Matematisk argumentation, geometri, gamle tekster og GeoGebra

Marianne Thomsen,
Københavns Professionshøjskole

Abstract: *Artiklen sætter begreberne dynamisk læsning og strukturopfattelse i spil når der arbejdes med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Indledningsvis gives argumenter for at arbejde med samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og digitale teknologier. Derefter udfoldes begreberne dynamisk læsning, strukturopfattelse og ræsonnementskompetence. Disse begreber bruges til at analysere et uddrag af elevsvar fra et studie afprøvet i en 7.-klasse. Afslutningsvis reflekteres der over hvordan elevsvarene med fordel kunne have været anvendt aktivt i selve undervisningsforløbet.*

Introduktion

I denne artikel er begreberne dynamisk læsning, strukturopfattelse (Mellin-Olsen, 1984) og ræsonnementskompetence (Niss & Jensen, 2002) centrale i forhold til at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.[1] De tre begreber udfoldes yderligere senere i teksten, men kort fortalt betyder de: 1) Dynamisk læsning betyder at læserens egen fortolkning er i centrum i en læseproces, 2) strukturopfattelse er knyttet til at eleverne får en forståelse for hvorfor reglerne i matematik er som de er, og 3) ræsonnementer kan ses som en kæde af argumenter. Eksempler på originalkilder kan fx være en eller flere sætninger fra *Euklids Elementer*. Denne artikel tager afsæt i et studie i en 7.-klasse hvor der blev arbejdet med samspillet mellem GeoGebra og Euklids "fem forudsætninger" (titlen på sætning 34, bog I, samt sætning 6, bog IV).[2] Jeg vender tilbage til selve undervisningsforløbet senere i artiklen.

1 Disse begreber er delelementer af de forskellige teoretiske distinktioner og begreber der er i spil i Thomsen (2022).
2 Klassen arbejdede med Eibes (1897a, 1897b) oversættelse af *Euklids Elementer*.

Det kan være relevant at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra af flere årsager. Her vil jeg fremhæve at GeoGebra i høj grad bruges i matematikundervisningen i Danmark (Kristensen, 2017), og måden GeoGebra bliver brugt på i undervisningen, er essentiel for elevernes læringsudbytte (Højsted, 2020, med reference til Jones, 2005). Undervisningsforløb der har fokus på at eleverne får mulighed for at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra, kan være en metode til at arbejde med fx dynamiske geometriprogrammer med henblik på at støtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence (fx Thomsen, 2020).

Når elever og studerende arbejder med samspillet mellem originalkilder og digitale teknologier, får de bl.a. mulighed for at afprøve og validere matematiske påstande og teorier (fx Chorlay, 2015, 2016; Jankvist & Geraniou, 2021; Kidron, 2004). Der kan lægges op til at have reflekterende diskussioner om forskellige typer af beviser (fx Jankvist et al., 2019). I en dansk grundskolekontekst kan det bl.a. være interessant at inddrage arbejdet med originalkilder fordi det kan medvirke til at skærpe blikket for hhv. tankegangs- og ræsonnementskompetencen, som er slået sammen i Fælles Mål 2014/19 (Thomsen & Jankvist, 2022). Elever og studerende kan bruge GeoGebra som en "dåseåbner" til at kunne læse og forstå originalkilder (Balsløv, 2018; Jankvist & Geraniou, 2019; Olsen & Thomsen, 2017). Ligesom arbejdet med samspillet kan understøtte at nogle af de dele af matematikken der kan være skjult i digitale teknologier, kan tydeliggøres for elever og studerende (Isoda, 1998; Jankvist & Geraniou, 2021; Olsen & Thomsen, 2017) og bidrage til at de får mulighed for at udvikle forskellige former for matematisk literacy og dannelse når de arbejder i et digitalt miljø (Olsen & Thomsen, 2017, 2018; Thomsen & Olsen, 2019). Arbejdet med samspillet falder bl.a. også i tråd med nedenstående uddrag af fagformålet for matematik, stk. 3, da det også kan sætte eleverne i situationer hvor der er mulighed for at de "oplever og erkender matematikkens rolle i en historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng" (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019, Fagets formål, stk. 3).[3]

Formålet med denne artikel er 1) at give et kort indblik i hvorfor det kan være en god idé, og hvordan man kan arbejde med samspillet mellem historiske originalkilder og GeoGebra, 2) at bruge begreberne dynamisk læsning, strukturopfattelse og ræsonnementskompetence til at analysere elevers svar på spørgsmålet "Hvad har du lært?"[4] samt 3) at reflektere over hvordan elevsvarene kunne have været inddraget mere aktivt i selve undervisningsforløbet. Her er det vigtigt at pointere at sidstnævnte først er et område jeg har fået blik for efter selve undervisningsforløbet var afsluttet,

3 Sammenhængen mellem Fælles Mål og at arbejde med samspillet mellem matematikhistoriske originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevers muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence er yderligere udfoldet i Thomsen (2022).

4 Det var et studie som var en del af et samlet ph.d.-projekt. Her blev elevsvarene på logbogsarkene blot ikke inddraget aktivt i undervisningen.

hvorfor det desværre heller ikke var en aktiv del heraf. I artiklen her er der særligt fokus på følgende spørgsmål:

> *Hvordan kan elevers egne svar på hvad de har lært, tolkes i lyset af begreberne dynamisk læsning og strukturopfattelse? Og hvordan kan en sådan tolkning bruges til at give idéer til aktivt at inddrage elevsvar i undervisningen så eleverne får mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra?*

Først vendes blikket mod de teoretiske begreber der sættes i spil i artiklen. Dernæst beskriver, analyserer og vurderer jeg uddrag af elevers svar på spørgsmålet om hvad de har lært i et undervisningsforløb hvor der blev arbejdet med samspillet mellem en originalkilde og GeoGebra. Afslutningsvis diskuterer jeg hvordan elevernes egne svar kunne have været inddraget aktivt i undervisningsforløbet og formentlig yderligere have bidraget positivt til elevernes læringsudbytte.

Centrale begreber

Mellin-Olsens (1984) beskrivelse af dynamisk læsning og strukturopfattelse er valgt fordi dynamisk læsning kan lægge op til at eleverne skal bruge både deres undersøgende og deres produktive side af ræsonnementskompetencen i deres læsning af hhv. originalkilden og GeoGebra. Dertil kommer at der synes at ligge et stort potentiale i at arbejde bevidst ud fra en strukturopfattelse for at understøtte at eleverne kan formulere en kæde af matematiske argumenter når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra (fx Thomsen, 2022). Ifølge Mellin-Olsen (1984) udfører læseren en dynamisk læsning når “Leseren bruker sin egen forståelse når han leser, og han bruker den når han oppfatter innholdet i teksten” (Mellin-Olsen, 1984, s. 86). Denne læsemåde står i modsætning til den statiske læsning der “gjør tegnet til autoritet. Det er tegnet og forfatterens bruk av det, som alene gir mening til tegnet” (Mellin-Olsen, 1984, s. 86). Originalkilder er ofte sprogligt svære at læse og forstå for både elever og lærere hvorfor det giver god mening at lægge op til at arbejde med at understøtte en forståelse samt tolkninger af ord, sætninger og notationer i teksten. På den baggrund kan man sige at der i sig selv ligger et potentiale i at arbejde med dynamisk læsning når der arbejdes med originalkilder (fx Thomsen, 2022). I forlængelse heraf kan der yderligere lægges op til at eleverne kan gå i dialog med teksten, kan forholde sig spørgende til indholdet og fx via GeoGebra være nysgerrige på om det nu kan passe, eller om man kan se på nogle af de samme matematiske problemstillinger eller konstruktioner der optræder i teksten, på andre måder i GeoGebra (Thomsen, 2021b). Den dynamiske geometridel i GeoGebra er designet ud fra den euklidiske geometri hvilket giver både muligheder og begrænsninger når elever konstruerer og på den baggrund ræsonnerer ved at bruge GeoGebras "knapper". Det er vigtigt at være bevidst om hvornår eleverne begrunder og argumenterer ud fra deres brug af knapperne, fx "regulær polygon" og "opret to på hinanden vinkelrette linjer", og hvornår de viser en forståelse for matematikken bag knapperne og bruger den aktivt i deres argumentation (fx Thomsen, 2021a). Ifølge Mellin-Olsen (1984) kan tegn forstås bredt. Derfor kan elevernes brug af GeoGebras feedback anses for at være en form for læsning der ikke i sig selv kan anses for bare at være ekspliciteret meningsskabende. Det kan kræve at eleverne fortolker herpå. Derfor kan en skelnen mellem hhv. dynamisk og statisk læsning også være brugbar når eleverne arbejder med GeoGebra (Thomsen, 2022). Det synes vigtigt at læreren giver udtryk for egne tvivlsspørgsmål i forbindelse med læsning og forståelse af originalkilden samt er bevidst om at stille spørgsmål til teksten og elevernes arbejde hermed og med GeoGebra. Så der ikke blot bliver tale om at læreren viser en forståelse af teksten og den bagvedliggende matematik i elevernes konstruktioner i GeoGebra, men lægger op til flere mulige tilgange og forståelser heraf (Thomsen, 2022). Når eleverne arbejder med en dynamisk læsning af hhv. originalkilden og GeoGebra, kan det medvirke til at understøtte at eleverne får mulighed for at gå i dialog med begge dele (fx Thomsen, 2021b).

Mellin-Olsen (1984) beskriver matematikfaget som et struktureret fag hvor "Resultatene henger sammen, det ene kan avledes av det andre, og ved hjelp av fagets slutningsregler kan en utlede nye resultater som en har brug for" (Mellin-Olsen, 1984, s. 36). Han benytter bl.a. begrebet strukturopfattelse som er karakteriseret ved "forståelsen av hvordan regelen er knyttet til sin struktur, det vil si, hvorfor regelen har blitt slikk den har blitt" (Mellin-Olsen, 1984, s. 32). Ses Mellin-Olsens begreb strukturopfattelse i forhold til at arbejde med GeoGebra, kan brug af fx dragging eller måling give anledning til at understøtte elevernes forståelse af forskellige strukturer bag forskellige matematiske sammenhænge. Brug af digitale teknologier kan understøtte at elever kan gå fra at have en forståelse af matematiske eksempler til at have en forståelse af mere generelle matematiske beviser, da dragging kan visualisere mange eksempler i et eller flere træk, men det er ikke noget der bare opstår, det kræver et bevidst arbejde hermed (fx Arzarello et al., 2002; Mariotti, 2002). Hvis dragging eller målefunktionen i GeoGebra benyttes, kan nogle af påstandene i originalkilden fx afprøves og bruges til at gå i dialog med teksten og understøtte elevernes dynamiske læsning og strukturopfattelse (Thomsen, 2022).

I KOM-rapporten definerer Niss og Jensen (2002) en matematisk kompetence på følgende måde: "*en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer*" (s. 43). Ræsonnementskompetencen består bl.a. i at kunne:

- (...) "*følge* og *bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, specielt at vide og *forstå* hvad et matematisk *bevis* er, og hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer (...)"
- "*afdække de bærende idéer i et matematisk bevis*, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter (...)"
- "*udtænke og gennemføre* informelle og *formelle ræsonnementer* (på basis af intuition), herunder omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser."

(Denne punktopstilling er et uddrag af beskrivelsen af ræsonnementskompetencen i Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Ræsonnementer ses ifølge det første punkt i ovenstående beskrivelse som en kæde af på hinanden følgende argumenter hvori der implicit synes at ligge en betragtning af et argument som noget enkeltstående. Ifølge Niss og Jensen (2002) har de otte matematiske kompetencer en dual karakter, de har både en undersøgende og en produktiv side. For ræsonnementskompetencen omhandler den undersøgende side bl.a. at kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement, mens den produktive side bl.a. handler om at kunne udtænke og gennemføre ræsonnementer. Niss og Jensen (2002) synes yderligere at graduere mellem argumenter, ræsonnementer og beviser ved at sidstnævnte er et udtryk for at "levere korrekte og fuldstændige argumenter (beviser) for at de foreslåede løsninger virkelig virker (...)" (Niss & Jensen, 2002, s. 64). Elevers og læreres brug af teksten i originalkilden kan i samspil med deres arbejde med GeoGebra medvirke til at de får blik for metoder til at opbygge argumenter og kæder heraf. De kan bruge teksten til at gå i dialog med og forstå den visuelle feedback fra GeoGebra, og på den måde kan arbejdet med samspillet understøtte at de fx går fra at "måle" forskellige matematiske objekter til at forstå og formulere deres egne argumenter og mere generelle ræsonnementer herudfra når de arbejder med GeoGebra (Thomsen, 2022).

Praksisafsættet i denne artikel er en 7.-klasses arbejde med sætning 6, bog IV, i *Euklids Elementer*: "I en Given cirkel at indskrive et Kvadrat." Her handler det altså om at se sammenhænge mellem et indskrevet kvadrat og den omskrevne cirkel for på den baggrund at overbevise om at der er tale om et kvadrat og ikke en anden type firkant. Euklids sætning 6, bog IV, er opbygget efter en struktur hvor forskellige matematiske objekter med tilhørende regler sættes i relation til hinanden så en slutning fra én regel kan ledes videre til den næste. Elevernes arbejde med sætningen i samspil med GeoGebra kan skabe rum for at de arbejder med både at forstå teksten og med selv at formulere forskellige former for argumenter, selvom det også synes at være svært for eleverne at formulere kæder af egne argumenter (fx Thomsen, 2022). Her kunne en aktiv inddragelse af elevernes logbogssvar i undervisningen måske i endnu højere grad have understøttet elevernes strukturopfattelse og dermed deres muligheder for at opbygge kæder af argumenter.

Kort beskrivelse af undervisningsforløbet

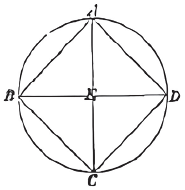
Undervisningsforløbet blev afprøvet i en 7.-klasse i en dansk folkeskole.[5] Derfor er forløbet også knyttet op på Fælles Mål 2019. I forhold til faget matematik betyder det bl.a. at folkeskolens formål skal ses i sammenhæng med fagets formål samt i relation til de seks matematiske kompetencer og de tre matematiske stofområder (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019). De matematiske kompetencer som er beskrevet i Fælles Mål, læner sig op ad de matematiske kompetencer Niss og Jensen (2002) definerer i KOM-rapporten. De afviger bl.a. herfra ved at "ræsonnement og tankegang" er slået sammen. Stofområderne i Fælles Mål er: 1) tal og algebra, 2) geometri og måling samt 3) statistik og sandsynlighed. Hensigten med Fælles Mål er bl.a. at matematiske kompetencer samtænkes med matematiske stofområder i undervisningsforløb (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019). I undervisningsforløbet blev den matematiske kompetence "ræsonnement og tankegang" samtænkt med stofområdet "geometri og måling", nærmere bestemt færdigheds- og vidensområderne "geometriske egenskaber og sammenhænge" samt "måling". Forløbet strakte sig over 11 lektioner fordelt over tre uger.

Eleverne arbejdede hovedsageligt i makkerpar eller mindre grupper, og de skulle også i parvise makkerpar overbevise hinanden om hvorfor deres argumenter og ræsonnementer gjaldt. Der var fælles lærerstyrede introduktioner, diskussioner og opsamlinger i klassen undervejs i forløbet.

I starten af forløbet blev eleverne introduceret til *Euklids Elementer*. Ligesom de også reflekterede over og diskuterede hvad der kendetegner matematiske argumentationer og beviser. Før klassen arbejdede med Euklids sætning 6, bog IV, arbejdede eleverne med titlen på Euklids sætning 34, bog I: "I et parallelogram er de modstående sider og vinkler indbyrdes lige store, og diagonalen halverer parallelogrammet." Her skulle de mundtligt prøve at argumentere for hvorfor det gælder. Parallelogrammer formodedes at være mere kendt stof for eleverne end indskrevne kvadrater, og de kunne muligvis bruge nogle beslægtede argumenter eller måder at konstruere på når de skulle arbejde med og ud fra teksten i Euklids sætning 6, bog IV. Denne opbygning var bl.a. et forsøg på at understøtte elevernes strukturforståelse. Klassen arbejdede også med Euklids fem forudsætninger, bog I. Eleverne afprøvede disse i GeoGebra. Det var tænkt som grundlag for det videre arbejde med Euklids sætning 6, bog IV: "I en Given cirkel at indskrive et Kvadrat." Eleverne arbejdede med sætningen i små tekstbidder der over-

5 En mere udførlig beskrivelse heraf kan bl.a. læses i Thomsen (2022).

ordnet var delt op i en konstruktionsdel og en bevisdel.[6] Derudover var der løbende spørgsmål til tekstbidderne. For at understøtte at eleverne kunne tage afsæt i selve teksten når de skulle konstruere figuren i GeoGebra, fik de ikke som udgangspunkt illustrationen til sætning 6, bog IV.



Figur 1. *Illustration af det indskrevne kvadrat i en cirkel fra sætning 6, bog IV (Eibe, 1897b, s. 73).*

Et eksempel på en tekstbid (Eibe, 1897b, s. 73) og de tilhørende spørgsmål eleverne fik, ses i figur 2.

3. Jeg siger
saa, at den ogsaa er ret-
vinklet. Thi da den rette Linie BD er Diameter
i Cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel.
Altsaa er ∠ BAD ret.

Undersøg i GeoGebra:

Passer det? Beskriv hvordan I vil undersøge det?

Hvorfor gælder det eller gælder det ikke?

Vil det altid være sådan i en halvcirkel? Hvorfor/hvorfor ikke? Her skal I argumentere og prøve at formulere et bevis.

Figur 2. *Eksempel på en delopgave eleverne blev stillet undervejs i forløbet.*

Denne tilgang til elevernes arbejde med teksten havde til hensigt at understøtte at eleverne kunne bringe deres ræsonnementskompetence i spil, udvikle en strukturopfattelse og arbejde med en dynamisk læsning af teksten. I selve teksten forklarer Euklid ikke hvorfor vinkel BAD i halvcirkel BAD er ret. Det er forklaret i en anden sætning i *Euklids Elementer* og tages på sin vis for givet her i teksten i sætning 6, bog IV. Eleverne skulle arbejde i makkerpar og afprøve det i GeoGebra for på den baggrund at formulere deres egne argumenter for hvorfor det gælder, og se om de yderligere

6 Denne måde at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra på er bl.a. inspireret af Olsen og Thomsen (2017).

kunne generalisere og give argumenter for om det altid vil være sådan i en halvcirkel eller ej. På den ene side understøttede det elevernes arbejde hermed da de fx kunne inddrage deres viden om vinkler hhv. trekanter og kvadrater i deres argumentationer når de fx gjorde brug af dragging af "punkt" A langs cirkelperiferien. Men det viste sig også at den umiddelbare visuelle feedback eleverne fik fra GeoGebra, kunne blive en argumentation i sig selv fordi det jo er tydeligt på skærmen at det fx forholder sig sådan at vinkel BAD er ret, uanset hvor du trækker punkt A hen på cirkelperiferien. Hvis eleverne ikke forholder sig yderligere til GeoGebras visuelle feedback, kan det betegnes som det Misfeldt & Jankvist (2018) med inspiration fra bl.a. Harel & Sowders overbevisningsskemaer (2007) kalder et tekno-autoritært overbevisningsskema.[7]

Metode – logbogssider og "Hvad har du lært?"

Som tidligere nævnt blev forløbet denne artikel handler om, gennemført i en 7.-klasse i en dansk folkeskole. Der deltog 22 elever og en lærer i dette undervisningsforløb. Læreren havde ikke haft eleverne tidligere, og eleverne kom også fra flere forskellige klasser og var i 7. klasse blevet samlet i én ny klasse.[8] Læreren og eleverne havde ikke arbejdet med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra tidligere. Eleverne svarede i ovenfor beskrevne undervisningsforløb én gang om ugen på en logbogsside, som i dette forløb var defineret ved et ark med forskellige spørgsmål til forløbet. De fik ikke særlig lang tid til at svare på hver logbogsside. I undervisningsforløbet havde logbogssiderne til formål at skabe et kort refleksionsrum for eleverne, og de blev i nogen grad brugt i den videre planlægning af forløbet. Logbogssiderne var altså ikke designet eller udfyldt med henblik på at indsamle empiri til at besvare hvordan elevernes svar aktivt kan bruges i undervisningen med henblik på at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Dertil kommer at jeg i denne artikel kun inddrager elevernes svar på hvad de har lært, og ikke sammenholder disse svar med elevernes svar på de resterende spørgsmål på logbogssiderne. Ligesom jeg i det følgende også kun bruger udvalgte elevsvar til at illustrere eller diskutere forskellige pointer i analysen af elevsvarene. Derfor følger også at der ikke kan siges noget mere generelt på baggrund af elevsvarene. Ikke desto mindre vurderer jeg at elevsvarene kan være interessante at analysere ud fra Mellin-Olsens (1984) begreber dynamisk læsning og strukturopfattelse samt Niss og Jensens (2002) definition af ræsonnementskompetencen, og at en sådan analyse kan give inspiration til hvordan man evt. kan arbejde med at inddrage elevers logbogssvar aktivt i en undervisning – også selvom de ikke blev brugt aktivt i det forløb svarene er skrevet med afsæt i.

7 Se evt. mere herom i Thomsen og Jankvist (2020).
8 I det samlede ph.d.-projekt deltog ydermere én 5.-klasse som arbejdede med *Platons Menon* (dansk oversættelse af Rangel-Nielsen, 1906). Derudover deltog én 6.-klasse hvor der var gunstige forhold.

Tabel 1 viser spørgsmålene på de tre logbogssider. De kan i nogen grad siges at falde i tråd med det Mellin-Olsen (1984) kalder dynamisk aktivitet. Dynamisk aktivitet karakteriseres ved at eleverne kan engagere sig i og få medejerskab over deres læring, bl.a. ved at de får mulighed for at forholde sig til kundskabernes[9] meningsindhold. Det kan spørgsmål som disse lægge op til:

- "Hva er kunnskapen god for?
- Hva kan den brukes til?
- Hvordan ønsker vi å bruke den?" (Mellin-Olsen, 1984, s. 87)

Det var kun på den sidste logbogsside at der var spørgsmål der rettede sig mod hvad eleverne fandt mest og mindst vigtigt, samt hvordan de troede de i fremtiden kunne bruge det de havde lært. Set ud fra Mellin-Olsens (1984) beskrivelse af dynamisk aktivitet kunne sådanne spørgsmål også være inddraget mere aktivt i udformningen af spørgsmålene på logbogssiderne undervejs i forløbet. På den måde kunne elevernes arbejde hermed måske i sig selv have bidraget yderligere til at eleverne bl.a. kunne arbejde ud fra en dynamisk læsning og strukturopfattelse med henblik på at understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

Tabel 1. *De spørgsmål eleverne blev stillet på de enkelte logbogssider.*

1. logbogsside	2. logbogsside	3. logbogsside
• Hvad har vi arbejdet med i denne uge? • Hvad har du lært? • Hvad synes du om at arbejde på denne måde? Forklar hvorfor	• Hvad har vi arbejdet med i denne uge? • Hvad har du lært? • Hvad synes du om at arbejde på denne måde? Forklar hvorfor • Var der noget du syntes var særlig svært eller let? • Hvad vil du særligt gerne blive bedre til?	• Hvad har vi arbejdet med i denne uge? • Hvad har du lært? • Var der noget du syntes var særlig svært eller let? • Hvad synes du har været det vigtigste ved det her forløb? • Hvad har været det mindst vigtige? • Hvordan tror du du fremover kan bruge det du har lært?

9 Mellin-Olsens brug af begrebet "kunnskap" bevares i nærværende artikel, men heri kobles det til en dansk skolekontekst anno 2024 og bruges som dækkende for både færdigheder, viden og kompetencer. Denne brug og oversættelsen af ordet "kunskap" diskuteres ikke i teksten.

Kategorisering og analyse

I det følgende fokuserer jeg særligt på elevernes svar på spørgsmålet "Hvad har du lært?" da det kan give en indikation af hvad eleverne selv mener de har lært i forløbet. Nogle svar som jeg, som tidligere nævnt, efter forløbets afslutning syntes der lå nogle muligheder i, og som med fordel aktivt kunne have været inddraget i selve undervisningsforløbet.

Tabel 2 er min kategorisering af elevernes svar på spørgsmålet "Hvad har du lært?" Disse kategorier fandt jeg repræsentative ud fra en gennemlæsning af de forskellige elevsvar på spørgsmålet "Hvad har du lært?" på de tre logbogssider. I tabel 2 angiver antallet af elever der har svaret, det antal af elever der svarede på logbogssiderne den dag de arbejdede med dem. Nogle af elevsvarene tæller i flere kategorier, fx hvis de har svaret at de har lært noget om både gamle tekster og argumentationer. Ligesom nogle elevers svar kan tælle flere gange inden for de samme kategorier i "i alt"-kolonnen. Selvom 15 elevsvar er kategoriseret under "argumentationer og beviser", svarer det kun til halvdelen af eleverne. Der er en elev som har svaret noget om argumentation på hver uges logbogsside, og to elever har svaret det på to af logbogssiderne.

Elevsvarene tyder på at eleverne ud over at argumentere matematisk hovedsageligt

Tabel 2. *Kategorisering af elevsvar på de enkelte logbogssider på spørgsmålet "Hvad har du lært?"*

Hvad har du lært? Kategorier med udgangspunkt i elevernes svar	Logbogsside 1: 20 elever har svaret	Logbogsside 2: 22 elever har svaret	Logbogsside 3: 20 elever har svaret	I alt
Euklid	7	2	0	9
Euklids forudsætninger/ påstande	2	1	0	3
GeoGebra	3	3	5	11
Geometri	4	2	7	13
Gamle tekster	2	6	4	12
Ord	4	0	0	4
Argumentationer og beviser	3	8	4	15
Program til screencast	3	1	0	4
Ikke så meget/noget	1	2	0	3
Andet	0	2	3	5
I alt	29	27	23	79

synes de har lært geometri, lært at læse gamle tekster samt er blevet bedre til at bruge GeoGebra. Her er det vigtigt at pointere at der også i svarene under disse kategorier kan ligge implicit at eleverne også synes de har lært at argumentere, eftersom det hele tiden var det overordnede mål med de forskellige undervisningsaktiviteter.

I den følgende analyse inddrager jeg også udvalgte elevsvar der illustrerer hvad svarkategorierne kan indeholde, og som kan medvirke til at underbygge analysen. Svarene er taget fra kategorierne "ord", "gamle tekster", "geometri" og "argumentationer og beviser" da de særligt knytter sig til Mellin-Olsens (1984) begreber dynamisk læsning og strukturopfattelse samt Niss og Jensens (2002) definition af ræsonnementskompetencen.

Ord og gamle tekster

Ud fra skemaet ses det at der på den første logbogsside er fire elever der har svaret at de har lært noget om ord. Svarene lyder således: "En masse ord", "En masse seje ord", "Forskellige ord som betyder noget forskelligt" og "At forstå matematiske ord på et andet niveau". Særligt de to sidste udsagn indikerer at eleverne gik i dialog med teksten i form af at være opmærksomme på ordenes betydning. Nogle af de elever som har skrevet at de har lært noget om gamle tekster, har svaret at de har lært "At bruge gamle tekster" eller "Gammelt matematik". Andre har svaret at de har lært "Næsten at forstå tekster der ikke giver mening", "At forstå svære tekster bedre" samt "At forstå svære tekster og argumentere for noget vi tror er rigtigt". Disse udsagn indikerer at eleverne har oplevet det at arbejde med at forstå og arbejde med teksterne som værende en del af deres læring i forløbet. Særligt det sidste udsagn kan ses som et udtryk for en dynamisk tilgang til læsning. Dobbeltheden i den dynamiske læsning hvor eleverne på den ene side oplever at forstå tekster bedre, samtidig med at de arbejder med at skabe deres egen forståelse og egne argumenter der passer til den kontekst eleverne arbejder med teksten i, synes at træde frem i dette udsagn.

Geometri

Når eleverne giver udtryk for at de har lært noget om geometri, er nogle af svarene meget overordnede. De lyder: "Større forståelse for geometri" og "Geometri". Andre svar giver indtryk af at eleverne har lært mere enkeltstående ting. Eksempler herpå kan være følgende elevsvar: "Jeg har lært hvad et parallelogram er", "Vinkler" og "Noget om indskrevne kvadrater og ABCD". Sidstnævnte synes at være et udtryk for at eleven også har lært noget om notationer. Nogle af elevsvarene kan måske indikere at eleverne begynder at se nogle sammenhænge og forskelle. En elev svarer "Linjer og vinkler", og en anden svarer "Euklids vinkler". Der er også en elev som svarer: "Tror faktisk jeg har lært noget nyt hver dag. Så det er lidt svært at nævne specifikke ting, men nok mest indskrevne kvadrater." Dette svar er interessant fordi det synes at vise at selvom spørgsmålet på sin vis er åbent, så synes eleven at forvente at der ønskes et mere specifikt svar, som en specifik ting, altså i dette tilfælde “indskrevne kvadrater”. Umiddelbart kan man ikke tolke heraf om eleven hentyder til at have lært nogle sammenhænge mellem cirklen og de indskrevne kvadrater, eller om det blot handler om at have forstået et nyt ord, altså hvad et indskrevet kvadrat er, og ikke hvorfor det er et indskrevet kvadrat. Med andre ord er det svært at vide om det er udtryk for en strukturopfattelse af arbejdet med begrebet “et indskrevet kvadrat”. I det hele taget er disse svar for korte til at sige noget om i hvor høj grad og mellem hvilke geometriske objekter eleverne begynder at se og forstå strukturer samt aktivt selv kan formulere sig heromkring. Derfor kunne det også have været relevant at have inddraget elevsvarene mere aktivt så eleverne havde fået mulighed for at udfolde disse, og de kunne bruges til at understøtte elevernes mulighed for at argumentere ud fra en strukturopfattelse.

Argumentere matematisk

En elev svarer: “Argumentere matematisk (jeg vidste ikke at det var en ting) – at skulle forstå svære tekster bedre.” Det er et eksempel på et svar der tæller under både kategorien “gamle tekster” og kategorien “argumentationer”. Umiddelbart er det interessant at eleven giver udtryk for ikke at have vidst at det var en ting at argumentere matematisk. Det taler for at eleven oplever at det er noget nyt. Eleven har formentlig arbejdet med matematisk argumentation tidligere, men måske ikke på en måde hvor det hele tiden var i fokus, og læreren løbende eksplicit italesatte det. Andre elever har også givet udtryk for at de har lært at argumentere matematisk. Eksempler på sådanne svar er: “Jeg har lært at argumentere for matematiske ting”, “Jeg har lært om Euklids forudsætninger, bevise ting og forklare ting”, “At argumentere for noget så jeg kan overbevise andre”. Disse forskellige svar indikerer at eleverne selv har en opfattelse af at de har arbejdet med matematiske argumentationer på forskellig vis, og på den baggrund kan det synes som om flere elever oplever at de har fået mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence. Undervejs i forløbet gav læreren forskellige forklaringer på hvad argumentationer og ræsonnementer kunne være. Ligesom eleverne også selv gav input hertil. Hvilket måske forklarer at en elev svarer: “Jeg har lært om matematiske argumenter.” Der er en enkelt elev der bruger ordet ræsonnementer i sit svar og skriver: “Om Euklid og om former og ræsonnementer.” Her skriver eleven noget om både Euklid, geometri og ræsonnementer. Det kan måske også understøtte at eleven som skrev “Argumentere matematisk (jeg vidste ikke at det var en ting)”, også forbinder det at argumentere matematisk med Euklids tekster, og derfor bliver det at arbejde med teksterne og deres opbygning også en ny måde at synliggøre matematisk argumentation og ræsonnementer på. I forløbet blev det ikke som sådan løbende eksplicit italesat at et ræsonnement kan defineres som en kæde af argumenter, hvilket der synes at have været et yderligere potentiale i i højere grad at synliggøre over for eleverne. Det kunne formentlig med fordel understøttes yderligere hvis der også var blevet arbejdet mere bevidst og eksplicit ud fra en strukturopfattelse (Thomsen, 2022).

Diskussion

Helt overordnet kan flere af elevsvarene på spørgsmålene på logbogssiderne synes lidt kortfattede, hvilket kan skyldes selve det at eleverne skulle skrive dem ned og ikke fik meget tid hertil. Det kan i hvert fald ud fra elevernes svar på disse logbogssider være svært at drage nogle konklusioner om i hvor høj grad eleverne fik understøttet deres muligheder for at udvikle en strukturopfattelse. Som tidligere nævnt synes det som om eleverne i nogen grad arbejdede ud fra en strukturopfattelse, men også at der helt klart var et yderligere potentiale til i højere grad at fokusere på det og udarbejde forskellige typer af aktiviteter der kunne understøtte det (Thomsen, 2022). Her kunne elevernes svar på logbogssiderne fx være inddraget aktivt i selve undervisningsforløbet. Hvis vi sammenholder elevsvarene inden for kategorien geometri, synes de enkeltstående svar i den grad at kunne have bidraget til at skabe rum for i klassen at diskutere de bagvedliggende strukturer. De to elevsvar "Jeg har lært hvad et parallelogram er" og "Noget om indskrevne kvadrater og ABCD" kunne fx have været bragt op i en fælles diskussion i klassen hvor elever og lærer sammen fandt forklaringer på forskelle og ligheder mellem parallelogrammer og kvadrater – kan det fx være et kvadrat hvis diagonalerne ikke er vinkelrette? Denne diskussion kunne yderligere udfoldes og sammenholdes med udvalgte "sætningsbidder" fra originalkilden. I Euklids sætning 6, bog IV, er det givet i konstruktionsdelen at diagonalerne er vinkelrette, og der står: "Lad der i Cirkel ABCD være trukket to paa hinanden vinkelrette Diametre AC og BD" (Eibe, 1897b, s. 73). Senere i sætning 6 står der: "Thi da den rette linje BD er Diameter i cirkel ABCD, saa er BAD en Halvcirkel. Altsaa er ∠ BAD ret." (jf. figur 2, Eibe, 1897b, s. 73). Her kunne der været blevet sat spørgsmålstegn ved om denne argumentation behøvedes i argumentationsrækken i hele sætningen, eller om denne del af sætningen kunne tages ud og blive et afsæt for at eleverne, evt. i samarbejde med læreren, kunne have formuleret og udført en argumentationsrække der ville udmønte sig i et ræsonnement for at have tegnet et indskrevet rektangel i cirklen, samt hvorfor det ville være et rektangel og ikke et kvadrat. Her kunne de i undervisningen have arbejdet med at sammenholde den del af sætning 6, bog IV, med elevernes forklaringer af hvorfor det var et rektangel, da de arbejdede med titlen på sætning 34, bog I. Derudover kunne notationsformerne fra elevkommentaren "Jeg har lært hvad et parallelogram er" og "Noget om indskrevne kvadrater og ABCD" være bragt i spil. Her kunne der i en fælles diskussion i klassen lægges op til at tale om hvilke notationer

Euklid bruger, og hvordan forskellige argumentationer ud fra elevernes arbejde med GeoGebra kunne se ud hvis de hovedsageligt måtte bruge bogstaver og symboler. Det kunne formentlig i højere grad have understøttet at eleverne 1) udvidede deres strukturforståelse med henblik på at kunne ræsonnere i form af kæder af argumenter og 2) kunne gå fra det enkelte eksempel til de mange eksempler (via fx dragging i GeoGebra) og til en større grad af generalisering. Ligesom det kunne understøtte en dynamisk læsning af originalkilden.

Elevsvarene "Vinkler" og "Euklids vinkler" kunne også have været bragt i spil i en fælles diskussion i klassen. Det kunne fx have givet anledning til i højere grad at diskutere forskelle og ligheder mellem, hvordan GeoGebras "vinkelmålerknap" kan bruges til at understøtte en formulering af kæder af argumenter for hvilke typer firkanter, der fremkommer, når der fx trækkes i den indskrevne firkants hjørner langs cirkelperiferien og så argumentationsrækken i Euklids sætning. Det skal tilføjes at overvejelser herom i nogen grad var på banen i den fælles opsamling i klassen, men det kunne måske have fremstået tydeligere hvis der var lagt op til at de tog udgangspunkt i elevsvarene på logbogssiderne "Vinkler" og "Euklids vinkler".

Selve elevernes arbejde med at skrive logbog kunne også have været stilladseret anderledes. Eleverne kunne fx have fået nogle indledende formuleringer til trin i en argumentation der tog udgangspunkt i de matematiske objekter og sammenhænge herimellem de havde arbejdet med. Logbogsarbejdet kunne også have været udvidet så der blev lagt op til at eleverne inddrog skærmbilleder eller screencast. Eleverne kunne fx have valgt et skærmbillede ud fra GeoGebra som viste noget de havde lært. Det kunne inddrages som et led i undervisningen hvor eleverne mundtligt, evt. suppleret af egne tegninger, kunne begrunde deres valg af billede samt åbne for at andre elever kunne spørge ind til det og give deres besyv med i den forbindelse. Eleverne kunne også være blevet bedt om at vælge forskellige skærmbilleder af deres arbejde i GeoGebra der illustrerede en "kæde af argumenter". På den baggrund kunne de fx fælles i klassen yderligere arbejde med et begrebskort eller en anden visualisering af deres forskellige billedvalg og evt. sammenhænge herimellem. Sådanne aktiviteter kunne muligvis i højere grad have understøttet elevernes strukturforståelse så de aktivt kunne bruge den til selv at formulere kæder af argumenter der knyttede sig til deres arbejde med GeoGebra og derfor kunne være anderledes end de argumenter og kæder heraf der står i originalkilden.

Konklusion

Umiddelbart synes det plausibelt at kunne konkludere at det kan give mening at tage afsæt i begreberne dynamisk læsning og strukturopfattelse i en fortolkning af hvordan elevsvar på "Hvad har du lært" evt. kan bruges aktivt i en undervisning hvor der er fokus på at arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra med henblik på at understøtte elevernes mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence.[10] I denne artikel har jeg forsøgt at give nogle bud på 1) hvordan elevernes logbogssvar kunne være inddraget mere aktivt i undervisningen end tilfældet var i det forløb elevsvarene knytter sig til, og 2) hvordan selve logbogsarbejdet kunne have været stilladseret anderledes. Begge dele med det formål at sætte større fokus på elevernes muligheder for at udvikle en/udvide deres strukturopfattelse så deres grundlag for at følge og formulere kæder af argumenter yderligere kunne skærpes. Derudover håber jeg at artiklen kan lægge op til at bringe et logbogsarbejde aktivt i spil hvis og når man som forsker, underviser eller læremiddelforfatter vil skabe undervisnings- og læringssituationer der understøtter elevernes muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence når de arbejder med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra.

Referencer

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti. O. (2002). A Cognitive Analysis of Dragging Practices in Cabri Environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34,* 66-72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Balsløv, C.U. (2018). *Den gensidige komplementaritet af Cas og originalkilder i matematikundervisningen*. Kandidatspeciale. DPU, Aarhus Universitet.

Børne- og Undervisningsministeriet. (2019). *Matematik – faghæfte 2019*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_Fagh%C3%A6fte_Matematik.pdf

Chorlay, R. (2015). Making (More) Sense of the Derivative by Combining Historical Sources and ICT. I E. Barbin, U.T. Jankvist & T.H. Kjeldsen (red.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the Seventh European Summer University* (s. 485-498). DPU, Aarhus Universitet.

Chorlay, R. (2016). Historical Sources in the Classroom and Their Educational Effects. I L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (red.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (s. 5-23). IREM de Montpellier. https://hal.science/hal-01349227/document

Eibe, T. (oversætter) (1897a). *Euklids Elementer I-II*. [En dansk oversættelse af Euklids Elementer, bog I og II]. Gyldendal.

Eibe, T. (oversætter) (1897b). *Euklids Elementer III-IV*. [En dansk oversættelse af Euklids Elementer, bog III og IV]. Gyldendal.

10 Se fx Thomsen (2022) for at få andre perspektiver på hvordan elevers arbejde med samspillet mellem originalkilder og GeoGebra kan understøtte deres muligheder for at udvikle deres ræsonnementskompetence, herunder et særligt fokus på den produktive side heraf.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. I F.K. Lester, Jr. (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 805-842). Information Age Publishing.

Højsted, I.H. (2020). Guidelines for Utilizing Affordances of Dynamic Geometry Environments to Support Development of Reasoning Competency. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *25*(2), 71-98. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/07/25_2_071098_hojsted.pdf

Isoda, M. (1998). Developing the Curriculum for Curves Using History and Technology. I W.-C. Yang, K. Shirayanagi, S.-C. Chu & G. Fitz-Gerald (red.), *Electronic Proceedings of the 3rd Asian Technology Conference in Mathematics*. https://atcm.mathandtech.org/EP/1998/ATCMP047/paper.pdf

Jankvist, U.T. & Geraniou, E. (2019). Digital Technologies as a Way of Making Original Sources Accessible to Students. I E. Barbin, U.T. Jankvist, T.H. Kjeldsen, B. Smestad & C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (s. 107-130). OsloMet. https://skriftserien.oslomet.no/index.php/skriftserien/article/view/664/179

Jankvist, U.T. & Geraniou, E. (2021). "Whiteboxing" the Content of a Formal Mathematical Text in a Dynamic Geometry Environment. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *7*(3), 222-246. https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6

Jankvist, U.T., Misfeldt, M. & Aguilar, M.S. (2019). Tschirnhaus' Transformation: Mathematical Proof, History and CAS. I E. Barbin, U.T. Jankvist, T.H. Kjeldsen, B. Smestad & C. Tzanakis (red.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (s. 319-330). OsloMet. https://skriftserien.oslomet.no/index.php/skriftserien/article/view/664/179

Jones, K. (2005). Research on the Use of Dynamic Geometry Software: Implications for the Classroom. I J. Edwards & D. Wright (red.), *Integrating ICT into the Mathematics Classroom* (s. 27-29). Association of Teachers of Mathematics.

Kidron, I. (2004). Polynomial Approximation of Functions: Historical Perspective and New Tools. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*(3), 299-331. https://doi.org/10.1023/B:IJCO.0000021793.71677.cd

Kristensen, B.T. (2017). Nytårstanker i GeoGebra Instituttet. Folkeskolen.dk. https://blog.folkeskolen.dk/blog-geogebra-bloggen-it/nytarstanker-i-geogebra-instituttet/176094

Mariotti, M.A. (2002). Justifying and Proving in the Cabri Environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 257-281. https://doi.org/10.1023/A:1013357611987

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet – en undervisningslære*. NKI Forlaget.

Misfeldt, M. & Jankvist, U.T. (2018). Instrumental Genesis and Proof: Understanding the Use of Computer Algebra Systems in Proofs in Textbooks. I M. Tabach, H.-S. Siller, L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel & C. Vale (red.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education: Tools, Topics and Trends* (s. 375-385). Springer. ICME-13 Monographs. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4

Niss, M. & Jensen, T.H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring – ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18.

Olsen, I. & Thomsen, M. (2017). *Matematikhistorie og it i matematikundervisningen i grundskolen*. [Upubliceret speciale]. DPU, Aarhus Universitet.

Olsen, I.M. & Thomsen, M. (2018). Matematisk literacy og IT. I K. Friis & D. Østergren-Olsen (red.), *Literacydidaktik i fagene – på mellemtrinnet* (s. 71-82). Dafolo.

Rangel-Nielsen, G. (oversætter) (1906). *Platons Menon*. Det Filologisk-Historiske Samfund.

Thomsen, M. (2020). Reasoning Competency and the Link Between GeoGebra and Original Mathematics Sources. I B. Barzel, R. Bebernik, L. Göbel, M. Pohl, H. Ruchniewicz, F. Schacht & D. Thurm (red.), *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14* (s. 338-339). https://doi.org/10.17185/duepublico/70794

Thomsen, M. (2021a). Working with Euclid's Geometry in GeoGebra: Experiencing

Embedded Discourses. I G.A. Nortvedt, N.F. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Hähkiöniemi, B.E. Jesse, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Nilsen, G. Pálsdottir, P. Portaankova-Koivisto, J. Radisic & A. Werneberg (red.), *Bringing Nordic Mathematics Education into the Future: Proceedings of Norma 20 – The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education* (s. 257-264). Svensk Förening för MatematikDidaktisk Forskning.

Thomsen, M. (2021b). Using Dynamic Reading to Support Students' Development of Mathematical Reasoning Competency [abstract til konference]. *NOFA8 – The 8th Nordic Conference on Subject Education* [abstract 20]. https://www.hvl.no/globalassets/hvl-internett/arrangement/2021/nofa-8/abstractr-book---nofa8---acceptance-type-abstract-book-14.05.pdf

Thomsen, M. (2022). *Matematikhistoriske originalkilder, ræsonnementskompetence og GeoGebra på mellemtrinnet*. DPU, Aarhus Universitet. https://doi.org/10.7146/aul.448

Thomsen, M. & Jankvist, U.T. (2020). Reasoning with Digital Technologies: Counteracting Students' Techno-Authoritarian Proof Schemes. I A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalova, Z. Lavicza, R. Weinhandl, A. Clark-Wilson & H.-G. Weigand (red.), *Proceedings of the Tenth ERME Topic Conference (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)* (s. 483-490). Johannes Kepler University. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02932218/document

Thomsen, M. & Jankvist, U.T. (2022). Mathematical Thinking in the Interplay Between Historical Original Sources and GeoGebra. I U.T. Jankvist, A. Clark-Wilson, H.-G. Weigand, R. Elicer & M. Thomsen (red.), *Proceedings of the 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching: Making and Strengthening "Connections and Connectivity" for Teaching Mathematics with Technology* (s. 189-196). DPU, Aarhus Universitet. https://doi.org/10.7146/aul.452

Thomsen, M. & Olsen, I.M. (2019). Original Sources, ICT and Mathemacy. I U.T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 2060-2061). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University og ERME.

English abstract

This article puts the concepts dynamic reading and structural understanding into play when it comes to working with the interplay between original sources and GeoGebra with the aim of supporting students' possibilities to develop their reasoning competency. Initially, arguments are given for working with the interplay between original sources and digital technologies. Then the concepts dynamic reading, structural understanding, and reasoning competency are unfolded. Excerpt from students' answers in a study carried out in 7th grade are analyzed with these concepts. Finally, reflections are made upon how the students' answers could have been used more actively in the teaching module.