellem UG1 og G ($forskel = 1{,}87\ (SE = 0{,}39), t = 4{,}77, p < 0{,}001$) og UG2 og G ($forskel = 1{,}02(SE = 0{,}28), t = 3{,}64, p = 0{,}003$) og for den samlede brug af tal-



Figur 2. *Gennemsnitlig score for fleksibilitet og brug af løste opgaver med talbaserede strategier i fase ét og/eller fase to. Det maksimale antal opgaver er ni (minimum 0, maksimum 9).*

baserede strategier mellem UG1 og UG2 ($forskel = 1{,}34 (SE = 0{,}44), t = 3{,}07, p = 0{,}019$) og UG2 og OG1 ($forskel = 1{,}93 (SE = 0{,}30), t = 6{,}38, p < 0{,}001$) og en voksende forskel i forhold til de højere præsterende grupper.

Tabel 4. *Rigtighed for talbaserede strategier og standardalgoritme, målt for hvert niveau.*

	Talbaserede strategier	Standard-algoritme			
Niveau	**Gennemsnit (*SD*)**	**Gennemsnit (*SD*)**	**[95 % Sikker-hedsinterval]**	***t***	***p***
En del under gennemsnit (UG1)	0,53 (0,40)	0,67 (0,26)	-0,14 [-0,30, 0,03]	-1,64	0,11
Under gennem-snit (UG2)	0,80 (0,30)	0,73 (0,25)	0,07 [-0,01, 0,15]	1,81	0,07
Gennemsnit (G)	0,84 (0,26)	0,79 (0,23)	0,05 [-0,01, 0,11]	1,74	0,08
Over gennem-snit (UG1)	0,88 (0,22)	0,84 (0,22)	0,03 [-0,02, 0,08]	1,32	0,19
En del over gen-nemsnit (UG2)	0,93 (0,17)	0,87 (0,19)	0,05 [-0,01, 0,11]	1,79	0,08
I alt	0,84 (0,26)	0,80 (0,24)	0,05 [0,02, 0,08]	3,10	**< 0,001**

Resultaterne for rigtighed for hhv. talbaserede strategier og standardalgoritme viser at gennemsnittet for andelen af rigtig løste opgaver med talbaserede strategier er signifikant højere sammenlignet med standardalgoritmen for den samlede elevgruppe (tabel 4). Det er kun for gruppen UG1 at standardalgoritmen har højere rigtighed end de talbaserede strategier. Forskellene er ikke signifikante på gruppeniveau.

Diskussion og konklusion

Brugen af talbaserede metoder øges gradvist fra de lavest præsterende til de højest præsterende elever, og det samme gælder for fleksibiliteten. Dette bekræfter resultater fra Verschaffel et al. (2007) der viser at højt præsterende studerende er mere fleksible end lavt præsterende. Mens brugen af standardalgoritmen er konstant på tværs af alle niveaugrupper, ses en øget brug af talbaserede strategier med højere præstationsniveau. Omvendt ses et fald i graden af manglende løsningsstrategi. Dette indikerer at brugen af standardalgoritmen er mere relateret til sociomatematiske normer, som Yackel og Cobb (1992) beskriver som de uskrevne regler og forventninger i matematikklassen, fx hvad der vurderes at være matematisk effektivt og matematisk værdsat i en klasse, mens brugen af talbaserede strategier i højere grad kan relateres til elevens matematiske niveau. Yderligere kan forskellene mellem (i) standardalgoritme og (ii) talbaserede strategier og matematisk niveau forklares ved de forskellige læringsforudsætninger, hvor standardalgoritmen kan læres ved automatisering af en trænet metode, isoleret fra andre matematiske begreber, mens talbaserede strategier er relateret til både konceptuel og procedural viden og forståelse, hvilket ofte er en grundlæggende udfordring i gruppen af lavt præsterende studerende (MacDonald et al., 2018). Det samme gælder fleksibilitet som også kræver konceptuel og procedural forståelse (Rittle-Johnson et al., 2012). I arbejdet med de udfordrede elever bør vi se nærmere på forskning som viser at de udfordrede elever med fordel kan tilegne sig talbaserede strategier (fx Torbeyns et al., 2018), men at denne elevgruppe har brug for tid til at udvikle og tilegne sig disse strategier. I forbindelse med undervisning bør lærere derfor overveje om træning af udenadlærte ciffer-baserede metoder, fx standardalgoritmen, bør prioriteres over tid brugt på talbaserede metoder der samtidig styrker elevernes talforståelse. I denne sammenhæng er det også vigtigt at se på resultater fra forskning. Både dette studie og fx Torbeyns et al. (2018) viser at elevers andel af rigtige svar er større når de anvender talbaserede strategier sammenlignet med standardalgoritme. I denne undersøgelse er forskellen ikke signifikant for de enkelte præstationsgrupper, men fx Torbeyns et al. (2018) viser at de lavest præsterende elever viser større effektivitet, målt på hastighed og rigtige svar, når de arbejder med indirekte addition i subtraktion, som er en talbaseret strategi, sammenlignet med standardalgoritmen.

De lavere præsterende elevgruppers mangel på konceptuel og procedural forståelse kan forklare den lavere grad af korrekte besvarelser for talbaserede strategier i UG1-gruppen. For alle andre præstationsgrupper var talbaserede strategier mere nøjagtige end standardalgoritmen, men dog ikke signifikant forskellige. Denne forskel i effektivitet med talbaserede strategier mellem de to lavt præsterende grupper kunne indikere at UG1-studerende (de laveste 10 %) og UG2-studerende (de næste 25 % af de lavere præsterende studerende) måske er to grupper med kognitivt forskellige udfordringer inden for matematik (Geary et al., 2011). Resultaterne kalder på yderligere forskning, herunder om der er forskelle relateret til de enkelte regningsarter og relateret til effektivitet mellem forskellige talbaserede strategier.

Dette studie har vist at der er store forskelle på forskellige elevgruppers brug af talbaserede regnestrategier til flercifret regning, på trods af at disse metoder generelt synes at være mere sikre at anvende idet de oftere leder til et korrekt resultat end brugen af standardalgoritmen. Dette synes også at gælde de lavere præsterende, dog med undtagelse af de 10 % lavets præsterende som samtidig meget sjældent anvender disse strategier. Vi vil derfor konkludere at man med fordel kan støtte alle elever og især de lavere præsterende i at udvikle og anvende talbaserede strategier, men i arbejdet med de 10 % lavest præsterende må man i højere grad være opmærksom på at arbejde målrettet med evt. manglende konceptuel og procedural forståelse som kan blokere for denne elevgruppes udbytte af talbaserede strategier. For især denne elevgruppe vil der være mulighed for at styrke deres aritmetiske kompetencer ved at udvikle fx deres talforståelse så de kan udnytte de talbaserede metoder på samme måde som de højere præsterende elever.

Referencer

Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting Children's Mathematical Performance in Grade One by Early Numeracy. *Learning and Individual Differences, 20*(5), 427-435. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.06.003

Børne- og Undervisningsministeriet. (2017). *Vejledning om de nationale tests – til skoleledere*. Børne- og Undervisningsministeriet.

Børne- og Undervisningsministeriet. (2019). *Matematik – læseplan*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_L%C3%A6seplan_Matematik.pdf

Børne- og Undervisningsministeriet. (u.å) Testresultater. Lokaliseret 21/6-2024 fra https://uddannelsesstatistik.dk/Pages/Topics/17.aspx?excel=1579

Geary, D.C., Hamson, C.O. & Hoard, M.K. (2000). Numerical and Arithmetical Cognition: A Longitudinal Study of Process and Concept Deficits in Children With Learning Disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 77*(3), 236-263. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2561

Hickendorff, M. (2018). Dutch Sixth Graders' Use of Shortcut Strategies in Solving Multidigit Arithmetic Problems. *European Journal of Psychology of Education, 33*(4), 577-594. https://doi.org/10.1007/s10212-017-0357-6

Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2019). Multi-Digit Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Strategies. I A. Fritz, V.G. Haase & P. Räsänen (red.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties* (s. 543-560). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_32

Jóelsdóttir, L.B. (2023). *Essays on Adaptivity and Flexibility in Multidigit Arithmetic*. Ph.d.-afhandling. Institut for Økonomi, Aarhus Universitet.

Jóelsdóttir, L.B. & Andrews, P. (2023). Danish Third, Sixth and Eighth Grade Students' Strategy Adaptivity, Strategy Flexibility and Accuracy When Solving Multidigit Arithmetic Tasks. *European Journal of Psychology of Education*. https://doi.org/10.1007/s10212-023-00786-2

Jóelsdóttir, L.B. & Andrews, P. (2024). Grade Six Students' Multi-Digit Arithmetic Strategy Adaptivity and Flexibility: Evaluating a Novel Tri-Phase Assessment Tool. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2328341

Jóelsdóttir, L.B. & Sunde, P. (2024). Adaptivitet og fleksibilitet – addition og subtraktion med flercifrede tal. [Manuskript accepteret til udgivelse i *MONA*].

MacDonald, B., Westenskow, A., Moyer-Packenham, P.S. & Child, B. (2018). Components of Place Value Understanding: Targeting Mathematical Difficulties When Providing Interventions. *School Science and Mathematics, 118*(1/2), 17-29. https://doi.org/10.1111/ssm.12258

McMullen, J., Brezovszky, B., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M.M. & Lehtinen, E. (2016). Adaptive Number Knowledge: Exploring the Foundations of Adaptivity With Whole-Number Arithmetic. *Learning and Individual Differences, 47*, 172-181. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.02.007

Ostad, S. (1999). Developmental Progression of Subtraction Strategies: A Comparison of Mathematically Normal and Mathematically Disabled Children. *European Journal of Special Needs Education, 14*(1), 21-36. https://doi.org/10.1080/0885625990140103

Peltenburg, M., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Robitzsch, A. (2012). Special Education Students' Use of Indirect Addition in Solving Subtraction Problems up to 100: A Proof of the Didactical Potential of an Ignored Procedure. *Educational Studies in Mathematics, 79*, 351-369. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9351-0

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. I R.C. Kadosh & A. Dowker (red.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (s. 1118-1134). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014

Rittle-Johnson, B., Star, J.R. & Durkin, K. (2012). Developing Procedural Flexibility: Are Novices Prepared to Learn From Comparing Procedures? *British Journal of Educational Psychology, 82*(3), 436-455. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02037.x

Sunde, P.B., De Smedt, B., Verschaffel, L. & Sunde, P. (2023). Grade One Single-Digit Addition Strategies as Predictors of Grade Four Achievement in Mathematics. *European Journal of Psychology of Education*. https://doi.org/10.1007/s10212-023-00761-x

Torbeyns, J., Peters, G., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2018). Subtraction by Addition Strategy Use in Children of Varying Mathematical Achievement Level: A Choice/No-Choice Study. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 215-234. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.77

Undervisningsministeriet. (2001). *Klare mål – matematik – faghæfte 12*. Undervisningsministeriet.

Van Der Auwera, S., Torbeyns, J., De Smedt, B., Verguts, G. & Verschaffel, L. (2022). The Remarkably Frequent, Efficient, and Adaptive Use of the Subtraction by Addition Strategy: A Choice/No-Choice Study in Fourth- to Sixth-Graders With Varying Mathematical Achievement Levels. *Learning and Individual Differences, 93*, 102107. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2021.102107

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, Investigating, and Enhancing Adaptive Expertise in Elementary Mathematics Education. *European Journal of Psychology of Education, 14*(3), 335-359. https://doi.org/10.1007/BF03174765

Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K. & Van Dooren, W. (2007). Strategy Flexibility in Children With low Achievement in Mathematics. *Educational & Child Psychology, 24*(2), 16-27.

Xu, L., Liu, R.D., Star, J.R., Wang, J., Liu, Y. & Zhen, R. (2017). Measures of Potential Flexibility and Practical Flexibility in Equation Solving. *Frontiers in Psychology, 8*, 1368. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01368

Yackel, E. & Cobb, P. (1992). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.4.0458

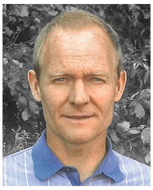
English abstract

In this study we investigate the lower achieving students multidigit arithmetic strategies and compare them to higher achieving students. 685 students in Danish grade 6 completed both Tri-phase Flexibility Assessment with multidigit addition, subtraction and multiplication and national test in mathematics. The use of number-based strategies and standard algorithms was compared by achievement groups, defined by results from the national test. The findings show increasing use of number-based strategies for each achievement level, but no significant differences in use of standard algorithm. Further, number-based strategies were more accurate than standard algorithm in all achievement groups except the lowest 10%.

Perceived difficulty of numbers relates to self-reported achievement in adults


Pernille Bødtker Sunde, VIA University College and KU Leuven


Pernille Pind, Forlaget Pind og Bjerre


Peter Sunde, Aarhus Universitet

Abstract: *Are some numbers perceived as more difficult than others, and if so, is this dependent on general mathematical ability? We analysed 689 adults' (age >18 years) responses to a questionnaire on perceived difficulty of and preference for different numbers' multiplications. Participants with low self-reported mathematical ability score (MAS) perceived difficult numbers, i.e., numbers including digits 7 and 8, as more difficult than high MAS participants did. This has implications for teaching as well as for research. If a task is perceived as difficult due to the presence of specific digits, this could influence performance and ability to engage in, for example, learning activities.*

Introduction

It is well known that humans have at all times assigned different attributes to different numbers (Major, 2017). For example, some consider the number 3 a lucky number, and the Chinese perception of 4 is death, therefore buildings may lack a fourth floor, equivalent to many western hotels lacking room number 13, as this number in a western culture is thought to bring bad luck. The idea that numbers have different attributes can also be found in textbooks for teaching mathematics in the early grades. For example, the Kontext textbook system from Alinea is accompanied by a story of the family of numbers targeting the learners in primary school. In this story, each member of the family (numbers from 0 to 9) is assigned different personalities, such as Elegant One, Thoughtful Two, Tired Three, Silly Four, Cool Seven (in Danish: Elegante Et, Tænksomme To, Trætte Tre, Fjollede Fire, Seje Syv), etc. How numbers are perceived and what characteristics are assigned to them differs from person to person. Some prefer even numbers, others prefer odd. Some like 7, as this is believed to be a lucky or magic number, while others dislike 7 because they find it a 'difficult' number.

Difficult numbers and arithmetic

When is a number or a task considered difficult? Research on task difficulty has investigated how individuals make choices based on different characteristics of a task, such as cognitive demands, which includes the number of digits or letters that need to be remembered, the time necessary to perform the tasks and the amount of physical work that is required to perform the task (see e.g. Feghhi et al, 2021).

In arithmetic some numbers appear to be more difficult than others. In a study on difficulty of simple multiplication facts, Taraghi et al. (2014) found that when analysing the proportion of correct answers, multiplications with certain numbers were more difficult than others. They found multiplications with 1, 2, 5 or 10 to be the easiest, multiplications with 3, 4, 6 and 9 to be of intermediate difficulty and those with 7 and 8 to be the most difficult multiplications. It will come as no surprise to teachers that children find single-digit multiplication with operands 7 and 8 more difficult than multiplications with other operands (Taraghi et al., 2014; van der Ven et al., 2015). These differences in difficulty levels have been explained according to several aspects (for an overview see van der Ven et al., 2015), for example problem-size effect, that is, problems with small operands are solved faster and more accurately than problems with large operands. However, existing research has primarily analysed the difficulty of specific numbers in, for example, multiplication through correctness of performed operations. How the difficulty of numbers is perceived irrespective of the individual's ability to perform a calculation correctly has to the best of our knowledge not been systematically investigated.

How a person feels about a number, or whether a person prefers or not to do calculations involving a specific number based, for example, on how the person perceives that number is important. Bandura (1997) writes about beliefs about personal efficacy as follows: "Beliefs of personal efficacy constitute the key factor of human agency. If people believe they have no power to produce results, they will not attempt to make things happen" (p. 3). Thus, there is a risk that (self-perceived) low performers will not engage in problem solving including numbers they perceive as difficult. As a result, they will have less experience and fewer potential successes in problem solving, further contributing to low self-efficacy.

The main aim of this first exploratory study was to investigate if it would be possible to measure differences in preferences for and perceived difficulty of different numbers. We therefore designed a simple questionnaire and collected data through social media. Of course, this has some implications when analysing data and interpreting results due to the self-selection bias (see e.g. Khazaal, et al., 2014). However, we find the nature of the results interesting and will therefore report the findings here. Our hope is that this can inspire further research into perceived difficulty of and preferences for engaging with mathematics tasks, as well as the implications for learning.

The research questions for the current study are the following: Are some numbers, and multiplications including these numbers, preferred more often than others? If so, is this dependent on self-perceived mathematical ability?

This study

In a survey conducted on Facebook, adults (age >18 years) were invited to complete a short questionnaire designed to capture perceived difficulty of and preference for different numbers. The questionnaire was made available on 20 March 2023 via the second author's network and was boosted on the following day to increase the outreach. The boost ran for three days. For the current analysis we included data from the first six days, from 20 to 26 March 2023. Participants were informed at the start of the questionnaire about the aim of the research, what type of questions would be asked, that data would be fully anonymised from the start and therefore it would not be possible to withdraw after finishing the questionnaire, however it was possible to quit during the questionnaire by simple exiting the questionnaire as information and answers would not be saved.

Questions on age, gender (female, male, other, prefer not to answer) and mathematical ability score (MAS) (self-evaluation on a scale from 1 to 5: 'How do you rate yourself in mathematics?' [Hvor god oplever du, at du er til matematik?]) were included at the start of the questionnaire. After answering the questions on perceived difficulty and preference for different numbers, participants were encouraged to share their experiences with numbers in general (open answer category). The sample includes 691 adults, of whom 515 reported their gender as female, 174 as male and two reported 'other' or did not want to report their gender. For analytical reasons, we only include data for participants that reported gender as male or female resulting in a dataset of 689 participants.

To capture the *perceived difficulty of specific numbers,* participants were asked to state on a scale from 1 (unlikely) to 5 (most likely) whether they believed they would be able to perform a specific multiplication (see example in Figure 1A). The participants were not asked to perform the calculation. The multiplications consisted of nine items with two single-digit operands, and nine items with single-digit operand multiplied by a two-digit operand (Table 1).

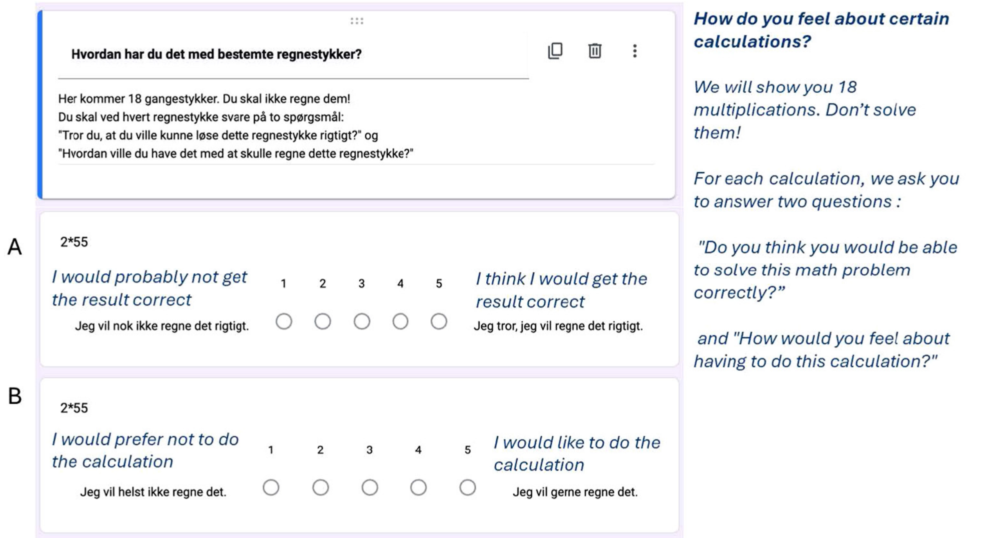


Figure 1. *Examples of questions on multiplication. Each multiplication has two questions. A: Whether the participant believes that he/she would get the calculation correct. B: To what extent the participant would prefer to perform the actual calculation.*

To capture *preferences for specific numbers*, participants were asked if they would prefer, on a scale from 1 (least) to 5 (most), to perform the same multiplication or not (Figure 1B), and additionally they were asked about their preferences (1 to 5) for specific numbers (see examples in Figure 2): nine two-digit and nine three-digit num-

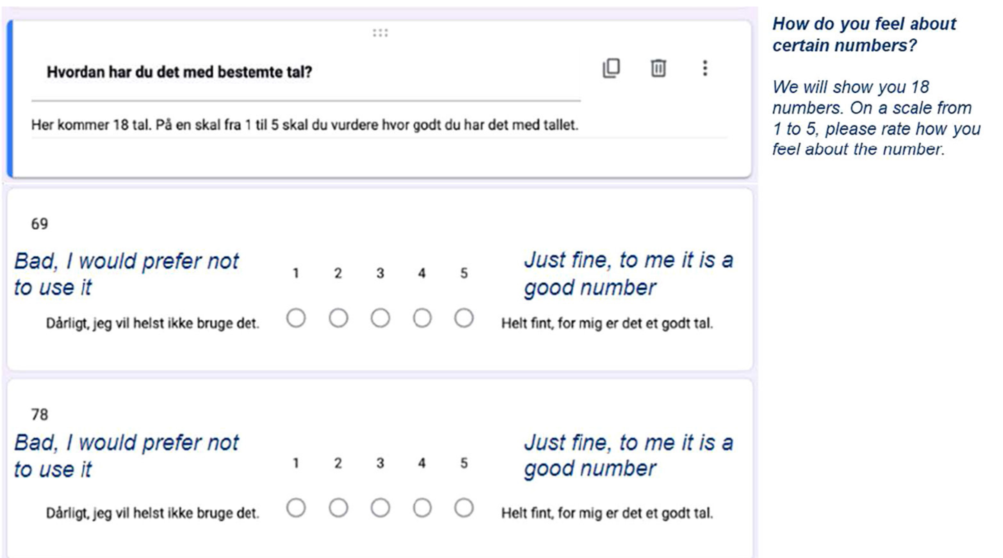


Figure 2. *Examples of questions related to multidigit numbers.*

Figure 3. *Examples of question on doing calculations in context.*

The price difference for diesel and petrol is the same in the two cities of Duckburg and Goosetown.

In Duckburg, a liter of diesel costs DKK 17.78 and a liter of petrol DKK 18.57.
In Goosetown, a liter of diesel costs DKK 15.43 and a liter of petrol DKK 16.22.

In which city would you prefer to calculate the price difference?

- ❑ Duckburg
- ❑ Goosetown
- ❑ I think it is equally easy or difficult

bers (Table 1). Furthermore, we included three items on calculations in context (see example in Figure 3). In this paper, we only analyse data on preference to perform a multiplication without everyday context (Figure 1B) and number preference (Figure 2).

Coding for item difficulty

The difficulty of the numbers in each item of the questionnaire was scored from 1 to 6 based on the presence of specific digits. Following the findings of Taraghi et al. (2014) regarding difficulty of operands in single-digit multiplication, we categorised the digits into three groups: the easiest (e) were 1, 2 and 5; intermediate difficult (i) were 3, 4, 6 and 9; and most difficult (d) were 7 and 8. We do not include 0 in this study. Difficulty level of 2- and 3-digit items was scored as shown in Table 1. The score of an item was based on the difficulty of included digits irrespective of the sequence of the digits.

Table 1. *Overview of coding for difficulty following the findings of Taraghi et al. (2014). Easiest numbers or digits (e): 1, 2 and 5. Intermediate difficulty (i): 3, 4, 6 and 9. Most difficult (d): 7 and 8. Sequence of digits or operands was not taken into account.*

Score	2-digit items	Numbers	Multiplications	3-digit items	Numbers	Multiplications
1	ee	25	2 * 5	eee	255	2 * 55
2	ei	23; 41	2 * 3; 4 * 5	eei	253; 451	2 * 53; 4 * 55
3	ed	27; 57	2 * 7; 5 * 7	eed	272; 572	5 * 72; 2* 72
4	ii	69	6 * 9	eii	692	6 * 92
5	id	38; 89	3 * 8; 8 * 9	eid	382; 892	3 * 82; 8 * 92
6	dd	78	7 * 8	edd	782	7 * 82

Analysis

In this paper we will only analyse data for preference, which is the score indicating whether the informant would prefer to solve the multiplication task or use the number. For every study subject we calculated the average preference score (APS) for each difficulty category. Hence every subject was represented by six average preference scores, one for each difficulty category, resulting in 4,134 APS values (6 categories multiplied by 689 subjects) in the dataset. We calculated APS separately for multiplication and multidigit number items. Correlation coefficients (Pearson's r) between the two measures (n = 4134) were r = 0.637 (r^2 = 0.409) for females and r = 0.499 (r^2 = 0.249) for males, showing that less than 41% (r^2) of the variation in one measure was explained by variation in the other measure. Therefore, we analysed and interpret variation in the two measures (multiplication and multidigit numbers) separately.

We analysed the variation in APS with a general linear mixed model (PROC MIXED in SAS 9.4) with gender (M, F), self-reported score of mathematical ability (MAS) and item difficulty score (DIFF) as categorical fixed effects variables. We stated subject ID as random intercept. Residual plots indicated reasonably normal distributed error terms, leading us to believe that the model's predictions are trustworthy.

We evaluated the statistical significance of the different predictors from type-1 (sequence of fixed effects: gender, MAS, DIFF, MAS*DIFF interaction term) and type-3 sum-of-square F-statistics. Since the type-1 analysis revealed that the initially highly significant effect of gender was reduced to borderline significant (B) or not significant at all (N), to estimate the raw difference between M and F we also ran models with gender as the only fixed effect. We derived predicted mean values for the different categorical variables as least square means predictions.

Results

Descriptive analyses on gender and age distribution of participants are presented in Table 2.

In general, women scored their mathematical ability (MAS) 0.32 points lower than did men (F; mean = 3.92 [95%CI: 3.83-4.01]; M mean = 4.25 [4.12-4.37], median = 4 95%; Kruskall–Wallis test: P = 0.0013). The distribution of self-reported mathematical ability divided by gender can be seen in Figure 4.

Men reported higher preference scores for number items (mixed model: B/SE = 0.209/0.085, t_{3440} = 2.47, P = 0.014) as well as for multiplication items (B/SE = 0.209/0.055, t_{3440} = 3.77, P = 0.0002) than women did (Fig. 5). For both item types most or all of this apparent gender difference disappeared when included in models that also accounted for MAS in interaction with item difficulty score (remaining gender differences when

Table 2. *Distribution of the different age groups divided by gender. For legal reasons concerning the remote possibility of identifying individual participants, groups comprising five or fewer observations are not shown.*

Age group	Women (F)	Male (M)	Total
Below 20	*	*	11
20-29	50	18	68
30-39	123	43	167
40-49	176	47	224
50-59	104	35	139
60-69	40	21	61
70-79	14	6	20
80 or above	*	*	*
Total	515	174	691

adjusted for MAS in interaction with difficulty score: number items: P = 0.49, difference = 0.05 points lower for F than for M; multiplication items: P = 0.046, difference = 0.09 points lower for F than for M), which in turn were highly statistically significant for both types of items (P < 0.0001; Fig. 6).

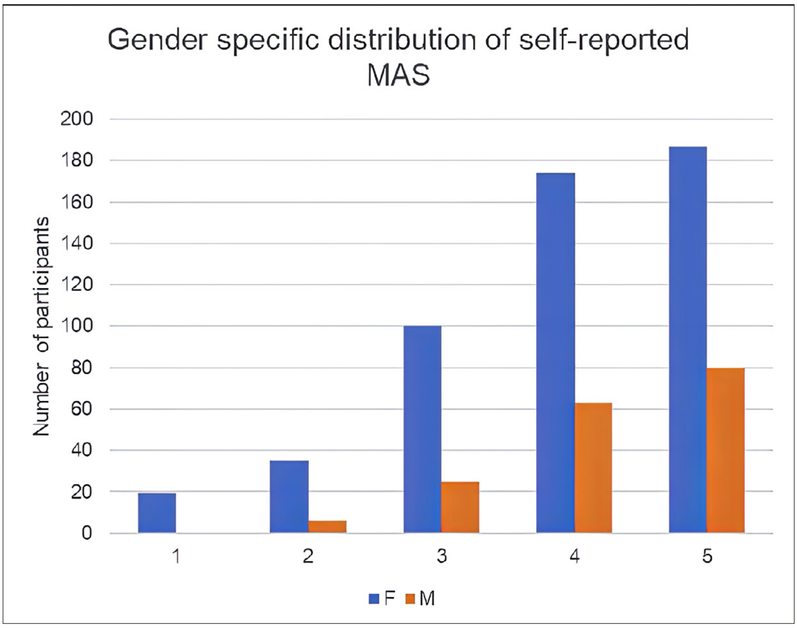


Figure 4. *Distribution of self-reported mathematical ability score (MAS; 1: lowest) divided by gender (F: female; M: male).*

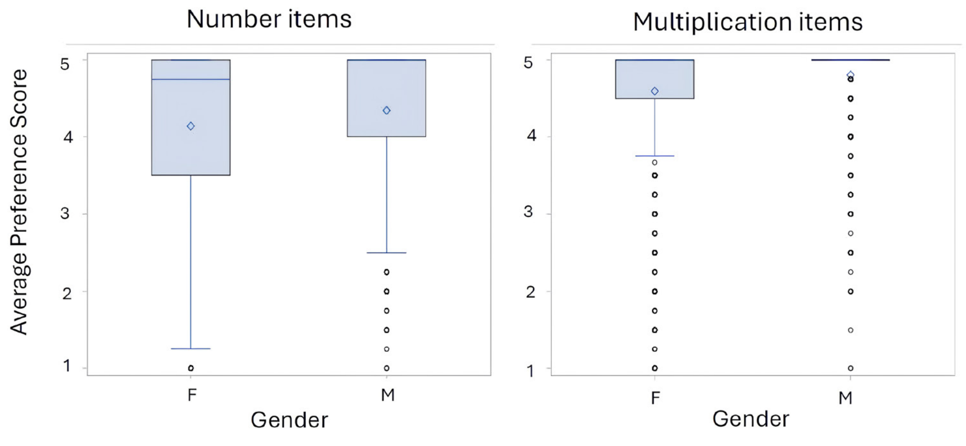


Figure 5. *Boxplot showing central tendency of average preference score for number items and multiplication items divided by 515 females (F) and 174 males (M): mean (dot inside box), median (horizontal line inside box), lower to upper quartile (greyish box), 1.5 times inter-quartile range (whiskers) and outlying observations (dots outside box).*

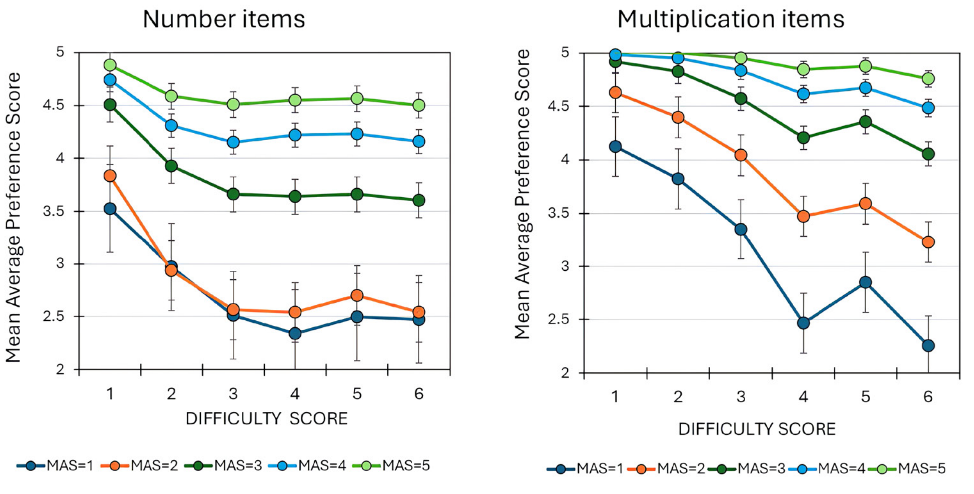


Figure 6. *Least square mean estimates with 95% confidence error bars of average preference scores (1 [least] – 5 [most]) for number items and multiplication items as function of difficulty score and self-reported mathematical ability score (MAS: 1 [low] – 5 [high]). For both types of items the interaction between difficulty score and MAS was highly statistically significant ($P < 0.0001$), whereas the partial effect of gender (after having accounted for difficulty of item and MAS) was negligibly small and is therefore not shown.*

For both types of items preference scores increased with increasing MAS score and was higher for items with the lowest difficulty score compared to those with the highest difficulty score. However, as can be seen in Figure 6, these overall correlations were neither linear nor additive between difficulty and MAS score.

Discussion and conclusion

The current study has shown that not only are some numbers perceived as more difficult than others, but that this is also related to self-reported mathematical ability. Groups with low self-reported MAS preferred to do multiplication or use difficult numbers, namely numbers including the digits 7 and 8, to a lesser extent than groups with high self-reported MAS. The differences in preference scores indicate that groups with low MAS perceived difficult numbers significantly more difficult than groups with high MAS did (Figure 6). This was illustrated by all (number items) or nearly all (multiplication problems) of the differences between male and female in item preference being attributable to females scoring themselves lower in self-reported mathematical ability. Hence, even though males overall scored significantly higher than females in item preference, there were no real differences in item preference between males and females with similar mathematical self-assessment scores.

Whether or not numbers are perceived as difficult by some achievement groups has implications for teaching as well as for research. If a person perceives a task as difficult due to the presence of specific digits, this could influence performance and ability to engage in, for example, learning activities. As one participant stated: "I am a math teacher, but even so it feels like a shock through my body if I have to do arithmetic with 7 and 8 and the result exceeds 10." These aspects of individual differences in perceived difficulty are relevant in teaching as well as research.

In relation to teaching, our findings could suggest that teachers and textbook authors should carefully consider their choices of numbers in the tasks. Based on our results in this study we would suggest that numbers that could be perceived as difficult by especially the lower performing students should be avoided when introducing new topics and when consolidating new knowledge. Especially for the low performing or insecure students, the use of the difficult numbers like 7 and 8 should be avoided until the students have gained a certain level of conceptual and procedural knowledge of the specific mathematical content. In our own experience, we and teachers alike often make easy tasks more difficult by 'adding a couple of 7s and 8s' to the numbers in the task, or reversibly, exchange the 7s and 8s for easier digits if we believe the task to be too difficult. Our current findings could indicate that this needs to be done with care as this might refrain some students from engaging in the tasks – not because the task is more difficult, but because the student is less convinced that they will be able to perform the task. If this is the case, this has implications for how the items for tests are designed, whether this is for evaluating students' performance, final exams or for research purposes. There might be a layer of difficulty that we inadvertently add to the test items that disproportionately disadvantages the lower achieving students.

Limitations

While analyses based on samples obtained by self-selection (as in this study) may reveal useful results about relationships between different predictor and response variables, inferences to populations should be treated with extreme caution as self-selected samples cannot be considered representative. Before repeated on a systematically obtained sample, our results should therefore be considered indicative rather than conclusive regarding the overall population of Danish citizens. This also includes overall population differences between males and females.

Only 61 participants out of the 691 scored themselves as low ability in mathematics (scores 1 and 2), approximately 9%, which is slightly lower than what is believed to be the prevalence of mathematical difficulties in the population (Lindenskov and Lindhardt, 2023; Mikkelsen et al., 2023). However, we did see a relatively good distribution of age, with a majority of participants in the age range of 30 to 60 years. With respect to gender, women were overrepresented (3:1). Considering the total number of participants (691) we believe the findings to be representative with respect to gender.

Concluding remarks

What we have presented here is a first exploratory pilot study that, despite the limitations inherent in the methodological approach, nevertheless indicates that numbers matter. People who perceive themselves as lower performing in mathematics tend to have stronger negative feelings towards engaging with difficult numbers, for example numbers including the digits 7 and 8. As we have outlined above, this can have important implications for teaching, examinations and research. Our hope is that this pilot study can inspire further research into perceived difficulty of and preferences for engaging with mathematics tasks, as well as the implications for learning for low performing students.

Acknowledgement

We wish to thank the anonymous participants for completing the questionnaire and not least for sharing their personal experiences with numbers.

References

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The Exercise of Control*. New York: W.H. Freeman.

Elston, D.M. (2021). Participation bias, self-selection bias, and response bias. *Journal of the American Academy of Dermatology*. https://doi.org/10.1016/j.jaad.2021.06.025

Feghhi, I., Franchak, J.M., & Rosenbaum, D.A. (2021). Towards a common code for difficulty: Navigating a narrow gap is like memorizing an extra digit. *Attention, Perception, & Psychophysics, 83*, 3275-3284.

Khazaal, Y., Van Singer, M., Chatton, A., Achab, S., Zullino, D., Rothen, S., ... & Thorens, G. (2014). Does self-selection affect samples' representativeness in online surveys? An investigation in online video game research. *Journal of medical Internet research, 16*(7), e2759. https://doi.org/10.2196/jmir.2759

Lindenskov, L.B., & Lindhardt, B. (2023). *Vidensopsamling – elever i matematikvanskeligheder.* Retrieved (10 March 2024): https://pure.au.dk/portal/da/publications/vidensopsamling-elever-i-matematikvanskeligheder

Major, A. (2017). Numbers with personality. In *Proceedings of Bridges 2017: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture* (pp. 1-8).

Mikkelsen, M., Beatrice Schindler Rangvid, B. and Myrup Jensen, V. (2023). *Børn og unge i matematikvanskeligheder – En registeranalyse af konsekvenser og kendetegn*. VIVE

Pind, P., Bjerre, M., Sunde, P. & Sunde, P.B. (2021). *Low performers only recognize straightforward addition word problems*. Presentation at NORSMA10

Taraghi, B., Ebner, M., Saranti, A., & Schön, M. (2014). On using markov chain to evidence the learning structures and difficulty levels of one digit multiplication. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Learning Analytics And Knowledge* (pp. 68-72).

van der Ven, S.H., Straatemeier, M., Jansen, B.R., Klinkenberg, S., & van der Maas, H.L. (2015). Learning multiplication: An integrated analysis of the multiplication ability of primary school children and the difficulty of single digit and multidigit multiplication problems. *Learning and Individual Differences, 43*, 48-62. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.08.013

Dansk abstract

Opfattes nogle tal som sværere end andre, og er det i så fald afhængigt af personens generelle matematiske evner? Vi analyserede 689 voksnes (alder>18) svar på et kort spørgeskema om talpræferencer og lyst til at udføre multiplikationer. Deltagere med lav selvrapporteret score for matematiske evner (MAS) opfattede svære tal, dvs. tal indeholdende cifrene 7 og 8, som sværere end deltagere med høj MAS. Dette har konsekvenser for både undervisning og forskning. Hvis en opgave opfattes som svær på grund af tilstedeværelsen af bestemte cifre, kan det påvirke præstationen og evnen til at engagere sig i f.eks. læringsaktiviteter.

The dyscalculia simulator: A developmental project targeting teachers


Johan Kørvel Sørensen, SDU


Nina Genster, SDU


Jacob Frølund Davis, SDU


Simone Lindhøj Rasmussen, SDU


Pernille Bødtker Sunde, VIA University College and KU Leuven

English abstract: *In this developmental project we present a first version of a dyscalculia simulator. The goal was to support mathematics teachers to better understand the difficulties students with dyscalculia experience in mathematics lessons. We therefore developed a virtual classroom where it is possible to experience some of the same difficulties as a person with dyscalculia would in a mathematics lesson. The simulator was tested on teachers and student teachers. The results show that the dyscalculia simulator has the potential to provide insights and reflections on how students with dyscalculia experience the processing of numbers and numerical information typical of school mathematics.*

Background

Dyscalculia and severe mathematical learning difficulties come with a cost, both for the individual and for society (Mikkelsen et al., 2023). The impact on daily life and academic performance has been documented in several studies on adults (e.g. Vigna et al., 2022) and in interviews with children with severe learning difficulties in mathematics (Egmont, 2023). Research on dyscalculia is relatively limited in a Scandinavian context (Epinion, 2020; Bengtsson & Larsen, 2013). Although there is no clear consensus on a definition on what constitute dyscalculia, there seems to be an agreement that dyscalculia is associated with severe difficulties with understanding and operating with numbers that cannot be explained by other learning difficulties or low IQ (Price & Ansari, 2013). In this project we have been guided by the definition proposed by Bengtsson and Larsen:

> "Dyscalculia is a disability that can have a negative impact on an individual's educational and working life. The condition centres around deficits in numeracy skills that are not matched by similar deficits in other areas. The specific numeracy difficulties include striking difficulties in understanding and dealing with basic number processing, such as comparing numbers and quantities or counting a small number of objects. Subsequently, addition, subtraction, multiplication and division are noticeably difficult. The condition does not necessarily include difficulties with more abstract mathematics skills in algebra, trigonometry, geometry and complex calculations. We do not refer to dyscalculia if the cause of the difficulties is mental retardation or inadequate schooling. However, the condition can include cognitive problems such as poor semantic memory and working memory." (2013: 17, our translation)

People without dyscalculia often cannot comprehend the difficulties a person with dyscalculia experiences. This is also the case for mathematics teachers. If you cannot comprehend the difficulties it can be difficult to spot and act on them as well. With this developmental project we wanted to investigate how we can create a better understanding of the difficulties students with dyscalculia experience, especially in the mathematics lessons in a school context. In this project we seek to answer the following questions:

- Can a simulator experience provide a deeper insight into how a student with dyscalculia experiences a mathematics lesson and the processing of numbers and numerical information typical of school mathematics?
- Can this insight support mathematics teachers in planning and organising classroom teaching to better support these students?

Here, we present a first version of the Dyscalculia Simulator. The process of development is outlined and future possibilities are discussed. The work presented in this paper is based on a bachelor report by four of the authors (Davis et al., 2023).

Teacher empathy and learning

Several studies have found teacher empathy to be important for students' learning (Meyers et al., 2019), therefore supporting teachers in developing their empathy for students with dyscalculia seems promising. Teacher empathy is defined by Meyers et al. (2019: 161) as:

> "the degree to which instructors work to deeply understand students' personal and social situations, feel caring and concern in response to students' positive and negative emotions, and communicate their understanding and caring to students through their behavior."

Simulation can make it possible to learn through experience and create empathy for others' situations. This has proven to be successful using video games (Pallavicini, 2020; Tong et al., 2017) and simulations (Billon et al., 2016). Increasing teachers' empathy for and understanding of students with dyscalculia is important, as students with learning difficulties may also present different behavioural problems such as aggressive behaviour and irritability (e.g. Park et al., 2024).

Simulations as tools for learning

Using practical experience and simulations as tools for learning has proven efficient in several contexts. In the education of health professionals, several studies have shown that simulations can support the teaching of subjects that are difficult or too abstract to experience in practice (Issenberg et al., 2008). One such example is the study of Billon and colleagues (2016). In their study a training course simulation was designed to enhance nurses' understanding of the health needs of patients with intellectual disabilities. Their findings showed that nurses participating in the simulations were able to highlight key issues in their practices and to adjust their practice to better fit the needs of their patients. Although the simulation was designed with persons pretending to be patients, the purpose of the study was very similar to our intention: to support the improvement of communication between the nurse and patient, or in our case, the teacher and student.

An example of how a virtual reality game situation can provide the participant with experiences is the FestLab VR application (Vallentin-Holbech & Majgaard, 2020). Here the participant gets first-hand experience of the potential consequences of being drunk at a party. Likewise, a simulation providing the participants, for example teachers, with experiences of having severe mathematical learning difficulties could enhance their understanding of the difficulties and increase their empathy for people with dyscalculia or severe mathematical learning difficulties.

Simulations as learning is related to the four stages of learning in Kolb's experiential learning cycle (Kolb, 1984). The first stage is focused on engaging in a new activity or experience. Here the learners achieve a *concrete experience* with the situation or content of the activity. In the next stage the learners *reflect on and observe* the experiences from different perspectives, for example the emotions and physical and sensory aspects of the experience. The third stage, the *abstract conceptualisation* stage, is where the learners develop generalisations or theories based on the observations and reflections, and this involves developing abstract ideas or concepts that can be applied to similar situations. In the final stage the learners apply their new knowledge and test their theories through *active experimentation* in new situations, thus building on prior experience and refining their understanding of the topic.

The aim of the current developmental project is to focus on the first stage, that is, creating an interactive experience to help teachers reflect on the difficulties of students with dyscalculia or severe mathematical learning difficulties. However, in the trialling of the simulator, the participants will go through stage two and to some extent stage three, as they will be asked to reflect on and observe the experience as well as discuss and develop ideas for teaching that can be applied in real life situations with students in the classroom.

Developing the simulator

The work with the dyscalculia simulator is inspired by similar simulators for dyslexia, such as Dyslexia Simulator (n.d.) by Harvard University and others featured on the PBS website (n.d.). These simulators generally work by scrambling letters shown in a text, requiring a person to concentrate in order to discern what has been written. We chose a similar approach with the dyscalculia simulator.

The aim was to design a simulation that would recreate the feelings and frustrations that a person with dyscalculia can experience when participating in a typical mathematics lesson. The design of the simulator was guided by research on simulations as tools for learning and creating empathy, as described above, and interviews with expert researchers and practitioners as well as two persons with dyscalculia. Based on this we developed a series of tasks typical of a mathematics lesson and manipulated them to simulate the difficulties a dyscalculic person would experience. The tasks concern reading numbers, reading time on an analogue clock, doing simple calculations, paying with cash in a shop situation, measurement and reading a ruler and lastly using a calculator. These tasks were tested in a real-life analogue setting (low fidelity prototype) as described below.

One example is a calculation task written in blue but disguised with red text and drawings making it difficult to find the numerical information necessary to perform the calculations. The participant was given a tool, a piece of red film, which helped highlight the numbers in the tasks (Figure 1A). The calculator on which the partici-

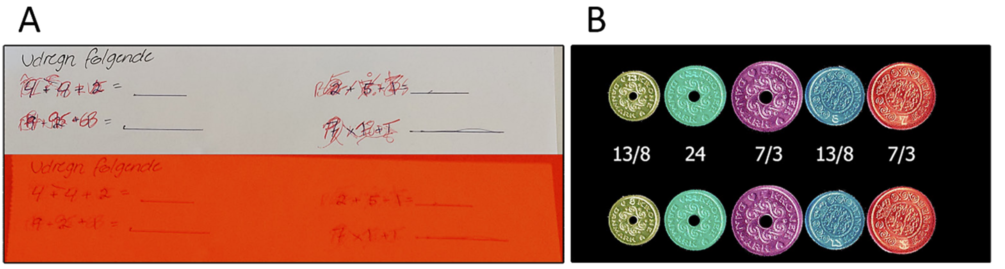


Figure 1. *A: Examples of the arithmetical tasks where the numbers are disguised with red and when the tool 'removes' the red making the blue numbers stand out. B: The coins used in the shop situation. From Davis et al. (2023).*

pants were to do all calculations and provide all numerical answers was manipulated during the participants' work: numbers were randomly assigned and occasionally a random number was duplicated and thus another number disappeared, for example a situation where the calculater had two 2s and no 4. In the shop situation the coins were assigned different and atypical values making it a laborious task to find the correct amount (Figure 1B).

Testing the analogue prototype

The first prototype was tested on seven university students without mathematical difficulties to test whether the simulation provoked the intended feelings. Participants were informed about the aim of the study, that participation was voluntary and that they could stop at any moment during the session. Each participant completed a 25-minute session in a setting simulating a classroom lesson. The participants' actions and responses were videorecorded for further analysis. After the session the participants were debriefed about what they had been exposed to during the session and how they were deceived as part of the simulation. This is standard procedure in experiments where participants are deceived in any way (American Psychological Association, 2017, section 8.07 and 8.08). The debriefing is to allow dehoaxing to occur and to reverse any negative effects the experience may have had (Fanning & Gaba, 2007).

The recordings showed that participating in the simulation induced strong reactions, with participants getting visibly irritated and feeling insecure, for example by saying "is this correct? If it is not correct, then I do not know what else to do." Overall, the participants exhibited the difficulties and behaviour very much similar to what can be observed with children experiencing difficulties in a classroom (Park et al, 2024).

To evaluate the use of the simulation with teachers, we asked a group of teacher students to describe what behaviour they noticed in the video recordings of the analogue prototype and reflect on how students with dyscalculia or severe mathematical difficulties could be supported in the classroom based on the observed reactions of

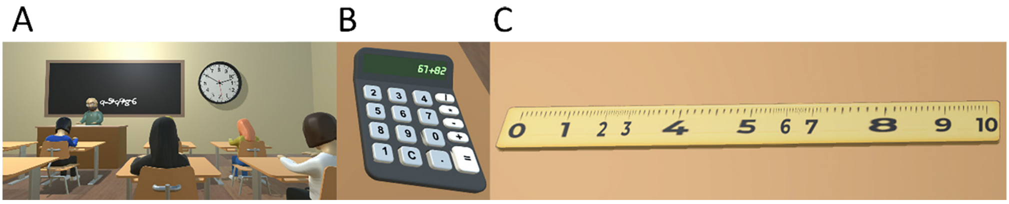


Figure 2. *A: The virtual world: a classroom setting as seen from the participant's 'desk' in the classroom. The teacher is standing by the blackboard, and he gives oral instructions throughout the simulation. The participant can 'look down' on the table in front of them, where the different assignments and a calculator are placed, or 'look up' to see assignments on the blackboard or when asked to read the time. B: The calculator is used to submit all answers. During the session the numbers on the calculator are manipulated. The position of the numbers shifts whenever the participant is navigating to the task (and cannot see the calculator on the screen) and occasionally a number goes missing. In the shown situation, the calculator has been manipulated so 4 is missing and there are two 2s. C: The ruler is used as a tool to read the numbers in a task and for measuring the length of a rectangle. The numbers are constantly moving on the ruler making it difficult to ascertain the correct length. From Davis et al. (2023).*

the participants. The students provided written notes on a) the observed behaviour of the participants in the videorecording of the simulation, b) what elements in the teaching activities and the context enforced or remediated the participants reactions and c) what parallels, if any, they could see to their own experiences with classroom teaching.

Development of the digital prototype

In this phase we focused on developing a virtual world and translating our concepts into a digital interaction. The virtual world is a classroom where the participant is situated in the back of the class and the teacher is standing in front of the class by a blackboard and an analogue clock is pictured on the wall beside the blackboard (Figure 2A). Throughout the simulation the participant is asked to read the time. A calculator and a ruler are placed on the participant's table (Figure 2B and 2C). All calculations and answers have to be submitted on the calculator. The ruler has a double function: it can assist in making numbers easier to read (Figure 3B) and it is used in a measurement task. During the simulation the participant works with different tasks that are manipulated to simulate the cognitive demand of reading and processing numerical information that a person with dyscalculia would experience and the emotions this could inflict.

Figure 3. *Examples of tasks in the simulator. A: During the 'lesson' the participant is asked to read the time on a manipulated analogue watch. B: The tasks written on paper flickered to make it difficult to read the numbers. Placing a ruler underneath the numbers in the task would freeze the numbers. From Davis et al. (2023).*

The first task is a set of arithmetical problems. Here the numbers are manipulated to flicker, making it difficult to read the numbers and operations, and the participant needs to use the ruler to stabilise the numbers (Figure 3B). When asked to read the time, the analogue clock is manipulated in different ways on each occasion (Figure 3A). Other tasks were doing calculations written on the blackboard, where occasionally a number or an operation was changed so the participant would give a wrong answer without realising why. Finally, the participant was asked to count a number of specific objects, for example triangles, on a picture with many different objects. When the participant gave their answer the tasks were manipulated to contain a different number of the objects, so the answer became wrong.

Debriefing was in the form of a video immediately after finishing the manipulation. Here one of the authors and an adult person with dyscalculia describes different aspects of the simulation and how the participant had been deceived in order to provoke the feeling similar to what a person with dyscalculia would experience. This was to ensure that the participant did not get a false understanding of the disability. For example, a person with dyscalculia does not experience numbers as flickering; the flickering is a way of provoke the feeling of frustration and inadequacy similar to what a person with dyscalculia could feel during a mathematics lesson. Furthermore, the video provides information on dyscalculia to support the learning experience of the participant. In this manner the debriefing is intended to enhance the learning outcome of the simulation-based learning (Fanning & Gaba, 2007).

Testing the digital prototype

To test the effect of the digital prototype we tested the simulator with six groups (72 students in total) of teacher students from UCL in Odense (students were in their first to fourth semester) and with 12 teachers from Bork Havn Efterskole. The test session involved pairing individuals, and one person went through the simulation (group A) while the other (group B) observed the reactions of the person participating in the simulation. Immediately after the session, the observer group B reported their observations and reflections on the participating person's (group A) reactions and any changes in behaviour or mood throughout the simulation. Group A participants completed a questionnaire after the test session wherein they were asked about their experience and mood during the session. Additionally, we ran a test with a group of 18 student teachers from VIA in Nørre Nissum, where all 18 student teachers participated in the simulation and completed the questionnaire. Participants were informed about the study before the testing, that participation was voluntary and that they could stop at any moment during the session.

The digital prototype was also tested in a similar manner by Pernille B. Sunde with a group of teacher students. After the simulation the teacher students discussed the experience and reflected on which aspects of the simulated teaching session and the teacher's behaviour triggered the different behavioural responses, and also whether they themselves had experienced similar behaviour with students in the classroom. The teacher students were then asked to discuss and suggest possible solutions and activities that would support students with dyscalculia and how teachers should engage with these students to meet their needs.

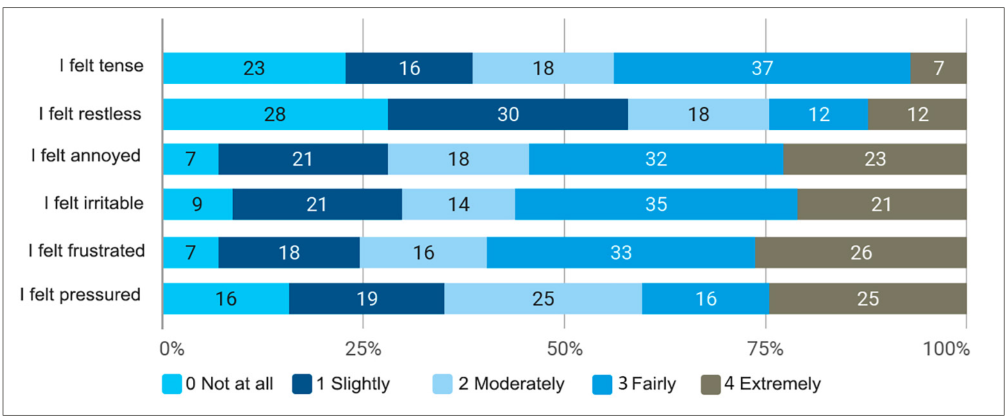


Figure 4. *The distribution of answers for 59 participants on their experienced emotions during the simulation on a scale from 0 (not at all) to 4 (extremely). The introduction to each question was: Please indicate how you felt going through the simulation for each of the questions. From Davis et al. (2023).*

Results of the questionnaire

The responses to the questionnaire showed that the simulation affected both those who participated in the simulation (Figure 4) as well as those observing a person doing the simulation (Figure 5).

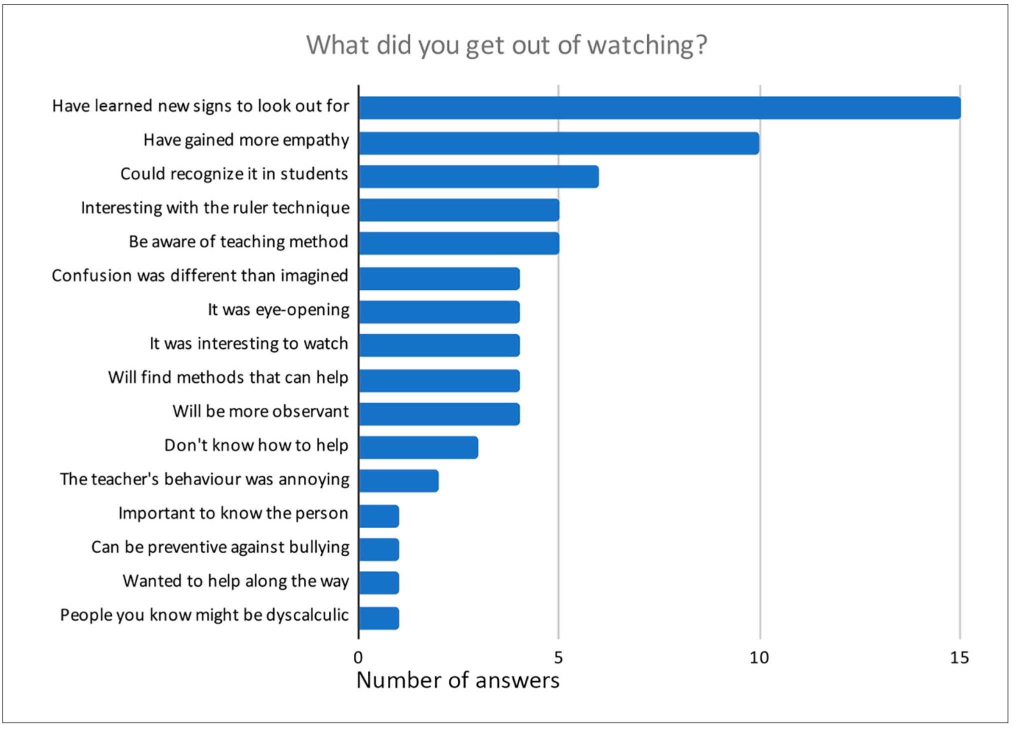


Figure 5. *The authors' categorisation of the observes' (n = 70) open answers to what their outcome and reflections were after watching another person participate in the simulation. From Davis et al. (2023).*

Overall results and discussion

From the video recordings of the testing of the analogue prototype we observed a range of behaviour typical for students in mathematical difficulties, such as frustration, loss of trust in own ability, resignation and indifference towards the tasks. This indicated that it was possible to construct a simulation with the desired effect. From the testing of the digital prototype with the teacher students we found that the video recordings provided them with an insight into what a student with dyscalculia endures during a normal mathematics lesson. The teacher students engaged vividly in discussions on what aspects of the tasks and "the teacher's" behaviour enforced or remediated the participants' experienced difficulties. This led to suggestions on how to support students in the classroom and reflections on their own experiences with students in the classroom as well as different aspects of their own teaching practice. From these results it seems that a dyscalculia simulator has the potential to provide insight into how students with dyscalculia experience a typical mathematics lesson, which can potentially influence teachers' teaching practice. It is important to be aware that what is presented here is the first steps in the developmental process. Although the digital prototype seems to work as intended, we need to perform more detailed observations of and interviews with teachers going through the simulation and the debriefing video.

Next step and perspectives

The next step is to develop an online platform where the simulator will be made available together with background information on dyscalculia. We further plan to investigate the effect of engaging with the content of the platform through a largescale study where we will measure the effect on teachers' attitudes towards students with dyscalculia as well as changes in the teachers' approaches to teaching these students. It would be particularly interesting to gain insight into the teachers' and also teacher students' possible solutions and activities to support students with dyscalculia. With this dyscalculia simulator we hope to be able to give teachers and future teachers a better insight into the difficulties a person with dyscalculia experiences in working with numbers and mathematics in school, and thereby be able to give these students the help and support they need.

Acknowledgements

We wish to thank private consultant Pernille Pind for valuable information on dyscalculia and mathematical learning difficulties, two dyscalculic adults for providing insight into the difficulties and experiences of being dyscalculic and feedback on the simulator as well as teacher Bibbi Søgaard Visby, teachers from Bork Havn Efterskole and teacher students from UCL, Odense and VIA UC, Nørre Nissum and Silkeborg, for trialling the simulator.

Author contributions

The idea and development of the dyscalculia simulator is the work of the four co-authors, Jacob Frølund Davis, Johan Kørvel Sørensen, Nina Genster and Simone Lindhøj Rasmussen, as a bachelor project in Science in Engineering (Game Development and Learning Technology) at Syddansk Universitet (Davis et al. 2023). They all contributed equally to all aspects of the project. Pernille Bødtker Sunde has provided feedback on the development and trialling of the simulator and assistance in writing the paper.

Referencer

American Psychological Association. (2017). Ethical principles of psychologists and code of conduct (2002, amended effective June 1, 2010, and January 1, 2017). http://www.apa.org/ethics/code/index.html

PBS (n.d.). Misunderstood Minds, Decoding Activity. PBS.org. Retrieved from https://www.pbs.org/wgbh/misunderstoodminds/experiences/readexp1a.html

Bengtsson, S. & Larsen, L.B. (2013). “Talblindhed – en forskningsoversigt.” SFI – Det Nationale Forskningscenter for Velfærd

Billon, G., Attoe, C., Marshall-Tate, K., Riches, S., Wheildon, J., & Cross, S. (2016). Simulation training to support healthcare professionals to meet the health needs of people with intellectual disabilities. *Advances in Mental Health and Intellectual Disabilities, 10*(5), 284-292.

Davis, J.F., Sørensen, J.K., Genster, N. & Rasmussen, S.L. (2023). Simulation development for allowing a deeper understanding of dyscalculia. Bachelor project – Science in Engineering (Game Development and Learning Technology). Syddansk Universitet.

Dyslexia Simulator (n.d.). HGSE Teaching and Learning Lab. Retrieved from
https://tll.gse.harvard.edu/dyslexia-simulator

Egmont (2023). *Egmont Rapporten 2023. Regn med os – bedre hjælp til børn og unge i matematikvanskeligheder.* Egmont.

Epinion. (2020). Forskningsoversigt om talblindhed. DPU. https://emu.dk/sites/default/files/2020-11/Forskningsoversigt%20om%20talblindhed_2020.pdf

Fanning, R.M., & Gaba, D.M. (2007). The role of debriefing in simulation-based learning. *Simulation in healthcare, 2*(2), 115-125. DOI: 10.1097/SIH.0b013e3180315539

Issenberg, S.B., McGaghie, W.C., Petrusa, E.R., Lee Gordon, D., & Scalese, R.J. (2008). Effectiveness of simulation-based learning in health professions education: A systematic review and meta-analysis. *Academic Medicine, 83*(10), 1-10.

Kolb, D.A. (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development.* Prentice-Hall.

Meyers, S., Rowell, K., Wells, M., & Smith, B.C. (2019). Teacher empathy: A model of empathy for teaching for student success. *College Teaching, 67*(3), 160-168.

Mikkelsen, M., Rangvid, B.S. & Jensen, V.M. (2023) *Børn og unge i matematikvanskeligheder. En registeranalyse af konsekvenser og kendetegn*. VIVE, Det Nationale Forsknings- og Analysecenter for Velfærd.

Pallavicini, F. (2020). *Video Games to Foster Empathy: A Critical Analysis of the Potential of Detroid: Become Human and the Walking Dead.* Lecture Notes in Computer Science.

Park, Y., Gi Seo, D., Martin, M., & Lee, J. (2024). An Exploration of Causal Relationships Between Behavioural/Emotional Difficulties and Academic Achievement: A Path Model Approach. International Journal of Disability, *Development and Education*, 1-19. https://doi.org/10.1080/1034912X.2024.2337172

Price, G.R., & Ansari, D. (2013) Dyscalculia: Characteristics, Causes, and Treatments. *Numeracy 6*(1), Article 2. DOI: http://dx.doi.org/10.5038/1936-4660.6.1.2

Tong, X., Ulas, S., Jin, W., Gromala, D., & Shaw, C. (2017). The design and evaluation of a body-sensing video game to foster empathy towards chronic pain patients. In *Proceedings of the 11th EAI International Conference on Pervasive Computing Technologies for Healthcare* (pp. 244-250).

Vallentin-Holbech, L. & Majgaard, G. (2020) Co-Creating a Virtual Alcohol Prevention Simulation with Young People. *International Journal of Environmental Research and Public Health.*

Vigna, G., Ghidoni, E., Burgio, F., Danesin, L., Angelini, D., Benavides-Varela, S., & Semenza, C. (2022). Dyscalculia in early adulthood: implications for numerical activities of daily living. *Brain Sciences, 12*(3), 373.

Dansk abstract

I dette udviklingsprojekt præsenterer vi en første version af en dyskalkuli-simulator. Målet var at støtte især matematiklærere til en bedre forståelse af de vanskeligheder, elever med dyskalkuli oplever i fx matematiktimerne. Vi udviklede derfor en simulation, et virtuelt klasseværelse, hvor fx en matematiklærer, kan opleve nogle af de samme vanskeligheder, som en person med dyskalkuli oplever i en matematiktime. Simulatoren blev testet på lærere og lærerstuderende. Resultaterne viser, at dyskalkuli-simulatoren har potentiale til at give indsigt i og refleksioner over, hvordan elever med dyskalkuli oplever det at skulle arbejde med tal og udføre almindelige regneoperationer i en typisk matematiktime.

Styrkelse af elevers talforståelse – en tidlig og målrettet indsats i Helsingør Kommune

Mette Thompson, Helsingør Kommune

Abstract: *Artiklen beskriver elementer i et udviklingsarbejde som sigter efter at forbedre elevers talforståelse gennem tidlig og målrettet indsats. En test til bestemmelse af elevers talforståelse og dens tilblivelse beskrives, efterfulgt af en kort beskrivelse af indhold, organisering og resultater af målrettet indsats på tre niveauer. Artiklen trækker på både praktisk erfaring og teori og forskning inden for det matematikdidaktiske felt og fokuserer på elevers udvikling af talforståelse og hvordan denne kan belyses. Testresultater fra 2021-2024 tyder på at den målrettede indsats har betydet en bedre talforståelse hos skolens elever.*

Indledning

På bagsiden af Helsingørtesten besvarer Sarah fra 8. klasse spørgsmålet "Hvordan har du det mest, når du har matematik?" ved at markere en rød smiley og tilføjer: "Fordi jeg er rigtig dårlig til matematik og jeg bliver rigtig sur på mig selv når jeg ikke kan finde ud af noget. Og jeg bliver altid stresset fordi jeg føler mig bagud i forhold til de andre."

Hvis dette er den følelse som nogle elever har når de har matematik, så kan det være svært at forestille sig at de har optimale muligheder for at lære matematik.

> "Jeg tror godt, jeg kunne være blevet god til matematik, hvis min første matematiklærer havde håndteret mine vanskeligheder anderledes" (Egmont Fonden, 2023, s. 13).

Udtalelsen stammer fra Bertram i Egmont Fondens årsrapport *Regn med os*. Bertram har haft det svært med matematikken længe og beskriver hvordan han gennem sin skolegang har følt sig forkert, vred, frustreret og opgivende. Sarahs og Bertrams oplevelser er desværre ikke enestående, og udtalelser som disse får en til at overveje hvordan man kan gribe tidligt ind, og om elevernes oplevelser med matematik bør være en indikator for hvordan man griber ind.

I Helsingør Kommune har vi igennem de sidste par år arbejdet på at finde modeller for hvordan vi kan lave tidlige og målrettede indsatser med henblik på at ændre *mest for flest* elever.

Denne artikel tager udgangspunkt i Skolen ved Gurrevej, hvor matematikvejleder Dorthe Riedel oplevede at der var mange elever i 0.-2. klasse som havde svært ved at huske hvad tallene hed. Derfor blev der valgt et fagligt fokus på talforståelse, regnestrategier og lyst til matematik.

Som matematikkonsulent arbejder jeg sammen med skolerne om udviklingen af matematikfaget med vores fælles retningslinjer for matematik som omdrejningspunkt. Tre af disse retningslinjer er:

- Alle elever skal evalueres årligt.
- Ledelsen, matematikvejlederen og lærerne skal umiddelbart i forlængelse af evalueringen mødes og drøfte elevernes resultater på en såkaldt fagkonference.
- Elever der er i matematikvanskeligheder, skal identificeres, og der skal igangsættes indsatser.

Da der ikke var nogen evaluering på markedet der havde specificeret fokus på talforståelse, kastede vi os ud i at lave en test der kunne belyse hvor eleverne var i deres talforståelsesudvikling. Vi navngav den "Talforståelsestesten" (Thompson & Riedel, 2021), men den bliver oftest kaldt "Helsingørtesten".

Denne artikel falder i tre dele: I den første del sættes der fokus på erfaringer opsamlet fra praksis i forhold til elevers udvikling af talforståelse, og der trækkes samtidig på teori og forskning. I den anden del beskrives testens indhold, udvikling og valideringsproces i korte træk. I den sidste og afsluttende del beskrives de interventioner og indsatser som er afprøvet på skolen. Jeg tillader mig at skrive "vi" og "vores" mange steder da denne artikel er et indblik i et udviklingsarbejde og dermed noget vi har gjort i fællesskab. Beskrivelserne af praksis vil koncentrere sig om Skolen ved Gurrevej. Men i Helsingør er der 22 dygtige matematikvejledere fordelt på 16 matrikler, og alle har bidraget.

Erfaringer fra praksis og forskning

"47 … 47 … 47 … hvordan er det nu det ser ud?" Citatet stammer fra en elev, Emilie, der i 3. klasse forsøger at gentage tallet der skal skrives, i håb om at noget dukker op.

I min tid som matematiklærer, vejleder og konsulent har jeg gennem mange år arbejdet med elever der har haft svært ved at automatisere tallene. Altså svært ved at huske og forbinde symbolet med talnavnet. Det er ofte sværere for eleverne at skrive tal der siges højt, end at læse tal. Vanskeligheder med at automatisere tallene medfører ofte at eleverne kan opleves som rigide i deres anvendelse af tallene. 17 er 17, og det giver ikke mening for eleverne at 17 kan opdeles i 10 + 5 + 2. Denne rigiditet kan gøre det svært at regne med tallene.

Når eleverne endelig har automatiseret de naturlige tal, er undervisningen og klassekammeraterne ofte nået til de rationale tal. Dette kan medføre at nogle elever generaliserer og overfører deres viden fra de naturlige tal til de rationale tal, hvilket fx betyder at 3,17 (tre komma sytten) bliver større end 3,3 (tre komma tre), da 17 i de naturlige tal er større end 3.

Derfor er elevernes automatisering af tallene, rigiditeten i regnestrategierne og tilegnelsen af rationale tal forsøgt afdækket i Helsingørtesten.

Forståelse som et indre netværk

For at tænke med og om matematik er vi nødt til at repræsentere den. Sfard (1991) pointerer at matematik ikke kan ses eller røres, og at repræsentationer blot er repræsentationer. Evnen til at kunne "se" og danne mentale billeder er afgørende for udviklingen af den matematiske forståelse. Manglende evne til at "se" kan være en af de største årsager til at matematik kan virke ulogisk for nogen. Eksemplet med Emilie der håber at noget dukker op, er netop et udtryk for at hun mangler den mentale repræsentation af tallet 47.

Forståelse er ifølge Hiebert og Carpenter (1992) den måde hvorpå en persons interne repræsentationer er strukturerede. Mens graden af forståelse er afgjort af antallet og styrken af forbindelserne mellem repræsentationerne.

Repræsentationer i matematik kan overordnet beskrives på tre måder: *den konkrete repræsentation*, fx den fysiske brøkrude, Base 10-klodserne eller centicuben, *den ikoniske repræsentation*, fx en illustration af brøkruden eller Base 10, og *den abstrakte repræsentation* som tekst og symboler (Bruner & Kenney, 1965).

Denne anvendelse af forståelse er forsøgt overført til Helsingørtesten, men især anvendes den til at understøtte indsatserne for hvordan man kan opbygge forståelse for tal hos elever i matematikvanskeligheder.

Fra talfornemmelse til talforståelse

En del forskning inden for kognitionsvidenskab har forsøgt at identificere de mest basale processer der danner grundlaget for al matematisk læring, og som, ved mangel på disse, kan føre til matematikvanskeligheder (Lindenskov & Lindhardt, 2023). Det drejer sig bl.a. om forskning der beskriver talfornemmelsen, den tidlige talforståelse og basisprocesser der grundlægger talforståelsen. I det følgende vil jeg lave enkelte nedslag i teorierne og koble disse til Helsingørtesten.

Vi er som menneskerace født med talfornemmelse, hvilket vi har tilfælles med andre pattedyr. Det dækker kort skitseret over to områder. *Subitizing* er evnen til at bestemme et mindre antal præcist uden at gøre brug af det at tælle. Det kan fx være en mængde af tre. Det andet område er *approximate number system* (ANS) som er evnen til at estimere mængder og forholde sig til deres størrelse (Feigenson et al., 2004).

Der er forskning som viser at svaghed inden for talfornemmelse (ANS og subitizing) kan være tegn på at barnet kan komme i matematikvanskeligheder, da det danner grundlaget for talforståelsen (Wilson & Dehaene, 2007). Nguyen et al. (2016) finder at den tidlige talforståelse er den stærkeste indikator for senere matematikpræstationer. Nguyen et al. (2016) henviser bl.a. til specificeringen hos Clements og Sarama (2007, s. 476): "The capstone of early numerical knowledge, and the necessary building block for all further work with number and operations, is connecting the counting of objects in a collection to the number of objects in that collection."

Den tidlige talforståelse som Nguyen et al. (2016) anvender, dækker altså over mere end den medfødte talfornemmelse (ANS og subitizing) og karakteriseres bl.a. ved at kunne tælle verbalt, både frem og tilbage fra et givent tal, og have styr på én til én-korrespondance i optællinger.

I Helsingørtesten afsøges optællingen i opgaver hvor eleven optæller sorterede og organiserede elementer som understøtter subitizing.

Lindenskov og Lindhardt (2023) konkluderer i *Vidensopsamling – elever i matematikvanskeligheder* at "en svækkelse i de basale talprocesser som f.eks. ANS, subitizing, symboler af antal samt tal i rækkefølge kan føre til matematiske indlæringsvanskeligheder, der kan begrunde f.eks. talblindhed" (Lindenskov & Lindhardt, 2023, s. 34). Derfor er det væsentlige elementer at få afsøgt hos eleverne.

For at afdække talforståelsen anvendes der i testen forskellige elementer af den matematiske forståelse der forskningsmæssigt karakteriseres som stærke indikatorer for senere matematiske præstationer. Fx det

- at forbinde talsymboler med talnavnet (Noël & Rousselle, 2011), fx evnen til at forbinde "syvogfyrre" med symbolet "47"
- at forstå numeriske størrelser (Laski & Siegler, 2007), fx det at kunne placere et tal på en tallinje eller estimere hvilket tal der er placeret på en åben tallinje
- at anvende tallene flydende og fleksibelt til hovedregning, estimering og genkendelse af hvorvidt et resultat giver mening (Markovits & Sowder, 1994; Sowder, 1992), fx det at kunne stoppe op og genoverveje resultatet hvis man får 15.030:15 til 102.

Talforståelsen er ikke blot en grundlæggende byggesten for matematisk forståelse, men understøtter endvidere udviklingen af elevernes matematisk mindset. Boaler (2016, kapitel 4) pointerer vigtigheden af at dykke ned i elevernes udvikling af talforståelse. Dette er ikke blot fundamentet for deres videre matematiske viden, men også afgørende for udviklingen af et matematisk mindset. Ifølge Boaler (2016) er et sådant mindset karakteriseret ved en flydende og fleksibel tænkning samt evnen til at identificere mønstre og systemer i matematikken, hvilket er afgørende for at tilføre mening til faget. Hendes pointe er bl.a. at ved at lære hvordan elever udvikler talforståelse, lærer vi også hvordan vi udvikler det matematiske mindset.

Talforståelsen er for matematik hvad læsning er for dansk. Derfor er det vigtigt at vi forholder os til hvordan det går med elevernes udvikling af talforståelsen og alle dens mange delelementer.

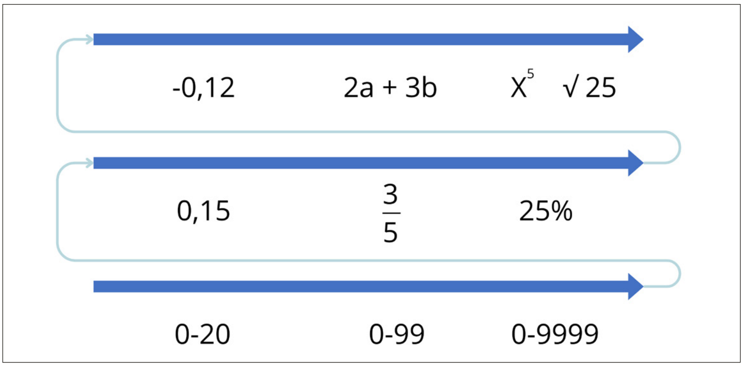
Testen kort fortalt

Vi har udviklet 10 tests med stigende progression (se figur 1), og alle tests (TF1-TF10) sigter mod at afdække elevens talforståelsesniveau (Thompson & Riedel, 2021). Testen begynder med opgaver der afdækker elevens forståelsesniveau for de naturlige tal. Herefter fokuseres på elevens forståelse af de rationale tal. Alle tests tager maks. 25 min., hvilket gør det til en kort screening.

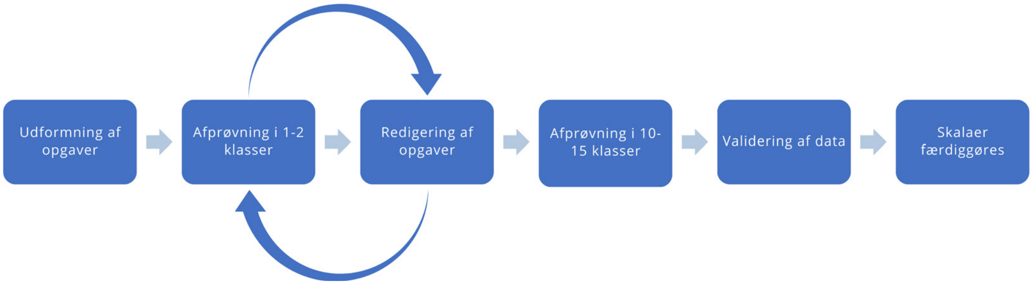
Talforståelsesniveauet afdækkes via opgaver der søger at belyse:

- elevens evne til symbolbeherskelse i forhold til tal og deres navne
- elevens evne til at antalsbestemme tals størrelse og sammenhæng
- elevens evne til at placere tallene i rækkefølge.

Da forståelse afgøres af det interne netværk og styrkelsen af forbindelserne mellem repræsentationerne (Hiebert & Carpenter, 1992), har vi forsøgt at afdække graden af elevernes forståelse for tal ved at lave opgaver der afsøger elevernes forståelse for flere forskellige repræsentationsformer og deres interne forbindelser.



Figur 1. *Den indlejrede progression i testene*



Figur 2. *Arbejdsgangen fra udformning til validering*

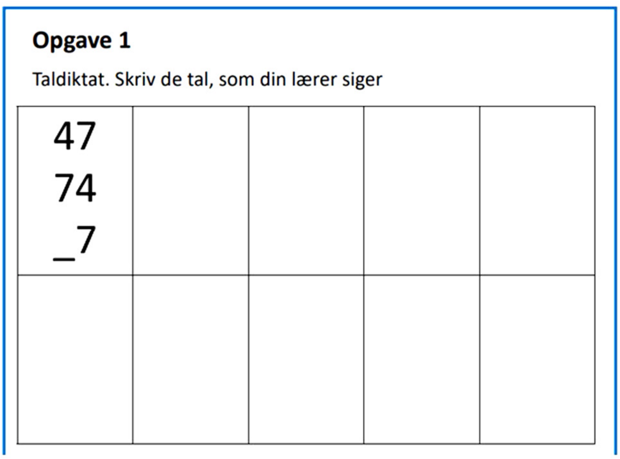
Eleverne skal have den bedst mulige oplevelse. Derfor skal læreren altid have en kuglepen i hånden så læreren kan understrege ord, sætte ring om et tal eller i sidste ende skrive svaret hvis der er behov for en starthjælp. Situationen bliver her noget andet end traditionel testpraksis hvor man sommetider hører sig selv sige: "Jeg må ikke hjælpe dig, for det er en test."

Designprocessen

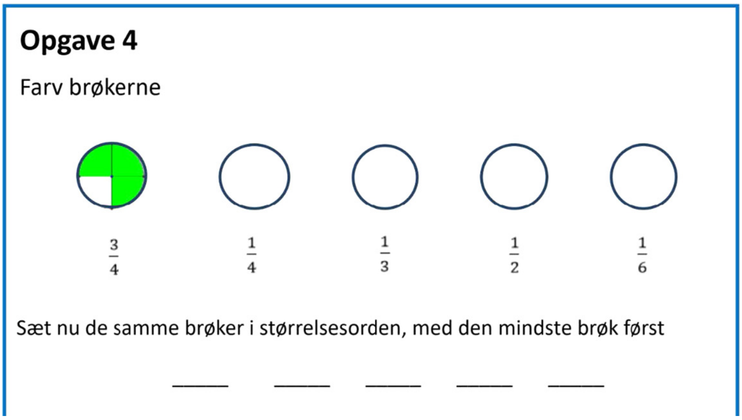
Vi begyndte med at lave en række opgaver til ét årgangstrin som vi herefter afprøvede i et par klasser. Vi redigerede og afprøvede opgavesættet indtil vi mente at opgaverne gav os den indsigt som vi eftersøgte (se figur 2). Herefter indsamlede vi elevbesvarelser fra 10-15 klasser og fik statistiker Svend Kreiner, som er adjungeret professor ved DPU, Aarhus Universitet, og erfaren testudvikler, til at lave de statistiske analyser.

Et par eksempler

Figur 3 viser taldiktaten i TF2. Her dikterer læreren 10 tal som eleverne skal skrive. Formålet er at vurdere elevernes symbolbeherskelse af de naturlige tal fra 0 til 100. De hyppigste fejltyper er at eleverne bytter rundt på 10'ernes navne, altså skriver fx



Figur 3. *Hyppigste fejltyper i opgave 1 i TF 2*

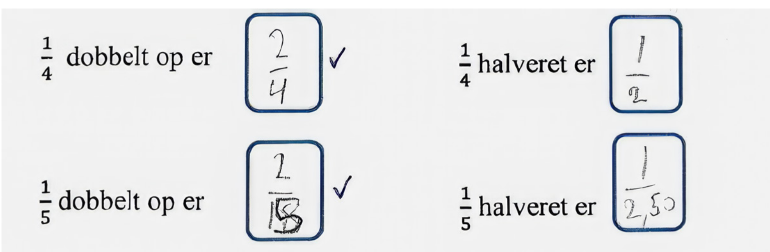


Figur 4. *Opgave 4 i TF5*

87 i stedet for 97, eller laver cifferbyt hvor fx tallet 74 noteres som 47. Såfremt der er elever som ikke kan notere tallet der dikteres, kan de få hjælp. Læreren kan spørge: "Hvordan tror du det ser ud? Skriv det du kan høre." Med kuglepennen i hånden kan læreren i sidste ende notere tallet for eleverne. Dette får langt de fleste elever til at blive i opgaven under testforløbet.

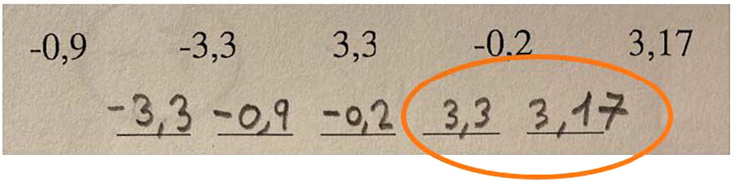
Inden for forskellige discipliner som fx de naturlige tal, decimaltal eller brøker er der tænkt en løbende progression op gennem testene. Fx starter brøkopgaverne i TF4 med at eleverne skal illustrere brøkens størrelse. Sværhedsgraden stiger gennem sættene – fra de ikoniske repræsentationer som simple illustrationer af brøker til de mere abstrakte repræsentationer som at sætte brøker i størrelsesorden (figur 4) eller fordoble og halvere brøker (figur 5). Opgaver som disse kan være med til at belyse hvor langt eleverne er i deres brøkforståelse. Figur 5 viser en elev med en begyndende forståelse for brøker, da fordobling er inden for elevens forståelsesniveau. Men ved halvering anvendes erfaringer fra de naturlige tal.

Opgaver hvor elever skal sætte forskellige tal i størrelsesorden, er ligeledes meget informative i forhold til at belyse elevernes forståelsesniveau for decimaltal. En typisk fejl ses i figur 6 hvor eleven lader sin forståelse af de naturlige tal gælde for de rationale tal, så 3,3 er mindre end 3,17.



Figur 5. *Elevbesvarelse af opgave 5 i TF8*

Figur 6. *Elevbesvarelse af opgave 2 i TF7*



Testens intention er på denne måde at afsøge information om hvor langt eleverne er kommet i deres talforståelse inden for de forskellige numeriske discipliner.

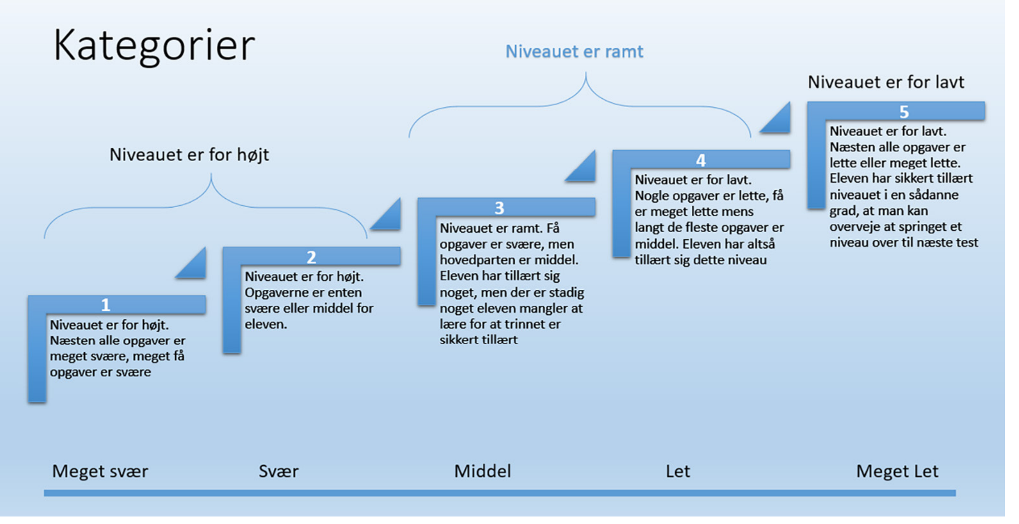
De endelige tests bestod af 40 opgaver i hvert af de 10 sæt og blev testet på 300-400 elever. Der er udført statistiske analyser på ni sæt. Heriblandt Rasch-analyse som er en statisk metode der anvendes til at vurdere og forbedre testens pålidelighed og validitet. Analyserne viste at testen pålideligt og gyldigt kan måle elevernes talforståelsesniveau.

Fra validering til kriteriebaserede skalaer

For at bestemme færdighedsniveauet blev de 40 opgaver analyseret og kategoriseret efter sværhedsgrad. En opgave blev kategoriseret som "meget let" hvis sandsynligheden for et korrekt svar var større end 90 %, "let" hvis den var større end 75 %, "svær" hvis sandsynligheden for et forkert svar var større end 75 %, og "meget svær" hvis den var større end 90 %. Tabel 1 viser fordelingen af opgaver for eleverne ud fra elevernes score (antal point fra testen).

Score	Theta	Very easy	Easy	----	Difficult	Very difficult
1	-18.76	0	0	0	0	7
2	-2.01	0	0	0	1	6
3	-1.47	0	0	1	1	5
4	-1.18	0	0	2	0	5
5	-0.99	0	0	2	2	3
6	-0.86	0	0	2	4	1
7	-0.76	0	0	2	4	1
8	-0.68	0	0	3	3	1
9	-0.61	0	0	3	3	1
10	-0.55	0	0	4	2	1
11	-0.49	0	0	5	2	0
12	-0.45	0	0	5	2	0
13	-0.40	0	0	5	2	0
14	-0.35	0	0	5	2	0
15	-0.31	0	0	6	1	0
16	-0.27	0	0	6	1	0
17	-0.23	0	0	6	1	0
18	-0.19	0	0	6	1	0
19	-0.14	0	0	6	1	0
20	-0.10	0	0	6	1	0
21	-0.06	0	0	7	0	0

Tabel 1. *Uddrag af dataoversigt over TF2 udarbejdet af Svend Kreiner*



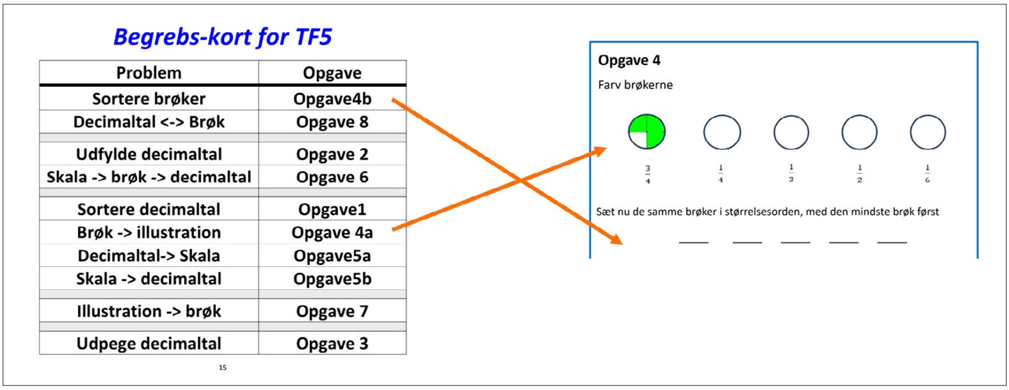
Figur 7. *De fem kategorier på baggrund af den statistiske analyse*

En analyse af de bagvedliggende delopgaver gør det muligt at lave fem forskellige kategorier hvor datasættet ændrer sig markant (figur 7).

En elev i den første kategori finder mange opgaver i testen vanskelige, mens en elev i den sidste kategori finder alle opgaver lette at besvare. Derfor anbefales det at elever i kategori 1 og 2 testes med en test på et lavere niveau for at finde det færdighedsniveau de er på. Hvis scoren placerer eleverne i kategori 3 eller 4, er testniveauet korrekt. Placerer scoren eleverne i kategori 5, er de blevet testet i en test der er på for lavt et niveau. Læreren kan således bruge testen til både at kortlægge elevernes niveau inden for talforståelse og at placere eleverne på det niveau der passer til deres forståelsesniveau. Testene kan dermed anvendes som et testbatteri hvor eleverne ikke testes i den samme test, men i den test der bedst belyser deres forståelse.

Yderligere analyser af oversigterne giver indblik i hvad der kan være væsentlige opmærksomhedspunkter i opbyggelsen af elevernes talforståelse. Fx viser figur 8, en oversigt over opgaverne i TF5 sorteret efter faldende sværhedsgrad, at elever i 4. klasse finder det markant lettere at illustrere brøker, mens det at sætte de selvsamme brøker i størrelsesorden er den sværeste opgave i sættet. Dette kom bag på os.

Dette kunne indikere at koblingen mellem illustrationer af en brøker og deres indbyrdes størrelsesforhold for nogle elever ikke er logisk. Vi er derfor i færd med at undersøge hvordan denne kobling i undervisningen af brøker kan understøtte elevernes forståelse for brøker.



Problem	Opgave
Sortere brøker	Opgave4b
Decimaltal <-> Brøk	Opgave 8
Udfylde decimaltal	Opgave 2
Skala -> brøk -> decimaltal	Opgave 6
Sortere decimaltal	Opgave1
Brøk -> illustration	Opgave 4a
Decimaltal-> Skala	Opgave5a
Skala -> decimaltal	Opgave5b
Illustration -> brøk	Opgave 7
Udpege decimaltal	Opgave 3

Figur 8. *Delopgave 4a er lettere end delopgave 4b i TF5. Oversigt udarbejdet af Svend Kreiner*

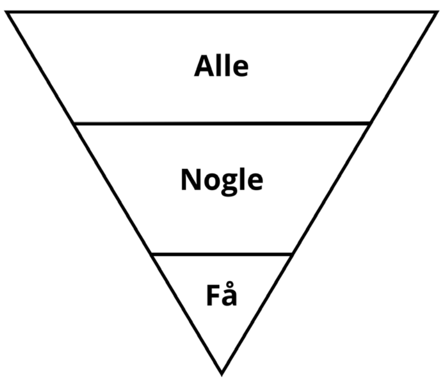
Indsatsen på skolen

Testen er et evalueringsredskab, men må (ligesom alle andre evalueringer) ikke stå alene. Det kan være med til at belyse en problemstilling og give en indsigt i hvor langt eleverne er nået i deres talforståelse. Men det har også givet indsigt i fx hvilke tegn man som skole, vejleder og lærer skal være opmærksomme på i forhold til elevernes udvikling af deres talforståelse. Dette har igen åbnet op for nye indsigter og indsatser.

På skolen har det overordnede fokus på talforståelse medført at der nu iværksættes indsatser på tre forskellige niveauer (figur 9).

Alle elever skal fx præsenteres for de mange måder at repræsentere tal på. Derfor er der udarbejdet en stor fælles materialesamling som indeholder både konkrete, ikoniske og abstrakte materialer.

- Der er noget "alle elever" skal arbejde med for at udvikle en flydende og fleksibel talforståelse,
- der er noget "nogle elever" skal arbejde med, og
- der er noget "få elever" skal arbejde med.



Figur 9. *De tre indsatsniveauer*

Hiebert og Carpenter (1992) finder at der ikke nødvendigvis er en direkte sammenhæng mellem de interne (abstrakte) og de eksterne (konkrete og ikoniske) repræsentationer. Men elever der har arbejdet med Base 10, har en bedre intern repræsentation af tal end elever der udelukkende har arbejdet med den symbolske repræsentation af tal. En vigtig pointe er at det ikke er de konkrete materialer i sig selv der gør en forskel. Det er hvorvidt eleverne sættes i situationer der kan forbinde de konkrete materialer med deres allerede eksisterende interne netværk.

Alle matematiklærere i Helsingør har mulighed for co-teaching. Men på skolen har de inden for de sidste år lavet en særlig prioritering ved at lave en specifik indsats for *nogle elever*. Matematikvejleder Dorthe Riedel har otte timer til co-teaching i 12 uger i alle 0.- og 1.-klasser sammen med klassens matematiklærer, fordelt som treugersperioder over hele skoleåret. Dette giver mulighed for at udvikle en fælles forståelse for hvordan man giver eleverne muligheder for at lære og udvikle talforståelse. Den tidlige indsats skal sikre at flere børn får en bedre start på tallene.

De *få elever* der i 0., 1. og 2. klasse laver fejl i taldiktaten, modtager en individuel indsats. På grund af det snævre fokus på elevernes udvikling af naturlige tal kan indsatsen være meget kort. Dorthe gennemfører den på 10 min. 3-4 gange om ugen. Indholdet af indsatsen er designet til at træne de talområder som eleverne finder vanskelige. Der foretages løbende noter om aktiviteter som eleverne trives i, og de fordele eleverne opnår fra indsatsen. Forløbet afsluttes når eleverne har automatiseret det valgte talområde, eller efter 10 uger.

Indsatsen på andre skoler

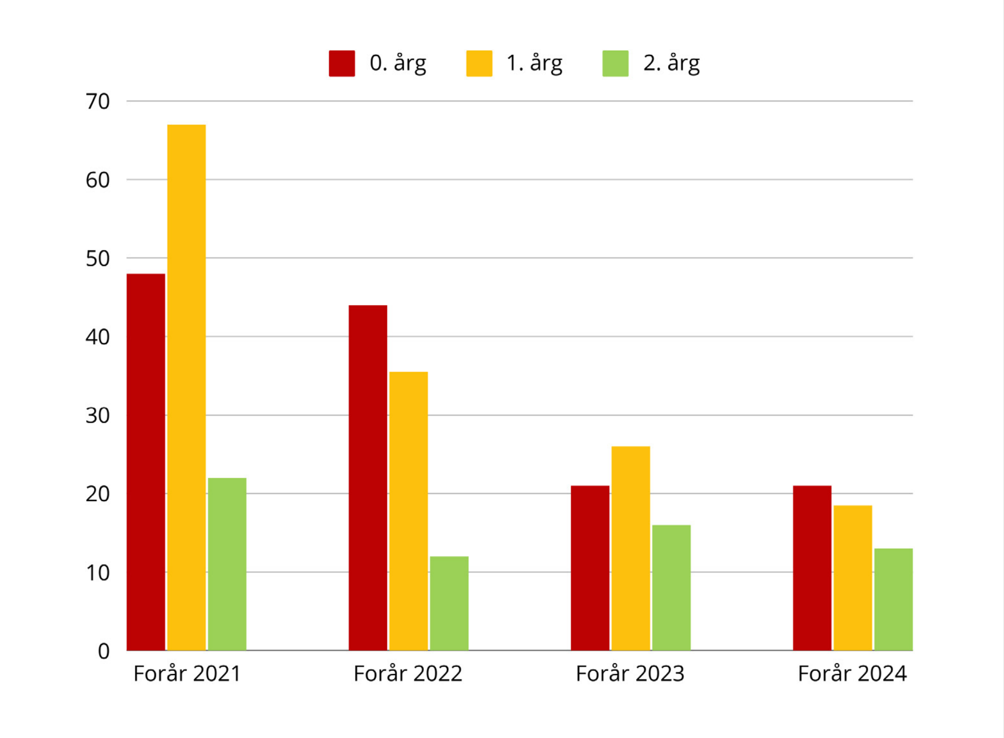
Det er ikke kun denne ene skole der arbejder med talforståelse. På baggrund af samtaler i vores kommunale matematikvejledernetværk har flere af de andre vejledere også valgt at have fokus på talforståelse. Derfor ser vi nu flere skoler der anvender testene til at afdække elevernes talforståelsesniveau og skræddersyr de tre indsatsniveauer (se figur 9) til at passe til deres skole, deres elever og deres muligheder for fx co-teaching.

Da vi deler vores erfaringer på en dertil indrettet hjemmeside, er der flere kommuner, skoler og matematiklærere der har adgang til testen og anvender den.

Igen er det vigtigt at bemærke at det at teste kun er en brøkdel af hele indsatsen for at styrke elevernes talforståelse. Men det var det værktøj vi manglede i vores værktøjskasse.

Afsluttende bemærkninger

På skolen er der siden 2021 sket tydelige forbedringer. Figur 10 viser at den procentvise andel af elever der laver fejl i taldiktaten og hermed får en individuel indsats, er faldet i årene 2021-2024.



Figur 10. *Diagram over andelen af elever der har fejl i taldiktaten fra 2021 til 2024*

Der er tydelig forskel på de klasser der har været involveret i den tidlige indsats, og de klasser der ikke har. Lærerne italesætter at de aldrig før har haft så dygtige elever der ikke kun har automatiseret tallene, men mere flydende og fleksibelt kan anvende tal i fx regnestrategier og problemløsning.

Det er vores erfaring at en forsinkelse i udviklingen af de naturlige tal kan have store konsekvenser for elevernes måde at tænke og forstå matematik på, og Egmont Rapporten 2023 (Egmont Fonden, 2023, s. 15) finder også at 4 ud af 10 elever der har udfordringer i 9. klasse, har haft udfordringerne siden 3. klasse.

Vores erfaring er at de elever der i slutningen af 1. klasse har svært ved at automatisere tallene, kan have svært ved at komme ud af deres vanskeligheder hvis ikke de får målrettet hjælp og støtte. Så ved at sætte et tydeligt, målrettet og fagligt fokus kan vi få identificeret de elever der tidligt i deres skoleforløb skal have en indsats for at sikre at de ikke fastholdes i deres matematikvanskeligheder.

Vores arbejde i Helsingør har vist at tidlig intervention og målrettet støtte er afgørende for at sikre at eleverne ikke fastholdes i deres vanskeligheder. Vi har set positive resultater på flere af kommunens skoler hvor antallet af elever der har brug for individuel indsats, er faldet fordi langt flere elever nu har automatiseret tallene.

Det kunne være interessant at få undersøgt om denne tilgang til at identificere og støtte elever kunne være en repræsentativ og sikker tilgang.

Vi håber at vores erfaringer kan inspirere andre skoler og kommuner til at implementere lignende tiltag for at styrke elevernes talforståelse. Så vi sammen kan ændre mest for flest.

Referencer

Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages, and Innovative Teaching*. Jossey-Bass & Pfeiffer Imprints.

Bruner, J.S. & Kenney, H.J. (1965). Representation and Mathematics Learning. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 30*(1), 50-59. https://doi.org/10.2307/1165708

Clements, D. & Sarama, J. (2007). Early Childhood Mathematics Learning. I F.K. Lester Jr. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 461-555). Information Age Publishing.

Egmont Fonden. (2023). *Egmont Rapporten 2023. Regn med os – bedre hjælp til børn og unge i matematikvanskeligheder*. Egmont Fonden. https://api.communications.egmont.com/sites/default/files/2024-04/Egmont%20Rapporten%202023.pdf

Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core Systems of Number. *Trends in Cognitive Sciences, 8*(7), 307-314. https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. I D.A. Grouws (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 65-97). Macmillan Publishing.

Laski, E.V. & Siegler, R.S. (2007). Is 27 a Big Number? Correlational and Causal Connections Among Numerical Categorization, Number Line Estimation, and Numerical Magnitude Comparison. *Child Development, 78*(6), 1723-1743. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01087.x

Lindenskov, L. & Lindhardt, B. (2023). *Vidensopsamling – elever i matematikvanskeligheder*. Egmont Fonden. https://pure.au.dk/ws/portalfiles/portal/358821649/Vidensopsamling_-_Elever_i_matematikvanskeligheder.pdf

Markovits, Z. & Sowder, J. (1994). Developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29. https://doi.org/10.2307/749290

Nguyen, T., Watts, T.W., Duncan, G.J., Clements, D.H., Sarama, J.S., Wolfe, C. & Spitler, M.E. (2016). Which Preschool Mathematics Competencies Are Most Predictive of Fifth Grade Achievement? *Early Childhood Research Quarterly, 36*, 550-560. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2016.02.003

Noël, M.-P. & Rousselle, L. (2011). Developmental Changes in the Profiles of Dyscalculia: An Explanation Based on a Double Exact-And-Approximate Number Representation Model. *Frontiers in Human Neuroscience, 5*, 165. https://doi.org/10.3389/fnhum.2011.00165

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sowder, J.T. (1992). Estimation and Number Sense. I D.A. Grouws (red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 371-389). Macmillan Publishing.

Thompson, M. & Riedel, D. (2021). *Helsingør testen*. Helsingør Kommune. https://sites.google.com/g.helsingor.dk/matematik/test

Wilson, A.J. & Dehaene, S. (2007). Number Sense and Developmental Dyscalculia. I D. Coch, G. Dawson & K.W. Fischer (red.), *Human Behavior, Learning, and the Developing Brain: Atypical Development* (s. 212-237). Guilford Press.

English abstract

The article describes elements of development work that aims to improve pupils' numeracy through early and targeted intervention. A test to determine pupils' numerical understanding and its genesis is described, followed by a brief outline of the content, organization and results of targeted interventions at three levels. The article draws on both practical experience as well as theory and research in the field of mathematics education and focuses on students' development of numerical understanding and how this can be elucidated. Test results 2021-2024 indicate that the targeted knowledge have resulted in a better numerical understanding among the school's students.

TALRO – et udviklingsprojekt om formodede talblinde elever

Lektor Bent Lindhardt,
Professionshøjskolen
Absalon

Dansk abstract: *I perioden 2021-2022 blev der gennemført et udviklingsprojekt om nogle elever med formodet talblindhed på fire skoler og en matematikvejleder på hver skole i Roskilde Kommune på Sjælland. Udviklingsprojektet havde som mål at undersøge formodede talblinde elevers faglige vanskeligheder og personlige læringsbarrierer samt at afprøve forskellige metodiske og faglige tiltag der kunne forbedre læringsvanskelighederne for formodede talblinde elever. Artiklen beskriver projektets mål, den valgte organisationsmodel og udvælgelsen af seks elever på mellemtrinnet samt præsenterer hvad fire matematikvejledere har fokuseret på dels i deres observationer af de formodede talblinde elever og dels i afprøvninger af specifikke metodiske og faglige interventioner.*

Baggrund

Der er markant forskning som underbygger de personlige og samfundsmæssige problemer, ved for ringe matematiske kompetencer. Jitendra et al. (2018) påpeger bl.a. at matematisk tænkning indgår i arbejdsfunktioner verden over. Når vanskeligheder angår berørte "skills", færdigheder og kompetencer som de matematiske, der er særlig vigtige i moderne samfund (fx Duncan et al., 2007), så kan en "developmental learning disorder" være et alvorligt handicap.

> These difficulties are usually called 'Mathematical learning difficulties' or 'Math learning disabilities'. When these difficulties are severe, persistent, and not due to poor intelligence or inadequate schooling, they are called 'developmental dyscalculia'. (Karagiannakis & Noël, 2022)

I lyset af ovenstående valgte man i 2012 i Danmark gennem politiske aftaler at sætte fokus på developmental dyscalculia som i en dansk sproglig ramme blev benævnt talblindhed. Det blev dengang besluttet at der skulle udvikles en national diagnostisk test for talblindhed, som der var for ordblindhed. Det medførte igangsættelse af et udviklingsprojekt (2014) med eksperter såvel indenlandsk som udenlandsk der skulle skabe et testgrundlag for at diagnosticere talblindhed.

Udviklingsprojektets ekspertgruppe valgte at udlede en syntese af dyskalkuliforskningen samt de internationale diagnoser (DSM-5 og ICD-11) for at have en dansk platform at udvikle en test ud fra. Det blev som følger (Lindenskov et al., 2019, s. 6):

> "Talblindhed/dyskalkuli er en læringsudfordring, der er påvirket af en specifik neurologisk udviklingsforstyrrelse, som kan have forskellige udtryk, men som ikke primært kan forklares på baggrund af generelle indlæringsvanskeligheder, mangelfuld undervisning, psykologiske eller sociologiske årsager.
>
> Talblindhed/dyskalkuli omfatter vanskeligheder ved at automatisere tal, antal og størrelser samt fastholde og anvende aritmetiske færdigheder."

Denne definition blev lagt til grund for udviklingsprojektet.

I forlængelse af udviklingen af en talblindetest opstod et øget behov for at skaffe viden om hvordan lærere, skoler og kommuner skulle forholde sig til at hjælpe formodede talblinde elever.

Situationen talte således for at nogen gjorde noget, hvilket resulterede i udviklingsprojektet "TALRO – TALblind i ROskilde kommune".

Projektbeskrivelse

Projektet blev etableret med følgende formål og udviklingsmål:

- At øge forståelsen af og erfaringerne med fænomenet talblindhed blandt matematikvejlederne i Roskilde Kommune
- At undersøge formodede talblinde elevers matematikfaglige vanskeligheder og personlige læringsbarrierer
- At udvikle og afprøve forskellige metodiske og faglige tiltag der kunne forbedre læringen for talblinde elever.

De fire deltagende matematikvejledere der indgik i udviklingsprojektet, skulle hver udpege mindst én formodet talblind elev på mellemtrinnet. Udvælgelsen blev efterfølgende vurderet yderligere gennem interview med og testning af eleverne samt interview med skolens matematikvejleder. Den endelige vurdering tog udgangspunkt i det ministerielle udviklingsprojekts foreløbige test (Epinion & DPU, 2023) hvori følgende indgik:

- En undersøgelse af elevens talsans med fokus på subitizing, ANS samt sammenligning af antal og talsymboler
- Et semistruktureret interview om elevens oplevede vanskeligheder i matematik
- En observation af elevens besvarelse af en samtaletest med 19 matematikfaglige spørgsmål som kunne indikere talblindhed.

Derudover indgik elevens matematiklærers tidligere gennemførte test samt observationer. På baggrund af hvordan eleven klarede sig i andre fag, blev det vurderet om der kunne være tale om en generel eller specifik indlæringsvanskelighed. Resultatet blev samlet seks elever fordelt på fire skoler, alle fra 4. til 6. klassetrin. De fem af de seks af eleverne indgik senere i rapporten som cases.

De fire matematikvejledere havde i en periode på 1½ år (januar 2021 – december 2022) hver især ansvaret for diverse interventioner med den formodede talblinde elev. Interventionerne foregik typisk i en til en-forløb, men også ved observationer og deltagelse i elevens klasseundervisning.

Der blev afholdt ni heldagsmøder fordelt jævnt gennem de 1½ år. Hvert møde bestod af:

1. Fremlæggelse af de observationer hver af matematikvejlederne havde gjort med den formodede talblinde elev
2. Fælles drøftelse og mulige tolkning af de fremlagte observationer som blev ført til notat
3. Planlægning af efterfølgende pædagogiske, didaktiske og faglige tiltag for hver enkelt elev for den næste periode.

Matematikvejlederne dokumenterede løbende interventionerne ved at skrive dagbøger, tage foto-/videosekvenser samt indsamle elevdokumentation. Der forelå således ikke krav om en forskningsmæssig systematisk ramme for den løbende dokumentation. Det blev overladt til den enkelte matematikvejleder at vælge form og omfang for dokumentation med fokus på "særlig interessante momenter" vedrørende eleven og den undervisning eleven modtog.

Resultaterne af udviklingsarbejdet i rapporten TALRO bygger på disse løbende samtaler på heldagsmøderne, før og efter-interview med matematikvejlederne og testning af eleverne samt vejledernes afsluttende skriftlige afrapportering. Se videre i rapporten (Lindhardt, 2023) for mulig fordybelse i de enkelte elevcases og matematikvejledernes interventioner.

I det følgende er der samlet en række udvalgte karakteristika for de fem formodede talblinde elever og en række udvalgte undervisnings- og læringsmæssige refleksioner som interventionerne afstedkom hos vejlederne. De citerede tekster er dels mundtlige, dels skriftlige udsagn fra matematikvejlederne.

En række gennemgående karakteristika

Eleverne var typisk velfungerende på andre fagområder som sprogfag, håndværksfag eller idrætsfag, men havde specifikke store besværligheder med at lære tal, antal og størrelser samt aritmetiske færdigheder. En af eleverne udviste dog også træk knyttet til mere generelle indlæringsvanskeligheder, fx arbejdshukommelsesvanskeligheder.

Følgende citater er dels udsagn fra heldagsmøderne og dels udsagn fra den opsamlende skriftlige afrapportering fra hver af vejlederne.

> Da eleven ikke havde udfordringer i andre fag, kunne eleven blive ked af det over at matematik skulle være så svært, og at eleven ikke bare kunne huske det der blev undervist i. Elev: "Læse er jeg meget god til. Læser hver aften."

Flere af eleverne havde vanskeligheder med at fremkalde viden om hvordan tallene mellem 1 og 100 og tal i tusind så ud, og at kombinere talord med talsymboler. Specielt nullet oplevedes forvirrende.

> "1.023 er svært – det er nullet," sagde en elev og … endte med at skrive 223.
> En anden elev forsøgte at tælle sig frem, "10 – 20 – 30 …", for at få erindringen om 60 i tallet 68.

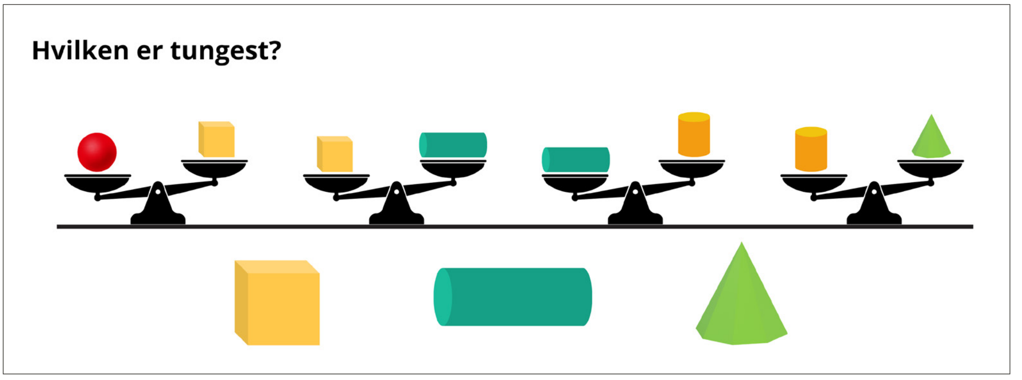
Positionssystemet var ofte svagt.

> Opgaven "Tallet 36.531 skal gøres 100 større" blev til "3 tusind – nå nej, 3 millioner 7 tusind".

Flere elever havde vanskeligheder med at ordne tal på tallinje – hvor enkelte udviklede særlige visuelle udtryk som kunne besværliggøre ordning af tallene.

> Tallinjen kunne være en udfordring. Eleven havde tidligere afbildet den som en bølgende linje hvor tallene stod i både top og bund af bølgerne, men det var ikke et konsekvent system så efterfølgende tal kunne være i to bunde for derefter at være i top og så bund.

Enkle regnestrategier inden for addition af etcifrede tal, som typisk er automatiseret hos jævnaldrende, voldte ganske store vanskeligheder.



Figur 1. *Eksempel på ræsonnementsopgave.*

Subtraktion oplevedes gennemgående meget svært for eleverne:

> Hun ville ikke løse subtraktionsopgaver som 117 – 78.

Generelt havde eleverne en meget svag automatiseret viden vedrørende multiplikation med etcifrede tal.

> Eleven kunne ikke håndtere enkle opgaver som 2 * 3, men måtte ofte tælle sig frem på fingrene.
> Selvom eleven øvede sig meget, kunne eleven ikke huske det.

Alle eleverne vægrede sig ved divisionsopgaver som 12: 4.

Generelt anvendte alle eleverne fingrene ved selv enkle beregninger, og til trods for massiv undervisning i regnestrategier var det vanskeligt for mange af eleverne at forlade:

> Elev: "der er stadigvæk nogle af de små regnestykker som jeg skal bruge fingrene til".

Eleverne kunne typisk læse enkle tekstopgaver og forstå konteksten samt problemstillingen. Flere var dog usikre på hvad man "skulle bruge tallene til". En måske unødvendig barriere som kunne skyldes at eleverne ikke var vant til den slags opgaver idet de ofte i undervisningen arbejdede med "regnestykker". Det kunne således være elevernes manglende regnefærdighed som bremsede for "at gå videre med opgaven", men ikke nødvendigvis evnen til at gennemskue problemstillingen og de mulige løsninger.

Ofte brugte eleverne strategier og omveje som kunne synes meget uhensigtsmæssige, men som virkede for dem. Det resulterede imidlertid i meget tidsforbrug som kunne hæmme overblikket og få eleverne til at tabe tråden i opgaven.

Flere af eleverne viste sig alderssvarende (og i nogle situationer bedre) til at ræsonnere matematisk ved at undersøge mønstre/systemer i problemstillinger hvor der var et øget fokus på en sprogligt ræsonnerende kommunikation, fx i opgaver af følgende karakter:

Flere havde vanskeligheder med at anvende tal i forbindelse med måling inden for længder, tid og vægt. Specielt tidsfornemmelse og tidsaflæsning skilte vandene. To af eleverne havde en anvendelig viden, men havde været lang tid om at lære det. De andre tre havde store vanskeligheder med at anvende det og fortsat at lære det.

Flere elever udviste stor aversion mod at estimere diverse mål såsom afstand, tid og længde, fx længden af et bord eller vægten af en blyant. Når de alligevel "gættede", var deres valg meget afvigende fra det reelle mål. Det gjaldt dog ikke alle – så længe fx længden af noget holdt sig inden for det personlige overskuelige rum.

> Eleven vurderede en pind på under 1 m til at være 11 m. En blyant vurderedes til 2 kg og en længde på "½ eller måske 3 cm?"
> Eleven (red.: en anden) vurderede en 40 m's afstand til 4 m.

Enkelte elever havde stadig en vis forvirring om retning, fx højre og venstre. Enkelte kunne anvende det, men det havde taget lang tid at lære.

Brug af penge i handelssituationer viste sig vanskeligt, og flere havde problemer med at bestemme beløb ud fra angivne sedler og mønter. De omtalte tit "at nullerne" var forvirrende.

Det var ifølge matematikvejlederne gennemgående at eleverne omtalte en frustration over hvorfor man kunne være god i nogle fag, men svag i matematik. Det betød at der for alle udvikledes en meget svag faglig selvtillid. En selvtillid som lærerne oplevede yderligere udfordret som de blev ældre. De elever som indgik i projektet, fik en øget frustration gennem årene, da afstanden mellem deres matematiske præstationsniveau og "de andres" præstationsniveau blev større og større. Dette blev dog til en vis grad opvejet af en viljestyrke og interesse for læring hos nogle af eleverne. En viljestyrke som dog løbende skulle "holdes i live" af vejlederne for ikke at "slukke".

> Eleven oplevede at de andre elever var meget dygtigere og hurtigere end eleven selv, hvilket påvirkede elevens selvtillid. Arbejdede meget langsomt når eleven løste matematikopgaver.

> Eleven beskrev at matematik ikke var noget vedkommende var god til, men ville trods alt stadigvæk gerne arbejde med at blive bedre. Kunne godt lide matematik. Beskrev at der var andre fag hvor eleven klarede sig meget bedre. Var ofte ked af det i matematiktimerne

> og havde været det gennem flere år – "når jeg sidder med det og det ikke giver mening, giver jeg lidt op". Sammen med en voksen gik det bedre. Eleven oplevede forskellen til klassekammeraternes præstationer allerede i 2.-3. klasse. Fortalte at de andre elever oplevedes meget dygtigere og hurtigere end eleven selv, hvilket påvirkede selvtilliden.

Observationer af og refleksioner over undervisning og læring

Forvirring og glemsel var to centrale faktorer når vejlederne beskrev elevernes læringssituation. Vejlederne havde en fælles oplevelse af hvordan formodet indlæring pludselig forsvandt fra elevernes erindring i en nærmest "demenslignende" situation.

En glemsel som kunne vare fra timer til dage før noget af det glemte eventuelt dukkede op igen. En situation hvor lærerreaktioner som "du kunne det jo godt i går" eller lignende kunne øge elevernes vægring over for hjælp.

> Eleven omtalte at eleven stadig glemte – lod sig let forvirre. Nogle gange syntes eleven at eleven kunne noget, og så var det væk næste dag ... eleven beskrev at tal kan blive væk – "Jeg skal skrive det op ellers blive det væk". Eleven oplevede at "lige når jeg skal skrive det rigtige (regnestykke), så skriver jeg det forkert."

Det var et gennemgående træk i observationerne fra matematikvejlederne hvor vanskeligt det var for eleverne at lagre selv enkel talviden som fx at kombinere talnavn med talsymbol samt enkle regnestrategiske færdigheder.

> Vi arbejdede i en periode med hovedregningsstrategier for etcifrede tal. Det indgik i undervisningen ca. 5-10 minutter i to lektioner om ugen i ca. 4 måneder. Kun én (som i øvrigt var en stor opdagelse for eleven) lagrede sig og kunne opfattes automatiseret (at fx 8 + 9 kan tænkes som 8 + 8 + 1).

Det var således en central diskussion på heldagsmøderne hvordan man af tids- og ressourcemæssige årsager skulle prioritere det matematikfaglige indhold. Forstået som overvejelser om hvad der er særlig vigtigt for at klare sig senere i uddannelses-, hverdags- og arbejdslivet. I en sådan prioritering af færdigheds- og vidensmål indgik overvejelser om i hvor høj grad den formodede talblinde elev skulle anvende hjælpemidler frem for at bruge ekstremt meget tid og mange ressourcer på at lære hvad man aldersmæssigt kunne opfatte som banale tal- og regnefærdigheder.

> Der bør være overvejelser om anvendelsen af ressourcer og den ekstremt lange tid det tager at indlære selv simple beregninger. Det tog næsten et år inden tiervenner blev en anvendt strategi, og inden eleven fik regnestrategier til addition med tre- og firecifrede tal.

Der er således blevet trænet meget, men med problematisk lille effekt.

Typisk reducerede man løbende de faglige mål betydeligt for ikke at gå for hurtigt frem. En af vejene blev omtalt som "den varierede gentagelse".

Der er brugt mange forskellige spil og forskellige typer af opgaver for at lave den "varierede gentagelse" med flere repræsentationsformer inden for samme enkle fagmål.

Ovenstående skal ikke tages som udtryk for at interventionen ikke havde effekt. Både elever og vejledere oplevede en faglig fremdrift. Diskussionen er blot omfanget af tilførte ressourcer i forhold til forventet læringseffekt. Der synes tale om en langstrakt struktur hvor korte kursusforløb kan være problematiske.

Elev: "Jeg kan selv mærke at jeg har rykket mig."
Elev: "Nu kan jeg godt skrive høje tal, men hvis det er virkeligt høje, fx 135, kan jeg finde på at bytte om på tallene."

De tre af de fem elever gav tydeligt udtryk for et forbedret fagligt selvværd og bedre forståelse af deres vanskeligheder.

Eleven beskrev at eleven havde ændret sig fra at være ked af det til at være irriteret når det var svært.

Flere elever værdsatte mere hverdagsorienterede sammenhænge som fx at bage, handle på nettet eller måle noget op. Det skal dog bemærkes at flere elever havde svært ved at transformere viden og færdigheder fra en situation til en anden. Ej heller var det nemt at transformere enkle færdigheder fra matematikundervisningen til den praktiske verden eller omvendt.

Jeg brugte meget tid på mange repræsentationer og oplevelser med meget enkle regnestykker, fx 3 * 4. Eleven udviste stort engagement ved at bage og arbejde med penge. Eleven havde dog svært ved at overføre en metode fra en bestemt situation til andre opgaver/kontekster.
Eleven fik til opgave at tegne hvordan 20 småkager skulle placeres på en bageplade. Elevens tegning med 4 rækker med 5 kager i hver havde eleven svært ved at overføre til bagepladen. Eleven var i tvivl om hvordan kagerne skulle ligge, og gav op, indtil det blev klart at den ene side var længere, og så gik det op for eleven: "ahh, nu ved jeg det".

Det blev observeret at opgaver formidlet på papir skabte en større modstandskraft eller utryghed for at fejle end mundtligt formulerede opgaver og brug af konkrete materialer.

> Eleven udviste tydeligvis større engagement ved opgaver knyttet til artefakter frem for opgaver på papir.

Det er værd at bemærke at flere af eleverne syntes bedre at kunne anvende matematiske begreber i en sproglig repræsentation gennem samtale, læsning og skrivning. Her skal fraregnes den ene af eleverne som også havde ordblindeproblemer. Det betød at tekstopgaven eller aktiviteten var en bedre læringsmæssig tilgang end tal- og regneopgaver som ofte var i en symbolsk repræsentation.

> Løste tekstopgaver med addition og subtraktion hurtigere end tidligere.

Der syntes også at være et matematisk potentiale i ræsonnementsopgaver, såkaldte grublere, hvor eleven kunne tale sig ind i og prøve sig frem til en løsning i en sproglig og visuel tilkendegivelse.

> Jeg undersøgte hvordan pige A ville løse mere problemløsende opgaver, og gav hende kænguru-opgaver (matematiske grublere) fra hjemmesiden dkmat.dk. Dem løste hun, men når der skulle regnes, gik hun i stå.

Brug af konkrete materialer og visualisering

I udviklingsprojektet blev der anvendt flere forskellige konkrete visualiseringsformer ved beregninger og talforståelse for at vurdere deres egnethed. Generelt viste det sig at forøge motivationen hos eleverne og at være læringsfremmende. Det var dog ikke entydigt hvilke materialer som var bedre end andre. Det syntes at være elevafhængigt og lærerafhængigt.

Det skal bemærkes at nogle elever havde modstand mod at bruge konkrete materialer i klasseundervisningen, idet det oplevedes ydmygende da de andre i klassen ikke anvendte det og det dermed udstillede deres vanskeligheder.

Specielt én elev gav tydeligt udtryk for en uvilje over for konkrete materialer/spil som ikke havde kontakt til hans hverdag, fx centicubes.

> Nogle af de opgaver som eleven blev stillet i den daglige undervisning, kunne eleven godt løse ved eks. at have konkrete materialer til rådighed. Men eleven var udfordret på selv at anvende det uden voksenhjælp i klassen.

> Det var vigtigt for eleven at arbejde med virkeligheden. Slog man over i symbolernes verden uden enheder og kontekst, trak eleven sig og udviste modvilje mod undervisningen. Konkrete laborative materialer som centicubes opfattede eleven i denne sammenhæng som kedelige.

Det så ud til at formodede talblinde elever havde brug for konkreter i længere tid end hvad vejlederne typisk oplevede hos jævnaldrende, samt at brugen af materialer skulle foregå med meget små progressive forandringer. Et overforbrug af det samme konkrete materiale oplevedes dog af vejlederne som en utilsigtet afhængighed.

Brug af kompenserende hjælpemidler var et centralt tema blandt vejlederne i form af digitale regnere, diverse apps, måleinstrumenter osv. Et eksempel er appen Siri hvor man mundtligt indtaler en regneoperation og efterfølgende får svaret.

Om klassesituationen

Der var flere elever som udviste en frygt for at fejle i klassesituationen.

Der indgik også udtalelser og observationer som tydede på et stort behov for faglig tryghed ved at have en "god makker" eller en voksen i nærheden. Afledelighed i klassen grundet oplevet uro påvirkede også eleverne.

> Det kunne være en bekymring hvor meget eleven fik ud af klasseundervisningen. Eleven var i klassen indadvendt og tavs. Lod sig adsprede ved at kigge andre steder hen når der vistes noget på tavlen. Syntes generelt at have vanskeligt ved at være deltagende i klasseundervisningen. Eleven var mere ukoncentreret når der var mange børn omkring eleven.

> Eleven ville gerne arbejde sammen med en nær, tryg ven som kunne "oversætte" instruktioner og opgaver i matematikundervisningen.

Det blev observeret at klassens matematiklærer ofte stillede meget lukkede spørgsmål som havde enten rigtigt eller forkert svar. Dermed signalerede man fra start at der var nogen som kendte svaret, og nogen som ikke kendte det. Det typiske resultat var at den formodede talblinde elev sjældent svarede. Eleverne omtalte selv at de overlod arenaen til de "dygtige".

> Eleven havde svært ved at opfange kollektive beskeder og vægrede sig meget ved at skulle række hånden op i frygt for at spørge om noget "dumt".

Vejlederne konstaterede at den gestik og de udsagn eleven fik fra klassens matematiklærer, havde stor betydning for motivation og viljestyrke. Udtryk og attituder som udtrykker "det er bare …", "det er nemt nok" var bremsende for læringen for den formodede talblinde elev.

Der var desuden eksempler på at elever fandt "snedige" adfærdsstrategier så det så ud for læreren som om de deltog i klassens matematikundervisning, til trods for at de havde store faglige problemer. Det kunne fx ske ved at tale læreren efter munden eller benægte vanskeligheder. Strategier som eleverne anvendte som en slags afværgedagsorden så det fagligt svage niveau ikke blev synliggjort.

> Da jeg senere observerede hende i klassesammenhæng, "forsvandt" eleven i klassen. Eleven kom ikke i gang, havde svært ved at forstå opgaven, og eleven "gemte" sig for læreren. Eleven forsøgte ofte at give udtryk for at eleven havde "styr på det", men havde det ikke.

> I klasseundervisningen skjulte eleven sine vanskeligheder ved at tale sin matematiklærer efter munden.

Det var en generel observation at de involverede elevers matematiklærere oplevede en vis magtesløshed over for hvordan de skulle tilrettelægge undervisningen over for den formodede talblinde. En magtesløshed som kun steg fra klassetrin til klassetrin og ofte medførte en form for stiltiende passivitet. Det stiltiende omfattede holdninger hos både elev og lærer i retning af at "det alligevel ikke nyttede noget". Holdninger som resulterede i at eleven fik udfordringsløse arbejdsopgaver som dermed forhindrede faglige konflikter, men ofte var meget beskedent læringsfremmende.

Det var et gennemgående træk i vejledernes tilbagemelding at alle fem elever havde haft særlig brug for støtte til læring, hvilket var udfordrende som lærer når man var "alene" lærer i klasserummet. Udfordringer som omhandlede:

- Hjælp til at eleven forstod sine vanskeligheder i en grad så den formodede talblinde accepterede og lærte sig kompenserende handlinger
- Hjælp til løbende at håndtere demotiverende faktorer som svag viljestyrke og dårligt fagligt selvværd
- Hjælp til at anvende hjælpemidler (fx lommeregner) hensigtsmæssigt
- Hjælp til at omsætte anvendelse af de matematiske begreber fra en situation til en anden
- Hjælp til øjeblikkelig løbende feedback til eleverne om deres arbejdspræstationer – det var tydeligt at det øgede viljestyrken at få løbende ros og bekræftelser på arbejdsindsatsen.

Opsamling

Formålet at skabe en større indsigt i fænomenet talblindhed synes at være opnået for de deltagende matematikvejledere. Gennem vejledernes observationer og refleksioner dels ved en til en-undervisning og dels ved deltagelse i klasseundervisning samt løbende analyse på heldagsmøder med andre vejledere foreligger der fem dybdegående elevcases til inspiration for andre. Der var en række gennemgående træk ved disse observationer og refleksioner.

Matematikvejlederne gav generelt udtryk for at de formodede talblinde elevers læringsvanskeligheder var anderledes store end forventet i forhold til deres alder og øvrige intellektuelle formåen. Mange af de valg vejlederne foretog metodisk og undervisningsmæssigt, kunne være identiske med hvad man også ville gøre over for elever som af andre årsager havde vanskeligheder med matematik. Det kunne være brug af konkrete materialer, spil, mere hverdagsagtig matematik, reflekterende samtaler, egen erfaringsdannelse osv. Selve læringsprocessen syntes dog kvalitativt anderledes idet der under hele processen – i respekt for eleven – skulle balanceres mellem store lagringsvanskeligheder og en alderspassende intellektuel formåen. Der synes brug for yderligere forskning i og praksiserfaring med hvordan denne bro skal bygges mest hensigtsmæssigt.

Det var derudover gennemgående at de formodede talblinde elever havde stærke negative oplevelser med faget matematik – dog for nogen af dem ikke stærkere end at de kunne oparbejde en viljestyrke til at prøve at lære.

Forståelsen for de formodede talblinde elevers situation som matematikvejlederne opnåede, resulterede i en bedre hjælp til selvindsigt hos eleverne og en øget motivation i læringsprocessen. En forståelse som alle elever gav udtryk for manglede såvel i skoleregi som i hverdagssammenhænge.

Referencer

Dowker, A. (2005). Early Identification and Intervention for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38(4)*, 324-332. https://doi.org/10.1177/00222194050380040801

https://www.dr.dk/nyheder/regionale/midtvest/rystende-lidt-fokus-paa-talblindhed-de-faar-bare-vide-de-skal-tage-sig

Duncan, G.J., Dowsett, C.J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A.C., Klebanov, P., Pagani, L.S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K. & Japel, C. (2007). School Readiness and Later Achievement. *Developmental Psychology*, *43*(6), 1428-1446. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428

Epinion & DPU. (2023). *Udvikling af talblindhedstest til 4. klasse og pædagogiske indsatser – slutrapport*. https://www.uvm.dk/-/media/filer/uvm/udd/folke/pdf23/apr/230426-23-05863-2-bilag-3--slutrapport--udvikling-af-talblindhedstest-til-4-4337746-2-0.pdf

Fritz, A., Haase, V.G. & Räsänen, P. (2019). Introduction. I A. Fritz, V.G. Haase & P. Räsänen, P. (red.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (s. 1-6). Springer.

Jitendra, A.K., Lein, A.E., Im, S.-h., Alghamdi, A.A., Hefte, S.B. & Mouanoutoua, J. (2018). Mathematical Interventions for Secondary Students With Learning Disabilities and Mathematics Difficulties: A Meta-Analysis. *Exceptional Children, 84(2),* 177-196. https://doi.org/10.1177/0014402917737467

Karagiannakis, G. & Noël, M.-P. (2022). *Effective Teaching Strategies for Dyscalculia and Learning Difficulties in Mathematics*. Routledge.

Kaufmann L., Mazzocco M., Dowker, A., Von Aster, M., Göbe, S.M., Grabner, R.H., Henik, A., Jordan, N., Karmiloff-Smith, A., Kucian, K., Rubinsten, O., Szucs, D., Shalev, R. & Nuerk, H. (2013). Dyscalculia From a Developmental and Differential Perspective. *Frontiers in Psychology, 4*, artikel 516. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516

Kucian, K. & von Aster, M. (2015). Developmental Dyscalculia. *European Journal of Pediatrics, 174*(1), 1-13. https://doi.org/10.1007/s00431-014-2455-7

Lindenskov, L., Kirsted, K., Allerup, P. & Lindhardt, B. (2019). *Talblindhedsprojektet – rapport om udvikling af talblindhedstest og vejledningsmateriale*. DPU og Professionshøjskolen Absalon. https:/emu.dk/sites/default/files/2019-09/Talblindhedsprojektet_endelig%20april%202019.pdf

Lindhardt, B. (2023). *Projekt TalRo – talblinde i Roskilde kommune 2023*. Professionshøjskolen Absalon. https://himmelevskole.aula.dk/sites/himmelevskole.aula.dk/files/arkiv/Download_filer/Projekt%20TALRO%20-.pdf

Mazzocco, M.M.M., Chan, J.Y.-C. & Prager, E.O. (2018). Working Memory and Specific Learning Disability. I T.P. Alloway (red.), *Working Memory and Clinical Developmental Disorders*. (s. 106-130) Routledge.

English abstract

During the period 2021-2022, a development project was carried out involving students with suspected dyscalculia at four schools, each with a mathematics advisor, in Roskilde Municipality in Zealand. The aim of the development project was to investigate the academic difficulties and personal learning barriers of students suspected of having dyscalculia, as well as to test various methodological and academic measures that could improve the learning difficulties of students with suspected dyscalculia. The article describes the project's objectives, the chosen organisational model, and the selection of six intermediate-level students, and presents what four mathematics advisors focused on both in their observations of students with suspected dyscalculia and in their trials of specific methodological and academic interventions.

SÆRNUMMER 2024

Paria eller øjenåbner – om historiske skift i syn på talblindhed
Lena Lindenskov og Bent Lindhardt

Bedömning som omsorg om lärandet i de tidiga skolåren
Anette Bagger, Juuso Nieminen og Maria Walla

Specifika matematiksvårigheter – diagnos och pedagogiska och didaktiska anpassningar
Helena Roos, Ann-Louise Ljungblad og Jonas Walfridsson

Inkludering och likvärdighet i och genom matematikundervisning
Anette Bagger og Helena Roos

Posisjonering av elever som presterer lavt i matematikk: En styrkebasert flerkasusstudie av heterogene smågrupper
Anita Movik Simensen

Restructuring the university course Mathematics for All: An action research
Ósk Dagsdóttir og Edda Óskarsdóttir

Implementera en språklig teori för innehållsinkluderad matematikundervisning
Cecilia Segerby og Christina Svensson

Regnestrategier og de udfordrede elever i matematik – eksempel fra 6. klasse
Lóa Björk Jóelsdóttir og Pernille Bødtker Sunde

Perceived difficulty of numbers relates to self-reported achievement in adults
Pernille Bødtker Sunde, Pernille Pind og Peter Sunde

The dyscalculia simulator: A developmental project targeting teachers
Johan Kørvel Sørensen, Nina Genster, Jacob Frølund Davis, Simone Lindhøj Rasmussen og Pernille Bødtker Sunde

Styrkelse af elevers talforståelse – en tidlig og målrettet indsats i Helsingør Kommune
Mette Thompson

TALRO – et udviklingsprojekt om formodede talblinde elever
Bent Lindhardt