

# Udvikling af matematisk ræsonnementskompetence gennem brætspillet Othello



Emilie Madeline Hersaa  
Nehammer, Virum Skole



Anna Louise Eriksen,  
Lindevangskolen



Erik Ottar Jensen,  
Aalborg Universitet

**Abstract:** Denne artikel undersøger integrationen af strategiske og kombinatoriske brætspil, såsom Othello, i matematikundervisningen ved anvendelse af fire designprincipper som sigter mod at styrke mellemtrinselevs matematiske ræsonnementskompetence. Artiklen fokuserer på en intervention i en 5. klasse. Det beskrives hvordan elevernes engagement i "undersøgende dialog" under Othello-relaterede aktiviteter kan skabe en platform der giver dem mulighed for at øve sig i at fremsætte matematiske ræsonnementer af både processuel og strukturel karakter. Artiklen konkluderer at sådanne aktiviteter kan bidrage positivt til udviklingen af elevers ræsonnementskompetence.

## Indledning

Matematiklærere i grundskolen finder det både udfordrende og tidskrævende at tilrettelægge matematikundervisning som er kompetenceorienteret (Højgaard & Arnt, 2021). I forlængelse heraf peger forskningsresultater på at arbejdet med matematisk ræsonnementskompetence kan være vanskeligt for både lærere og elever (Stylianides & Stylianides, 2008; Hansen et al., 2020). Larsen (2019) forklarer at vanskelighederne med at udvikle ræsonnementskompetence i skolen hovedsageligt skyldes en for sen introduktion til ræsonnementsfremmende undervisning for eleverne. Dette problem forstærkes af lærernes begrænsede viden om matematisk ræsonnering, hvilket resulterer i at elevernes ræsonnementsfærdigheder ofte reduceres til udenadslære.

Gennem et designeksperiment med brætspillet Othello præsenterer artiklen et praksisorienteret perspektiv på hvordan lærere i grundskolen kan tilrettelægge kompetencemålstyret matematikundervisning der har til hensigt at udvikle mellemtrinselevs matematiske ræsonnementskompetence. Artiklen har således til hensigt at give et bud på hvordan elever i folkeskolen kan arbejde med ræsonnementskompetence i matematikundervisningen.

Fælles Mål for matematik (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019) placerer ræsonnementskompetencen og de resterende syv matematiske kompetencer centralt i nutidens matematikundervisning. Efter 6. klasse skal eleverne “[...] kunne anvende ræsonnementer i undersøgende arbejde”, og de skal “[...] kunne anvende ræsonnementer til at udvikle og efterprøve hypoteser” (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019, s. 7). Både Mosimege (1998), McFeetors & Palfy (2018) og Jensen & Skott (2022) beskriver hvordan spil ofte forbindes med forskellige former for matematiske og logiske tankeprocesser samt ræsonnementer. I overensstemmelse hermed fremhæver Berkman (2004), Schoenfeld (2016), Mechner (2010), Day (2014) og Houssart & Sams (2008) at særligt kombinatoriske strategispil har potentiale til at styrke matematisk ræsonnementskompetence hos elever på mellemtrinnet. Det skyldes at disse spil motiverer eleverne til at reflektere på en måde der gør dem i stand til at forudse kommende træk og spilsituationer. I undersøgende arbejde med ræsonnementer beskriver Berthold et al. (2020) hvordan strategiske brætspil som fx Othello er et fordelagtigt redskab til netop dette, da eleverne her har mulighed for at udvikle, undersøge og afprøve strategier for at vinde.

Der er dermed indikationer på at anvendelse af strategiske brætspil kan bidrage til at eleverne både arbejder med ræsonnementskompetencen i undersøgende arbejde og anvender ræsonnementer i udvikling og efterprøvning af hypoteser som Fælles Mål beskriver (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019). Dog erkender vi at matematisk ræsonnering ikke kan simplificeres til en generel øvelse der er uafhængig af det konkrete matematiske indhold (Dawkins & Karunakaran, 2016). Elevers måde at ræsonnere på påvirkes i høj grad af det matematiske indhold der er genstand for ræsonnementet.

Gennem ovenstående positive resultater præsenterer denne artikel et konkret bud på hvordan grundskolelæreres udfordringer med organisering og implementering af kompetencebaseret undervisning kan adresseres. Artiklen introducerer et undervisningsforløb designet til at fremme mellemtrinselevs matematiske ræsonnementskompetence ved brug af det strategiske brætspil Othello.

## Matematiske ræsonnementer og ræsonnementskompetence hos elever på mellemtrinnet

Ifølge Jeannotte & Kieran (2017) betoner forskellige typer af definitioner af et matematisk ræsonnement hhv. det strukturelle og det processuelle aspekt af et ræsonnement. Definitioner der vægter strukturelle aspekter, indbefatter beskrivelser som fx “et godt argument” eller “et logisk gyldigt argument” (Lindhart et al., 2010), “en kæde af både formelle og informelle argumenter” (Niss & Jensen, 2002) samt “et ræsonnement der involverer mønstre” (delMas, 2004). Definitioner der vægter den processuelle struktur, inkluderer beskrivelser som fx “at forklare”, “at begrunde”, “at modificere” og “at vurdere” (Whitenack & Yackel, 2002; McFeetors & Palfy, 2018; Lindhart et al., 2010). Selvom forskellige typer af definitioner lægger vægt på de to aspekter, bør de ikke opfattes som værende uafhængige af hinanden. Tværtimod er de i nogen grad afhængige af hinanden idet det strukturelle aspekt af matematisk ræsonnement kan betragtes som resultatet af den proces der beskrives af det processuelle aspekt.

Et konsekvent karaktertræk ved de definitioner af et matematisk ræsonnement der vægter de processuelle aspekter, er et udpræget fokus på kommunikation. Desuden involverer matematisk ræsonnering kommunikation med sig selv eller med andre. Fx beskriver Whitenack & Yackel (2002) at matematisk ræsonnering særligt handler om at argumentere for en påstand ved at forklare og begrunde sine idéer og derved at tydeliggøre dem over for andre. I tråd hermed udtrykker McFeetors & Palfy (2018) hvordan et matematisk ræsonnement refererer til et systematisk og logisk adfærdsmønster som er karakteriseret ved såkaldte “verber for matematisk ræsonnering” (McFeetors & Palfy, 2018, s. 106). Disse verber udgør bl.a. generalisere, undersøge, forklare, begrunde, modificere og overbevise. KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002) har ligeledes fokus på kommunikation. Her defineres et matematisk ræsonnement som værende “en kæde af argumenter fremsat på skrift eller i tale til støtte for en påstand” (Niss & Jensen, 2002, s. 209). I overensstemmelse med disse beskrivelser omtaler Mercer & Wegerif (1999) og Houssart & Sams (2008) denne type kommunikation som “exploratory talk”, hvilket vi fremadrettet i denne artikel betegner “undersøgende dialog”. Denne kommunikationsform er kendetegnet ved at eleverne i en fælles diskussion forklarer og begrunder deres ræsonnementer, lytter til hinanden samt positivt imødekommer udfordringer fra både lærere og elever (Mercer & Wegerif, 1999; Houssart & Sams, 2008). “Undersøgende dialog” i klasseværelset kan have til formål at skabe en platform hvor eleverne kan øve sig i at fremsætte matematiske ræsonnementer.

### *Matematisk ræsonnementskompetence*

Ligesom “undersøgende dialog” beskrives matematisk ræsonnementskompetence som at kunne følge og bedømme holdbarheden af et matematisk ræsonnement samt at

kunne stille opklarende spørgsmål der eventuelt forbedrer det fremsatte ræsonnement (Niss & Jensen, 2002; NGA Center & CCSSO, 2010). Derudover handler kompetencen om at kunne fremsætte informelle ræsonnementer der, på trods af deres karakter, er meningsfulde og korrekte, samt at kunne formulere formelle ræsonnementer på basis af intuition. Lindhart et al. (2010) understreger at når mellemtrinselever arbejder på at udvikle deres ræsonnementskompetencer, bør matematiske ræsonnementer ses i relation til den enkelte elevs matematiske formåen, hvilket vil sige at et ræsonnements validitet og kompleksitet skal vurderes i forhold til elevens udviklingsmæssige kontekst. I samme spor bruger Stylianides (2007) begrebet "intellectual-honesty principle" til at argumentere for at elevens ræsonnementer ikke bør sammenlignes med ræsonnementer der er udført af personer med et højere matematisk niveau.

For mellemtrinselever kan ræsonnementskompetence komme til udtryk ved at eleverne kan fremsætte påstande om matematiske sammenhænge i relation til det faglige indhold som de beskæftiger sig med. Desuden kan de undersøge påstande og præsentere modeksempler (Ferrini-Mundy, 2000). I en undervisningssituation der fx fokuserer på multiplikationsstrategier og talforståelse, vil en elev på mellemtrinnet forventeligt kunne ræsonnere sig frem til at ved at udelade et-tabellen vil resultatet i tabellerne for de lige tal altid være lige, idet et lige tal ganget med et andet lige tal giver et lige resultat, og et lige tal ganget med et ulige tal ligeledes giver et lige tal.

## Udvikling af matematisk ræsonnementskompetence gennem Othello

Othello er et topersoners kombinatorisk strategispil (Fraenkel, 2012) der spilles på et bræt med  $8 \times 8$  felter. Spillebrikkerne er identiske og kan vendes så en hvid eller en sort side vender opad. På skift placerer spillerne en brik på brættet og vender de af modstanderens brikker der placerer sig mellem denne og andre af denne spillers brikker. Spillet vindes ved at have flest brikker af sin egen farve til slut (Berthold et al., 2020; Bjarning et al., 2020). Reglerne i Othello er lige så enkle som i dam, mens strategierne er lige så komplekse som i skak (Dansk Othello Forbund, 2018). Der er ingen tilfældigheder, som fx med terninger eller spillekort, ligesom der ingen skjulte informationer er undervejs. Begge spillere har derfor viden om alle forudgående træk. Det betyder at der er mulighed for at spillerne vil få erfaringer med og kunne genkende geometriske mønstre i spillets gang i form af en forståelse for sammenhængen mellem de to variable sort og hvid. Othello fordrer, ligesom det er tilfældet for fx skak, at spillerne tænker strategisk og ræsonnerer med udgangspunkt i de geometriske mønstre som spillerne bliver bekendte med efterhånden som de gør sig erfaringer med spillet (Mechner, 2010; Schoenfeld, 2016). På den måde kan Othello, ligesom skak, forstås gennem forskellige matematiske emner fra grundskolen, herunder numeriske

og rumlige sammenhænge, samt strategier til problemløsning som fx fokusering og fortolkning af spil-/problemsituationer og udvælgelse af relevant information (Sala & Gobet, 2015).

### *Othellos potentiale til at udvikle mellemtrinselevs ræsonnementskompetence*

Da Othello er et kombinatorisk strategispil, kan det potentielt bidrage til at styrke både de strukturelle og de processuelle aspekter af et matematisk ræsonnement. Mere nøjagtigt får mellemtrinselever ved at spille brætspillet mulighed for at øve sig i at fremsætte matematiske ræsonnementer i form af “et godt argument”, “et logisk gyldigt argument” eller “en kæde af informelle argumenter” for en påstand ved at “forklare” og “begrunde” deres idéer. Desuden kan Othello lægge op til at eleverne følger og bedømmer hinandens ræsonnementer, ligesom ræsonnementerne kan forventes at opnå en vis grad af progression efterhånden som eleverne får flere erfaringer med spillet. At Othello i en undervisningssituation har potentiale til at motivere eleverne til at udtænke, fremsætte, forklare, begrunde og bedømme deres ræsonnementer, betyder samtidig at en undervisning der har Othello som omdrejningspunkt, kan opmuntre eleverne til at kommunikere med “undersøgende dialog”. (Mercer & Wegerif, 1999). Dette betyder endvidere at eleverne potentielt kan udvikle matematisk ræsonnementskompetence ved at spille brætspillet.

## Studiets kontekst

Studiet præsenteret i artiklen her er udarbejdet i forbindelse med et kandidatspeciale på DPU der i samarbejde med Greve Othello Forening undersøger analoge spil i matematikundervisningen. Som led i en større kommunal satsning på ungdomsområdet har foreningen skabt et tilbud hvor den besøger skoleklasser og gennemfører et matematikundervisningsforløb med udgangspunkt i brætspillet Othello. Forløbet har til hensigt at udvikle elevernes matematiske og logiske tænkning gennem anvendelse af Othellos strategiske muligheder. Efter aftale med Jens Aagaard-Hansen (formand for Greve Othello Forening), der tilrettelægger undervisningen, fik vi mulighed for at modificere forløbet så det fik et eksplicit fokus på udvikling af mellemtrinselevs matematiske ræsonnementskompetence.

I et hermeneutisk litteraturstudie (Boell & Cecez-Kecmanovic, 2014) undersøgte vi: 1) hvordan et matematisk ræsonnement defineres i litteraturen; 2) hvilke typer af ræsonnementer det kan forventes at mellemtrinselever kan formulere; 3) hvordan matematisk ræsonnementskompetence kan komme til udtryk i en undervisningssituation; 4) hvordan ræsonnementsfremmende undervisning med fordel kan tilrettelægges. Med udgangspunkt i litteraturstudiets indledende resultater undersøgte vi

hvilke potentialer Othello har i forhold til udvikling af matematisk ræsonnementskompetence. Disse potentialer omformede vi til fire “designprincipper” (Hanghøj et al., 2022) som lå til grund for det modificerede Othello-forløb. Forløbet blev afprøvet i en intervention hvor vi i et minietnografisk casestudie kunne analysere de fire designprincipper.

### *Interventionen*

Interventionen blev indledt med at eleverne i en 5. klasse spillede Othello på traditionel vis således at vi havde et sammenligningsgrundlag. Mere præcist spillede de her én mod én og med udgangspunkt i spillets traditionelle opstilling. Herefter gennemførte to af forfatterne det modificerede Othello-forløb over tre dobbeltlektioner. En af forfatterne underviser i matematik på mellemtrinnet og stod derfor for at gennemføre undervisningen. En anden forfatter udførte deltagende observationer og nedskrev iagttagelser i form af en detaljeret logbog. Herudover blev al undervisning i plenum og to af gruppernes samtaler under spillerunderne optaget. Der blev desuden foretaget to semistrukturerede interviews med to udvalgte grupper samt indhentet elevproduceret skriftligt materiale i form af udfyldte arbejdsark. Interventionen resulterede i at vi kunne analysere hvordan vores designprincipper fungerede i praksis, og efterfølgende anlægge et kritisk perspektiv på selvsamme.

Vi er opmærksomme på at undervisningen kunne være forløbet anderledes hvis den var udført af klassens sædvanlige matematiklærer. Alligevel bidrager casestudiet til at vi opnår forståelse for elevernes ageren og oplevelse af en indsats der foregik i deres egen praksis.

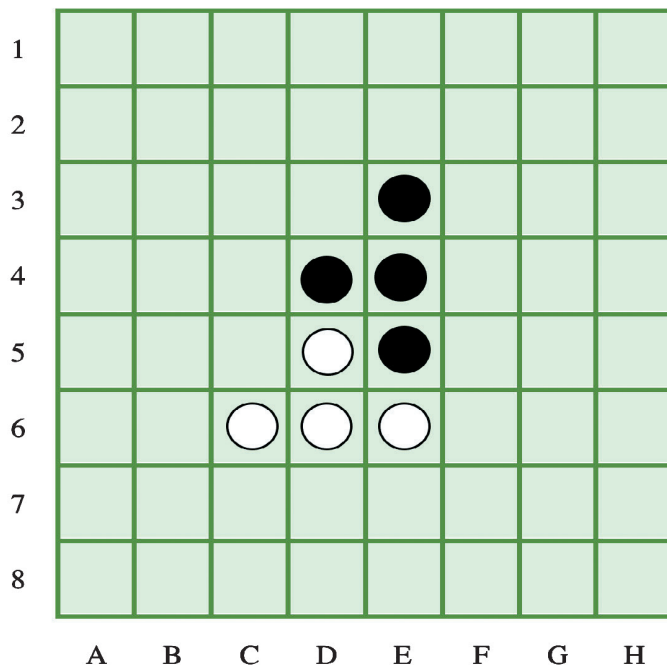
### *Udvikling af en taksonomi for at kategorisere og forstå progression i ræsonnementer*

For at vurdere om eleverne kunne fremsætte, følge og bedømme ræsonnementer af strukturel og processuel karakter, samt for at kunne kategorisere progressionen i de forskellige interaktionstyper udarbejdede vi en taksonomi (tabel 1). Taksonomien er inspireret af Díez-Palomar & Olivés (2015) interaktionsteori og illustrerer progressionen i forskellige typer af ræsonnementer som vi forventede at eleverne ville kunne fremsætte under spilprocessen. Til taksonomien har vi tilføjet “hverdags-argumenter” som en underkategori til “interaktionstype 2: ikke-dialogisk interaktion”. Valget af Díez-Palomar & Olivés (2015) teori skyldes at vi mener at “undersøgende dialog” falder under kategorien “interaktionstype 3: dialogisk interaktion” der er kendetegnet ved at elever udveksler og verificerer argumenter baseret på gyldighedskrav.

**Tabel 1.** Tabellen illustrerer progression i de typer af matematiske ræsonnementer eller mangel på samme som vi forventer at eleverne vil kunne fremsætte i en spilsituation.

| Interaktionstype   | Kendetegn  | Ræsonnement                         | Eksempel   |
|--|--|-------------------------------------|--|
| <b>Interaktionstype 1:</b><br>udveksling af information  | Eleverne fremsætter påstande uden at argumentere ved at forklare og begrunde.                                | Intet ræsonnement                   | “Det er en ulempe at være den der starter”<br>“Det er en fordel at placere en brik i et hjørnefelt”  |
| <b>Interaktionstype 2:</b><br>ikke-dialogisk interaktion | Eleverne anvender ugyldige argumenter baseret på hverdagserfaringer til at forklare og begrunde en påstand.  | Hverdagsræsonnement                 | “Jeg vinder Othello fordi jeg ofte spiller brætspil”<br>“Hvis jeg starter, så vinder jeg”  |
|  | Eleverne anvender ugyldige argumenter for en påstand baseret på magt til at forklare og begrunde en påstand. | Magtræsonnement                     | “Jeg vinder fordi jeg er klogere end dig”<br>“Hvis jeg placerer min farve i hjørnerne af spillebrættet, så vinder jeg, fordi min lærer siger det”  |
| <b>Interaktionstype 3:</b><br>dialogisk interaktion      | Eleverne fremsætter korrekte og meningsfulde argumenter for en påstand ved at forklare og begrunde.          | Korrekt og meningsfuldt ræsonnement | Et godt eller logisk gyldigt argument<br>“Hvis jeg placerer min brik i dette felt, så kan jeg, som følge af spillets regler, vende fem brikker”<br>“Hvis jeg placerer min brik i dette felt, så kan jeg vende tre brikker fordi jeg lukker modstanderens brikker inde horisontalt”<br><br>En kæde af informelle argumenter<br>“Hvis jeg placerer brikker i hjørnet, kan min modstander ikke vende dem, og så får jeg mulighed for at vende modstanderens brikker både diagonalt og langs kanterne” |

Tabel 1 illustrerer vores forventning om at en mellemtrinselev som endnu ikke har opnået tilstrækkelig erfaring med Othello, i en spilsituation vil kunne fremsætte en simpel påstand. Denne påstand vil handle om elevens kommende træk og vil derfor være et udtryk for en kortsigtet strategi. Eleven kan fx hævde at hun kan vende flest af modspillerens brikker hvis hun placerer sin brik i et givent felt. Et eksempel på denne spilsituation fremgår af figur 2.

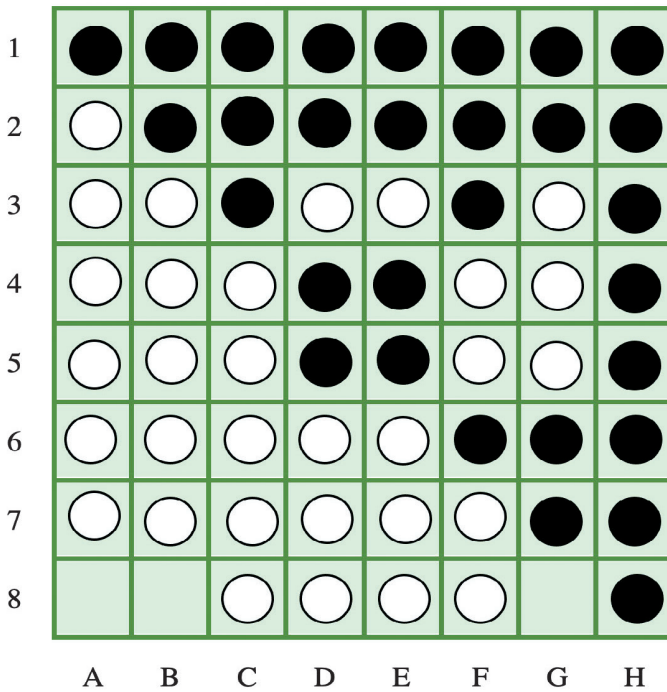


**Figur 2.** Et eksempel på en spilsituation hvor hvid har mulighed for at vende tre sorte brikker ved næste træk.

En forklaring på en sådan påstand kunne være at eleven har talt antallet af brikker som trækket giver mulighed for at vende. Selvom denne forklaring kun involverer overvejelser angående ét træk, vil det være meningsfuldt og korrekt i den pågældende situation, så længe ræsonnementet tager afsæt i Othellos regelsæt.

I litteraturen finder vi at et matematisk ræsonnement kan komme til udtryk når eleven anvender formuleringen “hvis ... så”, og at denne formulering kan være en hjælp for eleven når hun skal fremsætte et ræsonnement (Mason, 2002). Herudover kan formuleringen være et udtryk for at eleven er på vej til at udvikle en strategi der giver hende fordele i spillet (Houssart & Sams, 2008). Efterhånden som eleven gør sig flere erfaringer med spillet, vil progressionen i de fremsatte ræsonnementer blive tydelig idet hun vil kunne fremsætte et ræsonnement der indeholder “hvis ... så”-formuleringen, og som består af “en kæde af informelle argumenter” i form af en langsigtet strategi. Ræsonnementet kan lyde noget i retningen af: “Hvis jeg placerer min farve i alle fire hjørner af spillebrættet, så kan min modspiller ikke vende disse hjørnebrikker, og så vil jeg kunne vende min modstanders brikker langs kanten og diagonalt.” Figur 3 viser en spilsituation hvor sort har placeret tre af sine brikker i et hjørne.





**Figur 3.** Et eksempel på en spilsituation hvor sort har sat sin farve i tre af spillebrættets hjørner.

## De fire designprincipper anvendt i en tredelt struktur

For at motivere eleverne til at ræsonnere gennem “undersøgende dialog” havde vi i interventionen struktureret undervisningen i en tredelt struktur som med fordel kan anvendes i en undersøgende matematikundervisning. Denne tredelte struktur udgør hhv. en iscenesættelse, en aktivitet og en fællesgørelse (Blomhøj, 2017). I et Othello- og ræsonnementsperspektiv kan strukturen indledes med en didaktisk del i form af et forberedende oplæg. Her sætter læreren rammerne og klæder eleverne på til den efterfølgende adidaktiske del (Brousseau, 1997), Othello-aktiviteten, hvor eleverne skal spille og øve sig i at ræsonnere på egen hånd, og hvor de har frihedsgrader til at handle undersøgende (Blomhøj, 2017). Den sidste del er en fælles opsamling hvor læreren gennem opklarende spørgsmål forsøger at forfine samt styrke forståelsen af de matematiske ræsonnementer som er kommet til udtryk i Othello-aktiviteten.

Nedenfor fremgår de fire designprincipper som vi anvendte i interventionen, og som tilbyder eleverne en arena hvor de kan øve sig i at fremsætte matematiske ræsonnementer ved at motivere til “undersøgende dialog” (Mercer & Wegerif, 1999). Designprincipperne blev udviklet på baggrund af resultaterne fra litteraturstudiet, der beskriver hvordan ræsonnementsfremmende undervisning med fordel kan tilret-

telægges. Derudover integrerede vi viden fra litteraturstudiet om tilrettelæggelse af undervisning der fokuserer på strategispil som Othello, med det formål at fremme ræsonnementer.

### **Designprincipper til anvendelse af Othello i matematikundervisningen**

*Præsenter og repetér løbende "hvis ... så"-formuleringen.*

*Lad ét par spille mod et andet par.*

*Lad eleverne spille ud fra bestemte variationer af spillet.*

*Stil løbende opfølgende spørgsmål til elevernes begyndende ræsonnementer.*

#### *Præsenter og repetér løbende "hvis ... så"-formuleringen*

En konkret måde hvorpå læreren kan lægge eksplicit op til at eleverne anvender "undersøgende dialog" i Othello-aktiviteten, er at præsentere "hvis ... så"-formuleringen (Mason, 2002; Larsen & Lindhardt, 2019) under iscenesættelsen og herefter løbende huske eleverne på at anvende denne formulering. Formuleringen skaber i sin natur gunstige forudsætninger for at ræsonnementer af forskellige grader kan komme til udtryk når eleverne er i dialog med hinanden. Mere præcist kan et matematisk ræsonnement komme til udtryk når en elev anvender formuleringen "hvis ... så". Denne formulering kan tilmed være en hjælp for eleven når hun skal fremsætte "et godt argument" eller "et logisk gyldigt argument" eller "en kæde af informelle argumenter" for en påstand ved at "forklare" og "begrunde" sine idéer (Mason, 2002).

#### *Lad ét par spille mod et andet par*

Ligesom med en række andre abstrakte brætspil spilles Othello i en én mod én-konstellation. Denne opstilling opfordrer ikke direkte til at spillerne kommunikerer om de træk de gør under spillet. Med henblik på at fremme "undersøgende dialog" kan læreren organisere eleverne i par så de spiller Othello ét par mod et andet. Årsagen er at eleverne naturligt vil diskutere de træk de ønsker at udføre. Mere præcist får eleverne bedre mulighed for at ræsonnere når de har både med- og modspillere, frem for når de spiller alene og mod en enkelt person (McFeetors & Palfy, 2018).

#### *Lad eleverne spille ud fra bestemte variationer af spillet*

Spil har større potentiale for at udvikle elevernes matematiske ræsonnementskompetence når spillereglerne er automatiserede (Bright et al., 1983; McFeetors & Palfy, 2018; Bjarning et al., 2020). I et spil som Othello, hvor reglerne er enkle, vil automatiseringen ske forholdsvis hurtigt, hvilket åbner op for at eleverne begynder at ræsonnere over

strategier der giver dem fordele i spillet (Berthold et al., 2020). Som en integreret del af Othello-aktiviteten kan læreren, og derefter eleverne, løbende ændre spillets præmisser. Dette kan fx gøres ved at ændre på det strategiske udgangspunkt. I Othello kan læreren fx opstille specifikke spilsituationer som eleverne skal starte deres spil ud fra. Ved at introducere forskellige spilsituationer motiveres eleverne til at undersøge og ræsonnere på nye måder. Dette kan bidrage til at de ikke kun er i stand til at anvende specifikke strategier i bestemte situationer, men at de også opnår forståelse for hvorfor strategierne virker (Houssart & Sams, 2008). På denne måde undgår man det imiterende aspekt hvor eleverne blot gentager og efterligner allerede fremsatte ræsonnementer (Lithner, 2008). Når Othellos præmisser ændres, kræver det samtidig at eleverne anvender "hvis ... så"-formuleringen (Mason, 2002; Larsen & Lindhardt, 2019) i nye kontekster, hvilket yderligere fremmer deres "undersøgende dialog", forudsat at udfordringerne modtages positivt (Mercer & Wegerif, 1999).

### *Stil løbende opfølgende spørgsmål til elevernes begyndende ræsonnementer*

I den sidste del af den tredelte struktur bør læreren igangsætte en fælles opsamling og diskussion som fokuserer på elevernes begyndende matematiske ræsonnementer (Blomhøj, 2017). Her kan læreren undersøge hvordan elevernes strategier ligner hinanden, og hvordan de adskiller sig. Under denne diskussion er det vigtigt at læreren hjælper eleverne med at forstå deres ansvar for at bidrage til et klassemiljø der fremmer ræsonnement og læring. For at opmuntre til et sådant klassemiljø kan læreren ifølge Whitenack & Yackel (2002) motivere eleverne til at dele deres strategier ved at spørge ind til deres tankeprocesser. Derefter kan læreren inddrage andre elever i diskussionen ved at spørge om de præsenterede forklaringer og begrundelser giver mening for dem.

Som vi har beskrevet, kan læreren tage udgangspunkt i de fire designprincipper når hun skal tilrettelægge en Othello-baseret matematikundervisning som har til formål at fremme ræsonnementskompetence ved at motivere eleverne til at indgå i "undersøgende dialog". Samtidig kan hun organisere undervisningen efter den tredelte struktur med henblik på at sætte en ramme for hvordan de fire designprincipper kan integreres i undervisningen.

## Resultaterne fra analysen af interventionen

### *Elevernes overvejelser vedrørende et enkelt træk i form af "et logisk gyldigt argument"*

Under interventionen fandt vi at eleverne var i stand til at fremsætte et korrekt og meningsfuldt matematisk ræsonnement bestående af "et logisk gyldigt argument" for en påstand, hvilket er karakteristisk for interaktionstype 3 (Díez-Palomar & Olivé,

2015). Vi observerede at de fremsatte påstande blev forklaret og begrundet med et simpelt, men logisk gyldigt argument der tog højde for de præmisser der udgøres af Othellos simple regelsæt, og som indeholdt den førnævnte "hvis ... så"-formulering. Særligt i begyndelsen af interventionen fremsatte eleverne påstande som gik på at placeringen af en brik ville resultere i muligheden for at vende et vist antal af modspillernes brikker. Som oftest maksimalt tre brikker. De simple argumenter for denne påstand gik ofte på at eleverne kunne tælle de brikker som de efter spillets regler havde mulighed for at vende, ved at pege med fingeren på brættet i én eller flere retninger. Denne gestikulation foregik samtidig med at eleverne fremsatte ræsonnementer der var enslydende med følgende påstand:

"Hvis vi lægger en brik dér, så kan vi vende de her tre."

Ligeledes fremgik det af elevernes besvarelser af arbejdsarkene at de kunne fremsætte ræsonnementer i form af "et logisk gyldigt argument". Fx svarede et spillepar følgende på spørgsmålet "Hvilken farve mener I står bedst placeret fra spillets start? Hvorfor?":

"Hvid står bedst fordi de kan få et hjørne."

Langt de fleste fremsatte ræsonnementer handlede om kommende træk, og de var derfor et udtryk for en kortsigtet strategi. At en stor del af eleverne kun var i stand til at tænke ét træk frem, kan skyldes at de grundet den relativt korte spilleperiode ikke havde nok erfaringer med spillet til selv at ræsonnere sig frem til en langsigtet og vindende strategi.

### *Elevernes overvejelser vedrørende en langsigtet strategi i form af "en kæde af informelle argumenter"*

I begyndelsen af interventionen fremsatte eleverne hovedsageligt enkle, men logisk gyldige argumenter, mens de senere i forløbet blev i stand til at formulere kæder af informelle ræsonnementer som ligeledes tilhørte interaktionstype 3 (Díez-Palomar & Olivé, 2015). Særligt i den anden og tredje dobbeltlektion observerede vi en fremgang i elevernes ræsonneringsproces hvor de nu formulerede en mere langsigtet strategi ved at tage udgangspunkt i de logisk gyldige argumenter som de havde anvendt i interventionens begyndelse. Som resultat heraf lykkedes eleverne med at forudsige op til tre på hinanden følgende træk. De langsigtede strategier kom til udtryk ved at eleverne fremsatte korrekte og meningsfulde matematiske ræsonnementer i form af en "kæde af informelle argumenter", hvor ét argument byggede på det foregående. Eleverne fremsatte bl.a. følgende ræsonnementer:

“[...] hvis vi havde lagt den der, så forsvandt vores hvide. Så kunne I have taget vores hvide, og så kunne vi ikke lægge der.”

I det pågældende udsagn konkluderede eleven indledningsvis at modspillerne, der spillede sort, ville have haft mulighed for at vende en hvid brik hvis hvid havde placeret en brik i et givent felt. Mere præcist konkluderede hun at modspillerne havde mulighed for at udføre et fordelagtigt træk, hvilket følger af den præmis der udgøres af spillets regler og den placering brikkerne havde på brættet i forvejen. Som følge af konklusionen, der lød på at modspillerne kunne have haft mulighed for at vende en hvid, fortsatte hun sin argumentation, idet denne konklusion blev et tredje udsagn der ledte til at eleven endeligt kunne konkludere at hvids fordelagtige træk kunne have været forhindret.

### *Elevernes tilbøjelighed til at følge og bedømme hinandens ræsonnementer*

Under interventionen oplevede vi ligeledes at eleverne var i stand til at følge og bedømme hinandens ræsonnementer. Et spillepar havde fx en korrespondance hvor de diskuterede deres kommende træk. Udgangspunktet for korrespondancen var den ene spillers ræsonnement som gik på at de kunne vende to brikker hvis de placerede en brik i et givent felt. Spillemakkeren fulgte dette ræsonnement og påpegede at dette træk ville give modstanderen en fordel i spillet:

E<sub>1</sub>: “Jo, vi kan lægge den der for at få de to.”

E<sub>2</sub>: “Hvor? Den der?”

E<sub>1</sub>: “Ja, for at få de der to.”

E<sub>2</sub>: “Nej, det skal vi ikke, for så får vi den der, og så kan de tage allesammen der, og så får de også dem der. Vi kan lægge den der, så får vi de der to tilbage. Skal vi gøre det?”

E<sub>1</sub>: “Ja.”

Ligeledes viser korrespondancen at eleverne var i stand til at stille “opklarende spørgsmål” (Olson, 2007) og forholde sig konstruktivt til disse, hvilket ifølge Mercer & Wegerif (1999) er karakteristisk for “undersøgende dialog”. Mere præcist stillede den ene elev et opklarende spørgsmål om hvor spillemakkeren mente et fordelagtigt træk kunne foretages. Herefter forholdt eleven sig kritisk idet hun argumenterede for hvorfor dette træk ikke gav spilleparret en fordel.

Med udgangspunkt i de iagttagelser som vi har beskrevet i de tre foregående afsnit, kan det siges at vi gennem anvendelse af designprincipperne i vores undervisning havde held med at fremme begge aspekter af et matematisk ræsonnement. Det strukturelle aspekt optrådte i form af logisk gyldige argumenter eller en kæde af informelle argumenter, og det processuelle aspekt optrådte i form af forklaringer

og begrundelser for de fremsatte påstande. Dette kom til udtryk ved at eleverne var i stand til at indgå i “undersøgende dialog”, som falder under kategorien interaktionstype 3 (Díez-Palomar & Olivé, 2015). Det undersøgende aspekt kom til udtryk ved at eleverne fremsatte påstande og argumenterede for disse ved at forklare og begrunde med udgangspunkt i spillets præmisser og samtidig verificerede hinandens ræsonnementer gennem en indbyrdes interaktionsproces. Herudover kom det undersøgende aspekt til udtryk ved at eleverne stillede opklarende spørgsmål, lyttede til og satte sig ind i hinandens ræsonnementer og som resultat af et mere fordelagtigt fremført argument omformulerede deres ræsonnementer.

### *Elevernes anvendelse af interaktionstype 1 og 2*

Selvom vi mener at eleverne under interventionen indgik i “undersøgende dialog”, er vi også opmærksomme på at de i en spilsituation vil fremsætte påstande uden at argumentere. Fx fremgår det af vores data at mængden af påstande som eleverne fremsatte uden argumentation, og som hører under interaktionstype 1 (Díez-Palomar & Olivé, 2015), ikke ændrede sig nævneværdigt over de seks spillerunder. Mere konkret finder vi bl.a. følgende uafhængige påstande i vores data:

“Sort har en masse fordele.”

“Vi tror at hvid vinder.”

Ligeledes ændrede mængden af “magt-ræsonnementer”, hvilket hører under interaktionstype 2 (Díez-Palomar & Olivé, 2015), sig ikke særligt over de seks spillerunder. Fx finder vi følgende samtale i vores data:

E<sub>1</sub>: “Ja, vi er så kloge, folkens.”

E<sub>2</sub>: “Det er derfor vi fører.”

## Diskussion

### *Elevernes brug af ubegrundede påstande og magt-ræsonnementer*

En central udfordring ved vores undervisningsdesign er elevernes anvendelse af interaktionstype 1 og 2 under Othello-aktiviteten. Når eleverne fortsat benyttede disse interaktionstyper, kan det ifølge Jensen (2022) skyldes at deres engagement ikke kun var rettet mod at udtænke og fremsætte ræsonnementer i form af strategier, men også mod at deltage i spillet som en form for social interaktion (Goffman, 1961). De ubegrundede påstande og “magt-ræsonnementer” kan således være et udtryk for at eleverne også var optaget af spillets sociale og underholdningsmæssige aspekter og

ikke kun optaget af at følge lærerens instruktioner for at forbedre deres vinderchancer. Da elever opfatter spil som både en form for socialt samvær og i undervisningssituationen også et matematisk værktøj, kan læreren ikke forvente at elevernes interaktioner alene vil kunne kategoriseres som type 3. Derimod vil det være et åbent spørgsmål hvordan balancen mellem de tre interaktionstyper vil være. Her bør læreren især være opmærksom på hvornår eleverne på den ene side sigter mod at indgå i "undersøgende dialog" og forbedre deres vinderstrategier og på den anden side sigter mod at indgå i sociale praksisser omkring spillet.

En udfordring der vedrører dette, blev tydelig i undervisningens tredje fase. Her stillede læreren et opklarende spørgsmål som gik på hvorvidt eleverne havde været i stand til at gøre sig overvejelser om mere end blot deres eget kommende træk, hvortil en elev svarede:

"Vi brugte kodeord så de andre ikke hørte hvad vi tænkte. Salat, remoulade og sådan."

Denne påstand illustrerer hvordan eleverne ikke altid ville dele deres ræsonnementer i form af strategier. Ifølge Jensen (2022) kan dette forklares ved at læreren og eleverne oplevede spilsituationen fra forskellige perspektiver. Mens læreren sigtede mod at fremme matematiske diskussioner hvor ræsonnementer blev udvekslet, udviklet og overvejet i hele klassen, prioriterede eleverne at hemmeligholde fordelagtige strategier for deres modstandere

### *En kompleks sammensætning af designprincipper*

En anden central udfordring ved vores design er den komplekse sammenfletning af designprincipperne (Hanghøj et al., 2022) som betyder at det er svært for os at fastslå præcis hvordan kombinationen af principperne fungerede i forhold til at opmuntre eleverne til at producere ræsonnementer. Fx præsenterede arbejdsarkene eleverne for en ændring af spillets præmis i form af forskellige spilopstillinger samtidig med at arket blev anvendt i en spillerunde hvor eleverne spillede ét par mod et andet. Herudover inkluderede flere af arbejdsarkene "hvis ... så"-formuleringen. Ud fra vores data kan vi se at eleverne kommunikerede mere når de spillede ét par mod et andet par, sammenlignet med når de spillede én mod én. Samtidig kan vi se at arbejdsarkene opmuntrede eleverne til at diskutere forskellige strategier ved at anvende "hvis ... så" i deres argumentation. Hvilke af de tre designprincipper der virkede mest i forhold til at opmuntre eleverne til "undersøgende dialog", er dog svært at vurdere. I den afsluttende fase af hver dobbeltlektion gennemgik læreren arbejdsarkene i plenum med fokus på at stille opfølgende spørgsmål til elevernes begyndende ræsonnementer. Af vores data fremgår det at lærerens opfølgende spørgsmål til arbejdsarkene ofte resulterede i at eleverne forstærkede deres argumenter. Dog er det vanskeligt at

pege på om det var arbejdsarkene der ansporede eleverne til at ræsonnere om nyttige Othello-strategier, eller om det var de opfølgende spørgsmål der virkede mest i forhold til at opmuntre til “undersøgende dialog”. Som beskrevet er det svært at bedømme hvert designprincip for sig selv når de vikles ind i hinanden. Vi foreslår derfor at det er den samlede effekt af principperne der bidrager positivt til udviklingen af elevernes matematiske ræsonnementskompetence.

### *Matematiske ræsonnementer eller ej?*

Når læreren vælger at lade kombinatoriske strategispil træde i forgrunden for en ræsonnementsfremmende undervisning, er det nærliggende at spørge om de ræsonnementer eleverne fremsætter, er matematiske eller ej. Vores perspektiv på dette spørgsmål handler om hvilken definition af et matematisk ræsonnement man vælger at tage udgangspunkt i. Inspireret af McFeetors & Palfy (2018) og med udgangspunkt i både Jeannotte & Kierans (2017) definition af et matematisk ræsonnement – som lyder “as a process of communication with others or with oneself that allows for inferring mathematical utterances from other mathematical utterances” – og delMas’ (2004) beskrivelse af et matematisk ræsonnement, som indebærer “[...] reasoning about patterns”, vil vi i det følgende afsnit diskutere hvorvidt der forekommer matematiske ræsonnementer når eleverne kommunikerer under interventionen.

For det første brugte eleverne i interventionen matematiske aspekter i deres argumenter, hvilket kom til udtryk ved deres overvejelser over de strategier de undervejs blev introduceret for. Vi opdagede at eleverne anvendte matematiske aspekter i deres argumenter på to forskellige måder: dels ved at anvende matematisk viden de allerede havde tilegnet sig tidligere i deres skoleforløb, og dels ved at stifte bekendtskab med matematiske aspekter de kun lejlighedsvis var stødt på i undervisningen. Fx brugte eleverne deres allerede tilegnede viden om simpel aritmetik ved at tælle antallet af brikker de kunne vende, samt antallet af brikker de forestillede sig at modstanderen kunne vende. Et eksempel herpå er denne dialog mellem elev og lærer:

E: “Hvis du får alle fire hjørner, så er du sikret 28 gratis brikker.”

L: “Hvorfor?”

E: “Fordi de ikke kan tage dine sidebrikker ud. Så lige meget hvad så bliver de (red. brikkerne) derude, og så kan du også begynde at tage dem i midten.”

Eleverne anvendte også deres viden om symmetriakser da de arbejdede med arbejdsarkene, idet en af spillets strategier går på at det giver en fordel i spillet at placere brikker symmetrisk omkring midten med to brikker på hver side. Dernæst indgik eleverne i en kommunikationsproces i en engagerende kontekst hvor de tilbød hinanden argumenter der bl.a. indeholdt de nævnte matematiske aspekter. At der er tale om en



kommunikationsproces, kan begrundes med at eleverne under interventionen opnåede en følelse af kontinuerlig progression og sammenhæng mellem deres fremsatte ræsonnementer i form af strategier, hvilket netop kom til udtryk ved at eleverne lod ét argument udspringe fra et andet. I forlængelse heraf kan det siges at de strategier eleverne efterhånden blev bekendte med, udgjorde en form for abstraktion over de geometriske mønstre de gradvist lærte at genkende gennem spilprocessen, og som kom til udtryk ved brikernes skiftende placeringer på brættet. I overensstemmelse med Jeannotte & Kieran (2017) samt delMas' (2004) definitioner og med Stylianides' (2007) "intellectual-honesty principle" in mente mener vi således at vi er lykkedes med at motivere mellemtrinselever til at deltage i en kommunikationsproces hvor de præsenterer informelle argumenter for hinanden på et niveau der er svarende til deres faglige kunnen. De fremførte argumenter, som er karakteriseret ved en logisk progression, indeholder matematiske aspekter og er baseret på geometriske mønstre. Rosholm et al. (2017) antyder at ræsonnementsfærdigheder der er tilegnet gennem spil, kan overføres til andre matematiske områder. Dette kunne være oplagt at undersøge i en ny intervention for at forstå hvordan forløbet kan integreres i undervisningens progression.

## Konklusion

Denne artikel er udarbejdet med henblik på at give matematikdidaktikere og -undervisere et praksisorienteret perspektiv på hvordan kompetencemålstyret matematikundervisning kan organiseres. Vi finder at tilrettelæggelse og implementering af undervisning der sigter mod at styrke elevers matematiske ræsonnementskompetence, ofte er forbundet med udfordringer for underviseren. Det viser sig dog at inddragelsen af strategiske og kombinatoriske brætspil som Othello, kombineret med et velovervejet undervisningsdesign som det vi har præsenteret her, kan lægge nogle betydningsfulde trædesten for elevernes arbejde med ræsonnementskompetencen. Specifikt har vores undersøgelse vist at anvendelsen af fire designprincipper i en undervisningskontekst som ved brug af Othello fokuserer på at fremme elevernes matematiske ræsonnementskompetence, opmuntrer elever til at indgå i "undersøgende dialog". Dertil viser vores undersøgelse at elevers deltagelse i "undersøgende dialog" under Othello-baserede aktiviteter potentielt kan skabe en platform der giver dem mulighed for at øve sig i og fremsætte matematiske ræsonnementer af både processuel og strukturel karakter, hvilket igen kan bidrage til udviklingen af deres matematiske ræsonnementskompetence.

## Perspektivering og begrænsninger

Vi forestiller os at de præsenterede designprincipper har potentialet til at blive anvendt mere generelt i en undervisning der har til hensigt at udvikle mellemtrinselevs matematiske ræsonnementskompetence gennem brætspil – særligt hvis de anvendte spil besidder samme karakteristiske egenskaber som Othello. Vores undersøgelse rækker dog ikke til at vise en bred generaliserbarhed. Hvis vi skal kunne generalisere bredere, vil det være nærliggende at undersøge designprincippernes virkning i en undervisning der centrerer omkring et andet kombinatorisk strategispil.

## Referencer

- Berkman, R.M. (2004). The Chess and Mathematics Connection: More Than Just a Game. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 9(5), 246-250. <https://doi.org/10.5951/MTMS.9.5.0246>
- Berthold, V., Aagaard-Hansen, J., Gadegaard, I. & Bjarning, M. (2020). Brug af spil i matematikundervisningen 2. *Matematik*, 48(5), 28-33.
- Bjarning, M., Gadegaard, I., Berthold, V. & Aagaard-Hansen, J. (2020). Brug af spil i matematikundervisningen 1 – brætspillet, Othello, som praksiseksempel. *Matematik*, 48(4), 22-26.
- Blomhøj, M. (2017). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund.
- Boell, S.K. & Cecez-Kecmanovic, D. (2014). A Hermeneutic Approach for Conducting Literature Reviews and Literature Searches. *Communications of the Association for Information Systems*, 34(1), 257-286. <https://doi.org/10.17705/1CAIS.03412>
- Bright, G.W., Harvey, J.G & Wheeler, M.M. (1983). Use of a Game to Instruct on Logical Reasoning. *School Science and Mathematics*, 83(5), 396-405. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1983.tb15526.x>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2019). *Matematik – Fælles Mål*. Børne- og Undervisningsministeriet.
- Dansk Othello Forbund. (2018). *Greve Othello Forening*. <http://www.othello.dk/index.php/klubber/8-greve-othello-forening>
- Dawkins, P.C. & Karunakaran, S.S. (2016). Why Research on Proof-Oriented Mathematical Behavior Should Attend to the Role of Particular Mathematical Content. *The Journal of Mathematical Behavior*, 44, 65-75. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.10.003>
- Day, L. (2014). Australian Curriculum Linked Lessons: Reasoning in Number and Algebra. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 19(3), 16-19. [https://researchonline.nd.edu.au/edu\\_article/151/](https://researchonline.nd.edu.au/edu_article/151/)
- delMas, R.C. (2004). A Comparison of Mathematical and Statistical Reasoning. I: D. Ben-Zvi & J. Garfield (red.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (s. 79-96). Kluwer Academic Publishers.

- Díez-Palomar, J. & Olivé, J.C. (2015). Using Dialogic Talk to Teach Mathematics: The Case of Interactive Groups. *ZDM*, 47(7), 1299-1312. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0728-x>
- Ferrini-Mundy, J. (2000). Principles and Standards for School Mathematics: A Guide for Mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(8), 868-876. <https://www.ams.org/notices/200008/comm-ferrini.pdf>
- Fraenkel, A.S. (2012). Combinatorial Games: Selected Bibliography with a Succinct Gourmet Introduction. *The Electronic Journal of Combinatorics*. <https://www.wisdom.weizmann.ac.il/~fraenkel/Papers/gb.pdf>
- Goffman, E. (1961). *Encounters: Two Studies in the Sociology of Interaction*. Ravenio Books.
- Hanghøj, T., Händel, V.D., Duedahl, T.V. & Gundersen, P.B. (2022). Exploring the Messiness of Design Principles in Design-Based Research. *Nordic Journal of Digital Literacy*, 17(4), 222-233. <https://doi.org/10.18261/njdl.17.4.3>
- Hansen, T.I., Elf, N.F., Misfeldt, M., Gissel, S.T. & Lindhardt, B.K. (2020). *Kvalitet i dansk og matematik – et lodtrækningsforsøg med fokus på undersøgelsesorienteret dansk- og matematikundervisning*. <https://laeremiddel.dk/wp-content/uploads/2020/01/Slutrapport-Kvalitet-i-dansk-og-matematik.pdf>
- Houssart, J. & Sams, C. (2008). Developing Mathematical Reasoning through Games of Strategy Played against the Computer. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 15(2), 59-71. <https://eric.ed.gov/?id=EJ837647>
- Højgaard, T. & Arnt, N.W. (2021). Facilitering af kompetenceorienteret matematikundervisning – erfaringer med kommunalt forankret, skolebaseret udvikling af lærerkompetencer. *MONA*, 2021(1), 50-68. <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/125072/171872>
- Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A Conceptual Model of Mathematical Reasoning for School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Jensen, E.O. (2022). Brætspil i matematikundervisningen. I: S.S. Fougat, J. Bundsgaard, T. Hanghøj & M. Misfeldt (red.), *Håndbog i Scenariedidaktik* (s. 190-202). Aarhus Universitetsforlag.
- Jensen, E.O. & Skott, C.K. (2022). How Can the Use of Digital Games in Mathematics Education Promote Students' Mathematical Reasoning? A Qualitative Systematic Review. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 8(2), 183-212. <https://doi.org/10.1007/s40751-022-00100-7>
- Larsen, D.M. (2019). *Developing Reasoning Competence in Inquiry-Based Mathematics Teaching*. Syddansk Universitetsforlag.
- Larsen, D.M. & Lindhardt, B.K. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematikundervisningen på mellemtrinnet. *MONA*, 2019(1), 7-21. <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/112811/161536>
- Lindhart L., Ejdrup, F. & Skipper-Jørgensen, A. (2010). Ræsonnementer i folkeskolens matematikundervisning – karakterisering, initiering, identificering og vurdering af ræsonnementskompetencen. *MONA*, 2010(4), 7-24. <https://tidsskrift.dk/mona/article/download/36139/37487/81638>

- Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255-276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley.
- Mason, J. (2002). Questions about Mathematical Reasoning and Proof in Schools. I: Abramsky, J. (red.), *Reasoning, Explanation and Proof in School Mathematics and Their Place in the Intended Curriculum*. QCA Publications.
- McFeetors, P.J. & Palfy, K. (2018). Educative Experiences in a Games Context: Supporting Emerging Reasoning in Elementary School Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50, 103-125. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.02.003>
- Mechner, F. (2010). Chess as a Behavioral Model for Cognitive Skill Research: Review of Blindfold Chess by Eliot Hearst and John Knott. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 94(3), 373-386. <https://doi.org/10.1901/jeab.2010.94-373>
- Mercer, N. & Wegerif, R. (1999). Children's Talk and the Development of Reasoning in the Classroom. *British Educational Research Journal*, 25(1), 95-111. <https://doi.org/10.1080/0141192990250107>
- Mosimege, M.D. (1998). Culture, Games and Mathematics Education: An Exploration Based on String Games. I: A. Olivier & K. Newstead (red.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 286-293). University of Stellenbosch.
- NGA Center & CCSSO. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. NGA Center & CCSSO (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers).
- Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.
- Olson, J.C. (2007). Developing Students' Mathematical Reasoning through Games. *Teaching Children Mathematics*, 13(9), 464-471. <https://doi.org/10.5951/TCM.13.9.0464>
- Rosholm, M., Mikkelsen, M. & Gumedé, K. (2017). Your Move: The Effect of Chess on Mathematics Test Scores. *PLOS One*, 12(5), 1-18. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0177257>
- Sala, G. & Gobet, F. (2015). Do the Benefits of Chess Instruction Transfer to Academic and Cognitive Skills? A Meta-Analysis. *Educational Research Review*, 18, 46-57. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2016.02.002>
- Schoenfeld, A.H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Stylianides, A.J. (2007). The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9038-0>
- Stylianides, G.J. & Stylianides, A.J. (2008). Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(2), 103-133. <https://doi.org/10.1080/10986060701854425>

Whitenack, J. & Yackel, E. (2002). Making Mathematical Arguments in the Primary Grades: The Importance of Explaining and Justifying Ideas. *Teaching Children Mathematics*, 8(9), 524-527. <https://doi.org/10.5951/TCM.8.9.0524>

### English abstract

*This article investigates the integration of strategic and combinatorial board games, such as Othello, into mathematics education at the intermediate level, utilizing four design principles with the aim of strengthening students' mathematical reasoning skills. The article focuses on an intervention in a 5th-grade class and describes how students' engagement in 'exploratory talk' during Othello-related activities can create a platform that enables them to practice formulating mathematical reasoning of both procedural and structural nature. The article concludes that such activities can positively contribute to the development of students' reasoning competencies.*