

Hvordan bruger gymnasiets matematiklærere deres uddannelse?



Carl Winsløw, Københavns Universitet



Katrine Fredensborg
Dedenroth, Hvidovre
Gymnasium & HF

Abstract: I denne artikel undersøger vi hvordan danske gymnasielærere i matematik ser på deres universitetsuddannelse, særligt brugbarheden af dennes matematiske indhold i forhold til undervisning i et konkret emne, nemlig differentialregning. Studiet er baseret på en spørgeskemaundersøgelse om dette emne blandt lærere som har taget pædagogikum i perioden 2018-2022. Det overordnede resultat er at ca. 1/4 af lærerne angiver at bruge viden fra universitetet i forbindelse med undervisningen i høj eller meget høj grad, mens godt halvdelen angiver nogen grad af brug. Adspurgt om konkrete eksempler på brug af universitetsmatematik i forbindelse med deres undervisning i differentialregning giver ca. 1/3 mere generiske svar, mens godt og vel 1/3 peger på konkrete eksempler; ca. 1/4 angiver at de slet ikke oplever en sådan brug.

Introduktion

Fastansættelse som matematiklærer i gymnasiet kræver en kandidatuddannelse som opfylder de faglige mindstekrav i matematik (Uddannelses- og Forskningsministeriet, 2018). Det sidste betyder i praksis at uddannelsen indeholder studieaktiviteter i et omfang af mindst 90 ECTS-point inden for emneområderne differential- og integralregning, analyse, geometri, lineær og abstrakt algebra, sandsynlighedsteori og statistik, diskret matematik og "breddeemner" som matematikhistorie, videnskabsteori og didaktik. De matematikfaglige kurser er *generiske*, dvs. de er ikke specielt indrettet til kommende gymnasielærere og tages af mange studerende som ikke sigter på denne profession. Den praktiske indføring i lærergerningen kommer efter endt universitetsstudie, i pædagogikum, hvor den nye lærer vejledes af en eller flere erfarne lærere; der indgår også gymnasial pædagogik og fagdidaktik.

I mange lande – fx Tyskland, Frankrig, Sverige og Norge – er denne model inden for de seneste årtier afløst af mere integrerede uddannelser hvor de generiske mate-

matikkurser er suppleret med eller helt erstattet af professionsrettede kurser i matematik – og altså designet specifikt til kommende lærere. I Danmark findes sådanne kurser stort set ikke.

Vi har bl.a. derfor valgt at undersøge hvordan danske gymnasielærere oplever at deres matematiske studie bruges i faktisk undervisning. Den internationale baggrund og forskningslitteratur omtales i næste afsnit. Undersøgelsens spørgsmål og metode beskrives nærmere i det efterfølgende afsnit; resultaterne præsenteres og diskuteres i artiklens to sidste afsnit.

Baggrund

Spørgsmålet om hvordan man bedst indretter den matematikfaglige forberedelse af matematiklærere, er langt fra nyt. Der findes således en meget omfattende forskningslitteratur som angriber spørgsmålet fra forskellige vinkler. Man kan faktisk anse dette spørgsmål som et af de mest grundlæggende for udviklingen af matematikkens didaktik, der historisk og institutionelt opstod med henblik på at etablere en videnskabelig basis for matematiklæreruddannelse, særligt på gymnasialt niveau.

Den tyske matematiker Felix Klein (1849-1925) arbejdede gennem hele sin karriere med at udvikle både den matematiske universitetsuddannelse i almindelighed og den specifikke forberedelse af kommende matematiklærere i særdeleshed (Weigand et al., 2019). Et grundlæggende tema, som han allerede formulerede i sin tiltrædelsesforelæsning (Rowe, 1985), er at læreren skal anskue den elementære matematik “fra et højere standpunkt” – altså ikke blot have videregående matematisk viden, men også bruge den til at udvikle sin undervisning. Men Klein indså også at det ikke sker af sig selv. I et ofte citeret forord til trebindsværket *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Elementær matematik fra det højere standpunkt) fra 1908 skriver han:

“Når [lærer-kandidaten], efter endt studie, bliver lærer, forventes han pludselig at undervise i den traditionelle elementære matematik som man gør det i skolen; og da han næppe, uden hjælp, ser nogen forbindelse mellem denne opgave og hans universitetsmatematik, falder han snart tilbage på den veletablerede måde at undervise på, og hans universitetsstudier forbliver et mere eller mindre behageligt minde som ingen indflydelse har på hans undervisning.” (Klein, 2016, s. 1, oversat af forfatteren)

Hovedindholdet i Kleins trebindsværk er dog ikke den slags generelle udsagn, men derimod en universitetsmatematisk perspektivering af emner fra skolematematikken – fra aritmetik over differential- og integralregning og geometri til hvad vi i dag kalder anvendt matematik. Klein fremhæver hovedtræk af emnernes historie, struktur,

intuitive betydning, anvendelser og indbyrdes forbindelser som det også tænkes at de fremtidige lærere kan formidle til eleverne fra det "højere standpunkt".

Kleins bøger udgør en historisk, men fortsat indflydelsesrig model for hvad vi kalder den stofdidaktiske tyske metode: med henblik på undervisning at analysere og strukturere den elementære matematiks centrale idéer, herunder hvad man i dag betegner som matematiske *Grundvorstellungen* ("grundforestillinger"). Stofdidaktiske kurser udgør også aktuelt et centralt element i tysk matematiklæreruddannelse – med titler som *Didaktik der Analysis*. Sådanne kurser er professionsrettede matematikkurser som behandler skolematematiske emnekredse på basis af et videregående studie af den videregående matematik (se fx Buchbinder, 2017).

Ligesom Kleins øvrige reformforslag – fx indførelsen af differential- og integralregning som centralt stof i den gymnasiale matematik – har også hans idéer om læreruddannelse på forskellig måde fået indflydelse i andre lande (se fx Weigand et al., 2019, del IV). Helt frem til 1960 indeholdt danske universiteters "skoleembedseksamen" i matematik således elementer af stofdidaktik i bred forstand (Madsen, 2008, s. 792). Denne professionsrettede matematik forsvandt med reformerne omkring 1960, som bl.a. sigtede på i højere grad at basere undervisningen i matematik og naturfag på videnskabsfagernes seneste udvikling – ikke blot på universitetet, men også i gymnasieskolen.

En anden tendens trak i modsat retning. I hele den industrialiserede verden har den "videregående skole" (gymnasiet) i det 20. århundrede udviklet sig fra en elitær forberedelse af eksklusive universitetsstudier til en uddannelse som tiltrækker en bred (ofte den største) del af en ungdomsårgang. Det førte i 1970'erne til en fornyet opmærksomhed på afstanden mellem de moderne videnskabsfag og hvad det er muligt og ønskeligt at formidle i skolen og gymnasiet (fx Freudenthal, 1973). Nye reformer fulgte mange steder også af gymnasielærernes faglige uddannelse.

Reformer og udfordringer i læreruddannelserne har også vist behovet for viden på området. Allerede mod slutningen af 60'erne kom de første af en lang række af amerikanske *effektstudier*. Her forsøgte man fx at undersøge korrelationen mellem omfanget af en lærers studier i abstrakt algebra og hvor godt lærerens elever klarer sig i elementær algebra. Med sådanne primitive mål (fx antallet af videregående kurser og elevernes resultater i en test) viste det sig, til manges overraskelse, at der ikke var nogen signifikant korrelation (for en senere oversigt over både de første og senere opfølgende studier, se Eisenberg, 1977). Blandt de nuancer som tidligt blev bragt op, var at alle lærerne i de tidlige studier faktisk havde flere års videregående matematikstudier bag sig; man kunne altså tænke sig at et vist minimum af sådanne studier faktisk gør en positiv forskel. Et ofte citeret studie af Monk (1994) viste da også at når vi sammenligner lærere med ca. et års videregående studier af generel matematik med lærere der ikke har sådanne forudsætninger, så kan man faktisk finde en signifikant

forskel mellem elevernes præstationer. Men om denne forskel skyldes lærernes uddannelser, er stadig svært at sige: I mange effektstudier finder man fx en klar tendens til at elever hvis lærere har mere omfattende uddannelse, også har mere privilegeret social baggrund, går på skoler som på forskellige måder har bedre forhold, osv. Det er derfor også værd at notere at adskillige kvalitative studier – måske mest berømt Liping Mas (1999) – har demonstreret at videregående universitetsstudier ikke i sig selv sikrer et solidt greb om mere elementære emner såsom brøkregning.

Senere har mere subtile mål for lærerens professionsrettede viden om matematik (*mathematical knowledge for teaching*, se fx Ball et al., 2008) gjort det muligt at gennemføre kvantitative effektstudier med signifikante og kontrollerede korrelationer mellem sådanne mål – og tilsvarende mål for elevernes resultater. Det gælder også nyere internationale studier som TEDS-M (se fx Schmidt et al., 2011; Tatto et al., 2018). Det vil her føre for vidt at give en nærmere gennemgang af denne type forskning; men det er klart at kvantitative effektstudier har tilført området nye og tankevækkende metoder og resultater.

Samtidig har der i de senere år været en fornyet interesse for kvalitative studier – fx af hvordan og i hvilket omfang universitetsstuderende kan gøres i stand til at mobilisere universitetsmatematisk viden når de skal løse udfordrende opgaver om gymnasial matematik (fx Winsløw & Grønbæk, 2014; Wasserman et al., 2023), og af hvordan og i hvilket omfang lærerne selv oplever at de bruger deres videregående studie af generisk matematik når de underviser (fx Zazkis & Leikin, 2010; Even, 2011). Nærværende artikel tager det sidste synspunkt, idet vi spørger danske gymnasielærere der har taget pædagogikum inden for de seneste fem år.

Det kan bestemt diskuteres hvad "brug" af uddannelsesforudsætninger i en profession betyder, og hvordan den kan og bør undersøges (se fx Tatto, 2021, i forhold til læreruddannelse). Det er også klart at en professionsuddannelse i princippet skal være indrettet med henblik på fremtidig og ikke kun aktuel brug, og at nyuddannede matematiklærere ikke kan vide hvad de skal kunne undervise i om 20 år (og det kan jo ingen). Trods disse generelle indvendinger mod "brugerundersøgelser" af uddannelse kan man alligevel ikke afskrive relevansen af at undersøge hvordan professionens udøvere selv oplever brugen af deres uddannelse. Det gælder særligt i forbindelse med den profession der her spørges, givet den samfundsmæssige betydning af gymnasiets matematikundervisning og dens omfattende udfordringer (se fx Jessen et al., 2015). Man kan derfor snarest undre sig over at der ikke findes flere danske undersøgelser af hvordan universitetsuddannelserne bidrager til den gymnasiale matematikundervisning.

Spørgsmål og metode

Gymnasielærernes matematikbaggrund omfatter som nævnt overvejende generisk indhold fra universitær matematik. Som Zazkis og Leikin (2010, s. 279) skriver:

“While undergraduate content requirements for secondary teachers exist almost everywhere, it has not been investigated *how* mathematical knowledge acquired at the undergraduate level—referred to here as AMK, ‘advanced mathematical knowledge’—is manifested in teaching practice.”

Vi noterer i parentes at “secondary teachers” refererer til en bredere gruppe af lærere end gymnasiets og også omfatter hvad vi i Danmark kender som 7.-9. klasse; så på dette punkt falder Danmark altså uden for “almost everywhere”.

Zazkis og Leikins analyse af “how”-spørgsmålet er baseret på interviews og spørgeskemasvar fra 52 matematiklærere på “secondary” niveau som deltog i en række efteruddannelseskurser. Lærerne bliver både spurgt til i hvilket omfang de oplever at bruge videregående matematikviden i deres undervisning – det gør det store flertal – og de bliver bedt om at give konkrete eksempler på denne brug. Her er det markant at det store flertal af deltagerne hovedsageligt beskriver nytteværdien af den videregående matematik i generelle termer, ofte med henvisning til deres eget forhold til matematik som helhed (fx overblik, overskud og sikkerhed). Forfatterne konkluderer at det kan skyldes både at deltageres konkrete brug ikke er fuldt bevidst, og at afstanden mellem indholdet i universitetsuddannelsen og den matematik lærerne underviser i, gør det vanskeligt for dem at udpege konkret brug. Det sidste kunne betyde at det er relativt underordnet præcis hvad forudsætningerne består af, og måske også at Kleins problem (mangel på reel brug) alligevel forekommer i et vist omfang.

I vores undersøgelse har vi villet se, dels om tilsvarende resultater genfindes i et mere omfattende og tilfældigt sample, dels om man ved enkle greb i spørgeteknik kan komme tættere på konkrete former for brug. Vi har derfor valgt at spørge til konkrete anvendelser i forbindelse med undervisning i et specifikt gymnasialt emne, nemlig differentialregning, hvor forbindelserne til universitære kurser i fx calculus og analyse kunne tænkes at være lettere at udpege. For at kunne håndtere et sample på flere hundrede deltagere fra hele landet valgte vi at stille vores spørgsmål via et spørgeskema som blev besvaret anonymt. Deltagerne fik dog lejlighed til at melde sig frivilligt til opfølgende og uddybende interviews som i sagens natur ikke kunne være anonyme; resultaterne herfra behandles ikke direkte i denne artikel, men har ikke desto mindre bidraget til at validere vores analyse af de anonyme besvarelser.

Spørgeskemaet indledtes med generelle spørgsmål vedr. uddannelsesinstitution, dimissionsår, antal års erfaring som gymnasielærer og om respondenterne har hoved- eller sidefag i matematik. Derefter spurgte vi mere konkret til brugen af universitets-

matematik i gymnasieundervisning. De af deltagerne hvis uddannelse fandt sted på Københavns Universitet, fik også mulighed for at pege på bestemte kurser som (over en længere årrække) har været anbefalet dem som ønsker kompetence til at undervise i gymnasiet. Først derefter stillede vi to mere overordnede spørgsmål: "I hvilket omfang mener du sammenfattende at du bruger den viden du har opnået på universitetet, når du underviser i differentialregning i gymnasiet?" – og "Er der noget ved uddannelsen som gymnasielærer i matematik du mener burde være anderledes?"

Skemaet blev i efteråret 2023 sendt til personer som afsluttede pædagogikum i perioden 2018-2022 med fagdidaktisk kursus i matematik, som er obligatorisk for alle der underviser i dette fag. Det skete på basis af mailadresser fra Syddansk Universitet, som også stod for udsendelsen af skemaet i SurveyXact, og som efterfølgende tilsendte os rådata uden mailadresser på andre end dem der frivilligt meldte sig til interviews. Skemaet blev udsendt til i alt 338 personer hvoraf 103 besvarede alle lukkede spørgsmål. Herudover svarede 29 på nogle af de lukkede spørgsmål – hovedsageligt de indledende. Der er flere sandsynlige årsager til at kun ca. 30 % svarede. De anvendte mailadresser var dem som deltagerne opgav i forbindelse med pædagogikum, for nogles vedkommende altså for godt seks år siden; manglende svar kan således hænge sammen med jobskifte og andre grunde til at mailen ikke nåede modtageren. Det er også sandsynligt at en del lærere, midt i et travlt skoleår, har fundet det vanskeligt at finde tid til at besvare de hovedsageligt åbne spørgsmål fyldestgørende. Der er en oplagt risiko for skævheder i respondentgruppen: Deltagerne har næppe skiftet skole siden pædagogikum, og de kan have særlig stærk interesse eller særlig stærkt engagement i undersøgelsens emne. Blandt de 103 respondenter var der faktisk mange der gav ganske detaljerede og undertiden også lange svar på de åbne spørgsmål. Respondenternes engagement udtrykkes også ved at hele 35 meldte sig frivilligt til de opfølgende interviews.

Vi mener altså trods alt at data fra undersøgelsen udgør en rimelig basis for at belyse følgende spørgsmål:

- Hvordan beskriver gymnasiets matematiklærere deres brug af universitære matematikkurser i forbindelse med deres undervisning i differentialregning?
- Hvilket omfang angiver lærerne at denne brug har?
- Er der noget ved uddannelsen som lærerne mener burde være anderledes – og i givet fald hvad?

Det sidste spørgsmål er svært at stille neutralt. En enkelt lærer henvendte sig i forbindelse med undersøgelsen direkte til os med det synspunkt at undersøgelsens undertone skulle være at understøtte ændringsforslag. Det er dog kun det sidste spørgsmål der angår dette, og hovedparten af undersøgelsen drejer sig om at få mere information

om de kvaliteter som den eksisterende danske model har, herunder om man ved at spørge specifikt til et centralt element af gymnasietstoffet kan få mere konkrete svar end i tilsvarende tidligere undersøgelser. Ved først at lade deltagerne reflektere over positive elementer af denne brug er der i hvert fald ikke tendentiøst lagt op til kritik. Man kan samtidig sige at når en del af lærerne beskriver brugen som overvejende generisk (som i den tidligere undersøgelse af Zazkis og Leikin (2010)) eller som relativt ubetydelig, så kunne det i et fremadrettet perspektiv anses som en forsømmelse ikke at stille brugerne af uddannelserne det nævnte sidste spørgsmål.

Resultater

Vi præsenterer i det følgende undersøgelsens hovedresultater. For at sammenfatte besvarelsener af de åbne spørgsmål har vi foretaget en kategorisering af svarene i hovedtyper som beskrives i gennemgangen, baseret på de definitioner som angives – svarene er altså kodet på basis af beskrivelserne af svarkategorierne.

Populationens sammensætning

Når vi ser på alle respondenter der har besvaret en del af spørgeskemaet, fordeler de sig som vist i tabel 1 på dimissionsår (det år hvor de afsluttede kandidatgraden).

Tabel 1. Respondenternes dimissionsår.

92-99	00-10	11-15	16-17	18-19	2020	2021	2022
6	9	22	24	30	15	10	8

At 37 respondenter har kandidatuddannelser fra før 2015, kan forklares med at de har fungeret som timelærere eller haft andre erhverv inden de fik uddannelsesstilling; 16 af disse har kun besvaret indledende spørgsmål. Blandt de 130 der har besvaret spørgsmålet om antal års undervisningserfaring, angiver ingen mere end 11 år, og kun 11 respondenter angiver mere end 8 års erfaring. Respondenterne er altså i langt overvejende grad relativt nyuddannede lærere der har undervist i 1-8 år.

Fordelingen af respondenter på tidligere studiested er vist i tabel 2.

Tabel 2. Respondenternes studiesteder (universiteter).

Aarhus	København	Syddansk	Aalborg	Roskilde	Andet
40	34	24	17	5	10

Blandt de 10 som angiver “andet”, har 6 deres uddannelse fra Danmarks Tekniske Universitet, 2 har læst i udlandet, og 2 har suppleret en anden uddannelse ved et af de fem angivne universiteter.

Der er 51 som angiver at have hovedfag i matematik, 64 har sidefag, mens 15 har opnået undervisningskompetence på andre måder. Det vurderes at denne fordeling er nogenlunde repræsentativ for nyuddannede lærere i perioden (se fx Jessen et al., 2015, afsnit 5.2.1).

Brug af universitetsmatematik i forbindelse med undervisning i differentialregning

Et hovedspørgsmål i undersøgelsen var følgende: “Forklar med et konkret fagligt eksempel hvordan du bruger din matematikviden opnået på universitetet når du underviser i differentialregning.” De fleste besvarer dette spørgsmål med få sætninger, men der er også en del længere redegørelser. I enkelte besvarelser indgår flere synspunkter, men alligevel en form for konklusion som kan henføres til flere af nedennævnte hovedkategorier:

1. *Formel brug*: Universitetsmatematikken bruges til at *formidle beviser og formelle begreber*, fx beviser baseret på “tretrinsreglen” eller forklaring af grænseværdibegrebet
2. *Eksempler*: Der bruges eksempler, anvendelser eller visualiseringer (fra universitetet) i forbindelse med fx differentialkvotient eller grænseværdi
3. *Historie*: Der nævnes mere eller mindre konkrete *historiske* perspektiver
4. *Generisk*: Der gives ikke konkrete eksempler, men henvises til *generisk udbytte*, fx overblik eller sikkerhed som er opnået på universitetet
5. *Ingen*: Det siges eksplicit at en sådan brug ikke forekommer, uden at der henvises til mere generisk brug.

En simpel optælling af besvarelsernes kategorier er vist i tabel 3.

Tabel 3. Respondenternes faglige eksempler på brug, i brede kategorier.

Formel brug	Eksempler	Historie	Generisk	Ingen	I alt
20	9	9	31	26	93

Hver af kategorierne dækker i sagens natur over interessante variationer i eksempler og personlige erfaringer. Kategorierne “formel” og “generisk” (brug) kan være svære at adskille, men hvis der henvises til konkrete beviser eller begreber fra differentialregning og tilhørende matematisk stof, bruges kategorien “formel”, som fx i følgende besvarelser:

“Jeg bruger bevisførelse og brækker det ned i stykker så det giver mening i forhold til sekant/tangent-beviset.”

“Når jeg underviser i kædereglene, bruger jeg tricket at lave en substitution og så skrive $dy/dx = dy/du * du/dx$. Ellers kan jeg ikke komme på nogle konkrete eksempler.”

“Kontinuitet og differentiability af funktioner.”

“Konkret underviser jeg i partiel differentiering når jeg underviser i funktioner af to variable, hvilket jeg lærte på universitetet.”

“Jeg kan bruge mit generelle kendskab til (...) den generelle definition af differentiability (for afbildninger mellem normerede vektorrum) til at finde den bedste udledning af tangentplanets ligning. I virkeligheden ligner grafen jo tangentplanet pr. definition af hvad det vil sige at en funktion af to variable er differentiable i et punkt.”

Derimod klassificeres mere generelle henvisninger til matematisk metode, herunder bevisførelse, som “generiske”, fx:

“Det bruger jeg når jeg gennemgår beviser. Her kan jeg uddybe bevistechnikker og skabe overblik.”

“Bruger jeg som sådan ikke da det jeg underviser i, også var pensum dengang jeg selv gik i gymnasium. Jeg benytter derimod mit faglige overskud til at kunne drage paralleller og se begrænsninger. Samt i den enkelte klasse at kunne bruge flere forskellige bevisformer, altså benytte den mest hensigtsmæssige i den givne sammenhæng.”

I øvrigt er den store kategori “generisk” præget af mange forskellige, men ikke konkrete udtryk for at den videregående matematik faktisk betyder noget i undervisningen, fx:

“Det er ikke så meget den konkrete viden fra differentialregning jeg bruger i min undervisning, men det ligger som et fagligt fundament der giver mig mulighed for at fokusere på det didaktiske aspekt.”

“Jeg har mere baggrundsviden, flere anvendelseseksempler i baghånden, og jeg kender flere typer definitioner og ved mere om matematikkens opbygning som også formidles – i hvert fald på A-niveau.”

“Anvender det til at hæve niveauet og give udfordringer til de dygtige elever når de skal ud over pensum og udfordres. Anvendes også når elever stiller forskellige spørgsmål.”

Disse og andre udsagn ligner meget dem som blev fundet af Zazkis og Leikin (2010), selvom det generiske perspektiv – formentlig pga. spørgsmålets udformning – er langt mindre dominerende end i deres undersøgelse.

De to mindste kategorier, “eksempler” og “historie”, er også interessante, sidstnævnte af den grund at der i de faglige mindstekrav indgår (typisk et enkelt) kursus i matematikkens historie, hvilket langtfra altid er tilfældet i udlandet. Henvisningen til det historiske perspektiv er dog ikke altid så konkret:

“Historiske udvikling og oprindelsens historie.”

“Jeg anvender min viden om Newton og Leibniz til at tale om notation.”

“Jeg bruger den historiske matematik til at forklare hvordan differentialregning startede med infinitesimaler, hvordan man gik fra dette da man fandt at disse ikke passer ind i de reelle tal og man sideløbende bruger grænseværdier til at beskrive det samme. Dernæst indfører jeg de hyperreelle tal og viser sideløbende med grænseværdier hvordan beviserne og teorien kan fremkomme ved hjælp af grænseværdier og infinitesimaler. De fleste synes den infinitesimale tilgang er nemmere at forstå, da grænseværdier er en besværlig størrelse at arbejde med for gymnasieelever.”

Konkrete eksempler og anvendelser nævnes ligeledes af nogle som eksempler på brug:

“Jeg plejer at starte forløbet om differentialregning med en praktisk optimeringsopgave hvor eleverne skal prøve at optimere areal og omkreds af nogle geometriske figurer (selvfølgelig uden at nævne begrebet optimering). Øvelsen lærte jeg på didaktikkurset på mat.-studiet på KU.”

“Eksemplificeringer af hvordan vendetangenter kan benyttes til at bestemme ækvivalenspunkter under titrering.”

Endelig er der den ret store kategori af svar som udtrykker at respondenterne ikke kan besvare spørgsmålet; disse er ofte korte (fx “Pas”), men i nogle tilfælde mere uddybende:

“Det gør jeg ikke. Eksemplerne fra universitetet er så esoteriske og abstrakte at de ikke kan bruges på gymnasiet.”

“(…) Universitetsmatematikken bygger på en masse bevisførelse og udenadslæren iht. at kunne bevise sætninger, og meget lidt om at bruge matematikken på konkrete eksempler – hvilket man jo gør på gymnasialt niveau. Jeg gik fra mit matematikstudie og syntes at jeg havde lært nul som kunne anvendes konkret i gymnasiet. Hverken fagligt eller pædagogisk. Den matematik jeg underviser i, er hvad jeg selv kan huske fra gymnasietiden (...) og hvad jeg genopfrisker fra lærebøgerne – ikke fra universitetet.”

“(…) Det er ikke så meget et spørgsmål om lærerens tilegnede viden fra uni, men snarere om pædagogik.”

Det er naturligvis bekymrende at et stort mindretal af respondenterne direkte tager afstand fra brugbarheden af deres matematiske baggrund, eller i hvert fald synes at give Klein (2016, s. 1) ret i at en sådan brugbarhed ikke kommer af sig selv.

Respondenterne blev også stillet et opfølgende spørgsmål: “Forklar med et konkret eksempel i hvilke situationer (tavleundervisning, interaktion i klasseværelset, forberedelse til undervisning, feedback på elevers arbejde, besvarelse af elevers spørgsmål osv.) din viden bliver brugt.” Svarene på dette spørgsmål omfatter alle de nævnte eksempler på situationer, og hos et betydeligt mindretal (typisk for dem hvis svar er klassificeret som “ingen”) også en gentagelse af at sådanne situationer ikke forekommer eller erindres.

Brug af obligatoriske kurser fra KU

Det er også interessant at se på om respondenterne kan pege på konkrete kurser som de bruger i forbindelse med undervisningen i differentialregning. Det er i sagens natur svært at gøre for alle uddannelser. Vi valgte at præsentere de 34 respondenter som angav at have deres kandidatgrad fra Københavns Universitet, for 12 kurser som i de seneste mange år har indgået i hovedfag, sidefag eller begge (“gymnasiepakkerne”).

Deltagerne blev først bedt om at angive hvilke kurser de havde fulgt; 30 besvarede dette spørgsmål. Derefter fik de spørgsmålet: “Udvælg op til tre af de valgte kurser fra sidste spørgsmål som du mener bidrager til dit virke som gymnasielærer i matematik når du underviser i differentialregning i dag.” Der blev i dette spørgsmål sat i alt 75 krydser, svarende til at de 30 i gennemsnit pegede på 2,5 kurser. De kurser som mere end 5 respondenter pegede på, er: det indledende kursus matintro (14), analyse 0 (10), matematikkens historie (12) og grundkursus i de naturvidenskabelige fags didaktik (12).

Det er forventeligt at mange peger på matintro og analyse 0 som formaliserer og bygger direkte videre på gymnasiets differentialregning. Mere overraskende er det måske at matematikkens historie udpeges af lige så mange, når kun 9 fra den samlede respondentgruppe nævner historiske perspektiver som konkrete eksempler på brug (tabel 3). Vi noterer også at intet kursus udpeges af mere end halvdelen af dem der besvarer spørgsmålet.

Et sammenfattende svar

Efter på disse måder at have givet respondenterne mulighed for konkret at angive hvordan og i hvilke situationer de bruger deres universitetsmatematik når de underviser i differentialregning i gymnasiet, og (for KU-kandidaterne) at udpege særlig relevante obligatoriske kurser stillede vi et mere overordnet lukket spørgsmål: "I hvor høj grad mener du sammenfattende at du bruger den viden du har opnået på universitetet, når du underviser i differentialregning i gymnasiet?" – resultatet fremgår af tabel 4.

Tabel 4. Grad af brug af universitær viden til undervisning i differentialregning.

Ingen	Nogen	Høj	Meget høj	Ved ikke	I alt
16	58	12	13	4	103

Som det ofte er tilfældet, kan lukkede svar dække over mange nuancer. Vi lægger således mærke til at "ingen"-svar udgør en mindre andel her end den enslydende kategori i tabel 3. Det kan dog relativt let forklares med at man godt kan mene at udøve "nogen" brug af viden fra universitetet uden at kunne pege på et konkret eksempel, eller formulere brugen i generiske vendinger; desuden er formuleringen af de to spørgsmål forskellig ved brugen af de forskellige termer "viden" og "matematikviden", og det er muligt at nogle respondenter ikke anser viden fra de historiske, videnskabsteoretiske og didaktiske kurser som dækket af den sidste term (som tabel 3 afspejler). Det er også iøjnefaldende at kun 25 – svarende til ca. en fjerdedel af respondenterne – selv med denne bredere formulering finder at de i "høj" eller "meget høj" grad bruger viden fra universitetet, givet at den i princippet repræsenterer fem års studier, og at der peges på et af de mere avancerede emner i den gymnasiale matematik. Det dominerende svar – "nogen" – er selvfølgelig svært at fortolke. Det kan for en del respondenter have fungeret som en form for helgardering hvis præcise indhold vi dog kan få en del mere information om ved at nærstudere de svar som er opsummeret i tabel 3. "Nogen" inkluderer utvivlsomt både dele af generiske former for brug, de ofte ret uklare eksempler på mere konkret brug og (udtryk for) ingen brug.

Vi har også set på hvordan forskellige grupper af respondenter svarer på det nævnte lukkede spørgsmål. Opdeles respondenterne efter den institution de har læst ved, bliver tallene i de fem kategorier fra tabel 4 så små at man næppe kan slutte noget af forskellene. Mere tydelige er forskellene mellem kandidater med sidefag og hovedfag, særligt at ca. dobbelt så stor en andel af sidefagskandidaterne (nemlig ca. 20 %) svarer "ingen". Men også her er forskellene i absolutte antal respondenter så små at de højst befordrer en løs hypotese om at sidefaget i mindre grad opleves som brugbart.

Er der noget som burde være anderledes?

Det sidste spørgsmål på skemaet (bortset fra lejligheden til at melde sig til interview) var: "Er der noget ved uddannelsen som gymnasielærer i matematik du mener burde være anderledes?" I alt 81 besvarede spørgsmålet, og de kunne ret let kategoriseres idet svarene var ret eksplicite. Kategorierne er følgende:

1. *Tom*: Besvarer spørgsmålet ved at begrunde hvorfor der ikke svares (to af de tre i denne kategori henviser til at de har suppleret en ingeniøruddannelse, mens den sidste anfører at uddannelsen ligger for langt tilbage til at der kan svares)
2. *Nej*: typisk begrundet i tilfredshed med uddannelsen eller en konstatering af at uddannelsen også skal forberede til andre erhverv end lærergerningen
3. *Ja*: uden nærmere angivelse af hvordan
4. *Praktik*: ja, mulighed for at stifte direkte kendskab med gymnasieundervisning i universitetsuddannelsen
5. *Anv.*: ja, mere vægt på anvendelser af matematikken
6. *Did.*: ja, mere didaktik, ofte med fokus på praktiske dele som undervisningsplanlægning, stofdidaktik m.m.
7. *Andet*: ja (peger på andre ændringsforslag: To vil have generel pædagogik i uddannelsen, en enkelt vil have mere statistik, en enkelt mere videnskabsteori og historie, en enkelt mener sidefaget er forkert struktureret, og en enkelt mener uddannelsen kunne være kortere).

I tabel 5 gives en oversigt over hvordan de 81 svar fordeler sig. Der er to som mener at der skal være både praktikmuligheder og mere didaktik; disse er anbragt i praktik-kategorien. Ellers fordeler svarene sig klart på kategorierne.

Tabel 5. *Er der noget der burde være anderledes i universitetsuddannelsen?*

Tom	Nej	Ja	Praktik	Anv.	Did.	Andet	I alt
3	18	8	13	5	28	6	81

Svarene på dette spørgsmål har ikke tydelige sammenhænge med respondenternes baggrund, hverken med uddannelsesinstitution eller med hovedfag/sidefag.

Den største kategori er de 28 lærere der eksplicit peger på behov for mere fokus på didaktiske emner, inklusive stofdidaktik hvor man fordyber sig i den gymnasiale matematik med et undervisningsmæssigt sigte. Nogle typiske udsagn af denne type er:

"Jeg mener der bør være mere didaktisk fokus. Dvs. øvelse i at udforme konkret, varieret og sjov undervisning på gymnasiet. Måske med en mere induktiv tilgang. Eksempler på

tværfaglighed. Eksempler på hvordan matematikken konkret kan anvendes – det savner jeg i min hverdag.”

“Den skal være mere målrettet undervisning, med fokus på omarbejdning og formidling af egen viden fra universitetet. Mere fokus på didaktik og didaktiske udfordringer. Hvordan håndterer man de elever der enten har svært ved matematik, ikke kan lide det eller begge dele?”

“Langt mere relevant undervisning i forhold til emnerne i gymnasiet samt de problemstillinger og udfordringer man møder som gymnasielærer. Overførselsværdien fra universitetskurserne til undervisningsfaget i gymnasiet er næsten ingen.”

En anden stor gruppe (18) mener ikke der skal laves noget om. Typiske udsagn er her:

“Nej, det er jo ikke som sådan en uddannelse for gymnasielærere, men en generel kandidat man har fået, og det synes jeg er fint. Det er ikke uddannelsen der er vigtig når man underviser, men interesse for elevernes bedste.”

“Personligt elskede jeg at studere matematik og fandt fagene interessante. Jeg vil derfor nødig lave min uddannelse om ... Men jeg kan også se at der ikke er meget sammenhæng mellem alle fagene på kandidatuddannelsen og det jeg underviser i nu. Jeg tænker at nogle af bachelorprojektemnerne kunne være relevante SRP-opgaver (dog med mindre fagligt niveau). Desuden giver mine kandidatfag mig en forståelse for matematikken og dens uendelige vidensområde som stadig i dag udforskes. Jeg er tilbøjelig til at mene at dette retfærdiggør kandidatfagene (måske også fordi jeg kan lide dem:)”

“Nej, matematik på KU er en supergod uddannelse.”

Der er i og for sig helt naturligt at en del respondenter udtrykker tilfredshed med den uddannelse de selv har valgt og gennemført, og ikke mener den skal ændres. Det kan overraske at denne gruppe kun udgør ca. 1/4 af respondenterne, men samtidig er det at foreslå ændringer langt fra altid et udtryk for stor utilfredshed. De fleste af ændringsforslagene er relativt moderate ønsker, omend der også er en del som giver bastant udtryk for at den generiske matematik opleves som mindre relevant. Endelig er det klart at spørgsmålet kan opfattes sådan at ændringer er relevante, så der skal muligvis større beslutsomhed til for klart at svare nej til det.

Endelig peger 13 respondenter på et behov for at møde gymnasiets virkelighed undervejs i uddannelsen:

“Selve stoffet er langt fra det som man skal undervise i. Fx skulle jeg tage faget fourieranalyse som jeg ikke forventer at bruge i undervisningssammenhæng. En anden forbedring kunne være at indføre gymnasiepraktik for sidefag da der er helt særlige problemstillinger i undervisningen i matematik.”

“Ja, der er sgu meget. Man kunne jo starte med at tilføje noget didaktik og praktik på universitetet frem for at det blot er det ene teoretiske kursus efter det andet uden nogen som helst træning i de pædagogiske kompetencer som det kræver at være gymnasielærer. Der går nok tæt på 5 år før man er tilpas i jobbet, fordi man de første år løber forvirret rundt i klasseværelserne fordi man ikke har nogen pædagogiske værktøjer med fra sin universitetsuddannelse.”

“Praktikforløbet skal ligge tidligere så man kan nå at skifte retning hvis man finder ud af at det ikke var noget for en.”

De adspurgte lærere tilhører selvfølgelig alle den gruppe der indtil videre har fastholdt ønsket om at være gymnasielærere. Det kan tænkes at tilbud om praktik i uddannelsen kunne tiltrække nye – og frastøde andre – og under alle omstændigheder give et bedre grundlag for valg og fravalg af professionen. Allerede i dag er der i øvrigt ikke så få matematikstuderende som selv skaffer sig praksiserfaring som timelærere uden at det er integreret i studiet.

Diskussion og konklusion

Undersøgelsens udsagn og kvantitative resultater rummer mange interessante tendenser, også enkelte som er nye i forhold til eksisterende undersøgelser af hvordan relativt klassiske matematikuddannelser bruges i forbindelse med undervisning. Metodisk nyt er at der spørges til konkrete eksempler på brug i forbindelse med undervisningen i et bestemt emne (her differentialregning). Som tabel 3 viser, får vi så tre grupper: godt og vel 1/3 som giver sådanne eksempler, lidt under 1/3 der alligevel kun beskriver generisk brug, og stort set lige så mange som giver udtryk for at de ikke bruger deres universitetsmatematik i sammenhængen. Den anden gruppe svarer til tidligere undersøgelser hvor lærerne peger på overordnede udbytter af universitetsstudiet der er svære at konkretisere. I forhold til litteraturen er det mest interessant at “konkret brug” faktisk beskrives af det største mindretal. Dette tyder på at der er både forsknings- og udviklingspotentiale i at undersøge disse former for brug nærmere. Man kunne formode at hvis en sådan brug blev udbredt og befordret, ville effekten af uddannelsen også blive styrket.

At der er et udviklingspotentiale, synes at fremgå af tabel 4 og 5: De to grupper på

omkring 1/4 af respondenterne som angiver i “høj” eller “meget høj” grad at bruge viden fra universitetet i forbindelse med undervisning i differentialregning, og som ikke synes uddannelsen skal ændres, er stort set sammenfaldende, men de er altså et mindretal. At udbrede denne gruppes oplevelse af uddannelsens brugbarhed kunne tænkes at være muligt på flere måder, men for en stor del af de øvrige respondenter tyder svarene i (og bag) tabel 5 på at ændringer i selve uddannelsen er relevante. Disse lærere giver også konkrete forslag til og synspunkter om dette, fra moderate tilføjelser til total afstandtagen fra uddannelsens generiske matematikindhold. Da man i sagens natur har haft tilsvarende diskussioner i andre lande, og er nået frem til forskellige modeller, er erfaringer med forandringer dér bestemt relevante at se på. I nogle lande – fx Sverige, Norge og Tyskland – har man således udviklet en større variation af uddannelsesmuligheder for dem der vil undervise i gymnasial matematik. Det er ikke kun interessant at man hermed har mulighed for at undersøge varianternes effektivitet i forhold til undervisningen (se fx Buchbinder, 2017), men også at de i et vist omfang er opstået som forsøg på at afhjælpe problemerne med at rekruttere og fastholde uddannede lærere – et problem som også har været aktuelt i Danmark gennem adskillige årtier, og fortsat er det.

Den internationale undersøgelse TEDS-M (Tatto et al., 2018; Schmidt et al., 2013) har set nærmere på hvordan læreruddannelser (også til gymnasialt niveau) er indrettet, og i hvilket omfang de udvikler de former for matematiklærerviden som vides at korrelere med gode resultater hos lærerens elever. Når man ser på de højtpræsterende læreruddannelser, er der faktisk betydelige sammenfald i kerneindhold. Nogle af disse elementer genfindes i de aktuelle danske uddannelsers kernestof, mens andre typisk savnes og foreslås af mange respondenter i denne undersøgelse.

Sammenfattende håber vi at nærværende artikels resultater – trods alle de forbehold som er taget undervejs – kan fremme det synspunkt at både international forskning og danske læreres erfaringer bør inddrages systematisk i overvejelser af hvordan universitetsuddannelsen kan bidrage til at styrke matematikundervisningen i gymnasiet.

Referencer

- Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Buchbinder, N. (2017). The Acquisition of Mathematics Pedagogical Content Knowledge in University Mathematics Education Courses: Results of a Mixed Methods Study on the Effectiveness of Teacher Education in Germany. *ZDM – Mathematics Education*, 49(2), 249-264. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0849-5>

- Eisenberg, T. (1977). Begle Revisited: Teacher Knowledge and Student Achievement in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 216-222. <https://doi.org/10.2307/748523>
- Even, R. (2011). The Relevance of Advanced Mathematics Studies to Expertise in Secondary School Mathematics Teaching: Practitioners' Views. *ZDM – Mathematics Education*, 43(6), 941-950. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0346-1>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing Company.
- Jessen, B., Holm, C. & Winsløw, C. (2015). *Matematikudredningen*. Undervisningsministeriet. <https://www.ind.ku.dk/projekter/matematikudredning/Matematikudredningen2015endelig.pdf>
- Klein, F. (2016). *Elementary Mathematics From a Higher Standpoint*. Oversat af G. Schubring (første udgave, på tysk: 1908). Springer.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum.
- Madsen, T.G. (2008). Matematikundervisningen ved universiteter og højere læreanstalter. I H.C. Hansen (red.), *Matematikundervisningen i Danmark i 1900-tallet* (s. 755-920). Syddansk Universitetsforlag.
- Monk, D.A. (1994). Subject Area Preparation of Secondary Mathematics and Science Teachers and Student Achievement. *Economics of Education Review*, 13(2), 125-145. [https://doi.org/10.1016/0272-7757\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0272-7757(94)90003-5)
- Rowe, D.E. (1985). Felix Klein's "Erlanger Antrittsrede": A Transcription With English Translation and Commentary. *Historia Mathematica*, 12(2), 123-141. [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(85\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0315-0860(85)90003-5)
- Schmidt, W., Burroughs, N. & Cogan, L. (2013). *World Class Standards for Preparing Teachers of Mathematics*. Michigan State University. <https://www.education.msu.edu/csc/pdf/World-Class-Standards-for-Preparing-Teachers-of-Mathematics.pdf>
- Schmidt, W., Houang, R. & Cogan, L. (2011). Preparing Future Math Teachers. *Science*, 332(6035), 1266-1267. <https://doi.org/10.1126/science.1193855>
- Tatto, M.T. (2021). Professionalism in Teaching and the Role of Teacher Education. *European Journal of Teacher Education*, 44(1), 20-44. <https://doi.org/10.1080/02619768.2020.1849130>
- Tatto, M.T., Rodriguez, M.C., Smith, W.M., Reckase, M.D. & Bankov, K. (2018). *Exploring the Mathematical Education of Teachers Using TEDS-M Data*. Springer.
- Uddannelses- og Forskningsministeriet. (2018). *Retningslinjer for universitetsuddannelser rettet mod undervisning i de gymnasiale uddannelser samt undervisning i gymnasiale fag i euforløb*. VEJ nr. 9698 af 28/08/2018. <https://www.retsinformation.dk/eli/retsinfo/2018/9698>
- Wasserman, N., Buchbinder, O. & Buchholtz, N. (2023). Making University Mathematics Matter for Secondary Teacher Preparation. *ZDM – Mathematics Education*, 55, 719-736. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5>
- Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M. & Schubring, G. (red.) (2019). *The Legacy of Felix Klein*. Springer.

- Winsløw, C. & Grønbaek, N. (2014). Klein's Double Discontinuity Revisited: Contemporary Challenges for Universities Preparing Teachers to Teach Calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 59-86. <https://static-curis.ku.dk/portal/files/132049740/rdm14ngcw.pdf>
- Zazkis, R. & Leikin R. (2010). Advanced Mathematical Knowledge in Teaching Practice: Perceptions of Secondary Mathematics Teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 263-281. <https://doi.org/10.1080/10986061003786349>

English abstract

In this paper, we study how Danish high school teachers of mathematics perceive their university education, especially the usefulness of its mathematical contents in the context of teaching a concrete subject, namely differential calculus. The study is based on a survey on this topic among teachers, who completed the induction program Pædagogikum during the period 2018-2022. The general result is, that 1/4 of the teachers consider that they use knowledge from university to a high or very high degree, while about half of them say they do so to some degree. Asked for concrete examples of how they use their mathematical knowledge from university when teaching differential calculus, about 1/3 provide generic answers, while well over 1/3 provide concrete examples; about 1/4 answer more or less directly that they cannot provide such examples.