

Adaptivitet og fleksibilitet – addition og subtraktion med flercifrede tal



Lóa Björk Jóelsdóttir,
VIA University College
& TrygFondens
Børneforskningscenter,
Aarhus Universitet



Pernille Bødtker Sunde, VIA
University College & KU
Leuven

Abstract: *Internationalt er der enighed om at fleksibilitet og adaptivitet, dvs. at kende til flere strategier og at kunne vælge den mest hensigtsmæssige, er centrale elementer i matematikundervisning. Vi har undersøgt 2.298 danske 3.-, 6.- og 8.-klasseelevers brug af regnestrategier til trecifrede additions- og subtraktionsopgaver designet til at fremme brug af talbaserede metoder, fx $199 + 323$. På tværs af klassetrin viste eleverne lav grad af adaptivitet. Eleverne anvendte sjældent de talbaserede metoder selvom disse havde højere rigtighedsprocent end standardalgoritmen. Brug af standardalgoritmen var størst i 8. klasse hvor eleverne samtidig gjorde mindst brug af talbaserede metoder.*

Indledning

Siden 1990'ernes reformorienterede matematikundervisning har der været bred enighed blandt eksperter om at adaptivitet og fleksibilitet er et centralt mål for matematikundervisningen (Baroody, 2003; Hickendorff et al., 2018; Xu et al., 2017). I lande som USA, Australien, Singapore (Rittle-Johnson et al., 2012), Holland (Hickendorff, 2018), Belgien (Torbeyns et al., 2018) og også Danmark (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a) er fleksibilitet således skrevet ind i læseplanerne for matematik.

Forskning i fleksibilitet og adaptivitet i relation til regning med både etcifrede og flercifrede tal har vist at der er god grund til at have fokus på børns udvikling og brug af regnestrategier da dette ser ud til at hænge sammen med matematikvanskeligheder (fx Ostad, 1997; Vanbinst et al., 2014) og udvikling af matematiske færdigheder mere generelt (Dowker, 2014; Jóelsdóttir, 2023; Sunde et al., 2023).

I dette studie vil vi undersøge danske elevers brug af forskellige strategier i arbejdet med flercifrede tal og om der er forskel på strategibrug på forskellige klassetrin.

Regnestrategier og cifferbaserede metoder

En metode til flercifrede beregninger vedrører den måde hvorpå man håndterer de tal der indgår i beregningen, med henblik på at finde frem til resultatet. Det kalder Hickendorff et al. (2019) en (løsnings)strategi. Vi har dog valgt at anvende begrebet metode som det overordnede generelle begreb da strategi i en dansk kontekst primært knytter sig til de talbaserede regnestrategier (se også Sunde, 2022). Regnemetoder kan dermed være både talbaserede regnestrategier og cifferbaserede metoder eller algoritmer, bl.a. standardalgoritmer. I det følgende uddyber vi hvordan vi anvender begreberne strategi og algoritme, hvilket også er beskrevet i Sunde (2022). Med en strategi eller regnestrategi forstår vi en metode som består af en række mulige handlinger som kan ændres og tilpasses den enkelte regnesituation (fx Ostad, 1997; Siegler & Jenkins, 1989; Verschaffel et al., 2007). En algoritme består derimod af fastlåste og ufravigelige trin for trin-handlinger (Siegler & Jenkins, 1989). Heri ligger at den er fastlagt på forhånd og kan bruges til alle typer opgaver, altså generelt, inden for en regningsart.

De talbaserede strategier har det tilfælles at de bygger på talforståelse samt forståelse af regneoperationernes egenskaber. De kræver forståelse for hvordan tallene kan deles op, ofte i enere, tiere, hundreder osv., fx at $384 = 300 + 80 + 4$, og tallenes størrelse, fx at 199 er en mindre end 200, dvs. $199 = 200 - 1$. De cifferbaserede metoder inkluderer bl.a. standardalgoritmen. Metoderne kan gennemføres som en udenadlært regneproces hvor forståelse ikke er nødvendig for at gennemføre de enkelte trin, men metoderne er nemme at generalisere for alle tal. Eksempler på tal- og cifferbaserede metoder kan ses i tabel 1.

At kunne anvende de talbaserede strategier forudsætter således at eleven har en god talforståelse og kan kombinere det med forståelse af de fire regningsarter (Yang et al., 2009). Dette er helt parallelt med udvikling af regnestrategier til etcifret regning, som beskrevet i Sunde (2022).

Table 1. Eksempler på regnestrategier til flercifret addition og subtraktion.

Talbaserede strategier		
Dekomposition (split)	Sekventielle strategier (lægge til – trin for trin)	Kompensation
384 + 216	199 + 323	199 + 323
$\begin{array}{r} 300\ 80\ 4 \\ 200\ 10\ 6 \\ \hline 500 + 200 = 500 \\ 80 + 10 = 90 \\ 4 + 6 = 10 \\ 500 + 90 + 10 = 600 \end{array}$	$\begin{array}{l} 300 + 199 = 499 \\ 499 + 23 = 522 \end{array}$	$\begin{array}{l} 200 + 323 = 523 \\ 523 - 1 = \underline{522} \end{array}$
704 - 17	704 - 17	673 - 199
$\begin{array}{l} 700 - 0 = 700 \\ 0 - 10 = -10 \\ 4 - 7 = -3 \\ 700 + (-10) + (-3) = 687 \end{array}$	$\begin{array}{l} 704 - 7 = 697 \\ 697 - 10 = \underline{687} \end{array}$	$\begin{array}{r} 673 + 1 \\ 199 + 1 \\ \hline 674 - 200 = 474 \end{array}$
	Indirekte addition/fylde op 504 - 476	
	$\begin{array}{l} 476 + 24 = 500 \\ 500 + 4 = 504 \\ 24 + 4 = \underline{28} \end{array}$	
Cifferbaserede metoder		
Standardalgoritme	Regning med cifre	
482 + 218	504 - 476	384 + 216
$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 482 \\ +218 \\ \hline 700 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4\ 10 \\ 504 \\ -476 \\ \hline 028 \end{array}$	$\begin{array}{l} 4 + 6 = 10 \\ 8 + 1 = 9 \text{ sæt } 0 \text{ bag på} = 90 \\ 3 + 2 = 5 \text{ sæt } 00 \text{ bag på} = 500 \\ 10 + 90 = 100 + 500 = \underline{\underline{600}} \end{array}$

Adaptivitet og fleksibilitet

I litteraturen anvendes forskellige definitioner af begreberne adaptivitet og fleksibilitet, og i flere tilfælde bruges fleksibilitet som synonym for begge (Verschaffel et al., 2009). Verschaffel et al. (2009) konkluderer at begrebet fleksibilitet oftest defineres som viden om forskellige strategier til løsning af et givent problem samt evnen til at anvende og skifte imellem disse strategier, og at begrebet adaptivitet oftest defineres som evnen til at vælge hensigtsmæssige strategier til løsning af et givent problem. I denne artikel følger vi disse definitioner.

Hvis vi ser lidt nærmere på adaptivitet, altså valg af hensigtsmæssige strategier, kan dette anskues fra tre forskellige perspektiver (Verschaffel et al., 2009). Det første perspektiv, som er hovedfokus i denne artikel, er opgaverelateret adaptivitet. Her er de mest hensigtsmæssige strategier de strategier hvor udregningsprocessen er gjort mere simpel i form af færre trin og simple beregninger, dvs. ved brug af en såkaldt shortcut-strategi (Torbeyns et al., 2009; Xu et al., 2017). Et eksempel er brugen af kompensation i opgaver som har 9 enere, fx $199 + 323 = 200 + 323 - 1 = 522$, eller indirekte addition (fylde op) til subtraktion med to tal med lille forskel, fx $103 - 98 = 2 + 3 = 5$. De øvrige to perspektiver på adaptivitet er det individuelt kognitive, dvs. når strategivalg er relateret til hvad der er hurtigst og mest sikkert for den enkelte person, og til sidst det kulturelle perspektiv, dvs. hvad der er anerkendt i det (klasse)miljø eleven er i (Verschaffel et al., 2007). Se også Sunde (2022) for eksempler.

Regnestrategier i en dansk kontekst

Diskussionen om fleksibilitet er ikke ny i dansk sammenhæng. Udvikling af regnestrategier og talbaserede regnemetoder har været en del af de officielle mål siden *Klare mål* fra 2001 (Undervisningsministeriet, 2001). I den danske læseplan fra 2019 står der bl.a.:

“Det er centralt, at læreren udfordrer og støtter de enkelte elever på en måde, så eleverne udvikler deres regnestrategier på baggrund af deres talforståelse frem for at lære procedurer for opstilling og udregning. Der sigtes ikke mod opøvelsen af standardiserede algoritmer” (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a, s. 37).

I Undervisningsvejledningen fremhæves det desuden at arbejdet med regnestrategier skal bygge på udvikling af tal- og regneforståelse:

“ambitionen er noget andet og mere, end at eleverne får præsenteret beregningsmetoder, som de efterfølgende øver sig på. Formuleringen hænger sammen med, at eleverne skal lære med forståelse. Det er med andre ord ikke hensigten, at eleverne reproducerer bereg-

ningsmetoder, men at de udvikler metoder, fordi en sådan udvikling kun kan foregå, når den er forbundet med forståelse af tallenes og regningsarternes egenskaber” (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019a, s. 93).

Der er således ingen tvivl om at anbefalingen de sidste årtier har været at arbejde med talbaserede regnestrategier frem for algoritmer i selve matematikundervisningen. Selvom begrebet fleksibilitet ikke anvendes direkte i beskrivelsen i læseplanen, svarer beskrivelsen af udviklingen af regnestrategier på baggrund af elevernes talforståelse netop til definitionen af fleksibilitet, og dermed kan anbefalingerne i Fælles Mål siges at sigte mod opnåelse af fleksibilitet.

Men hvordan ser det så ud med elevernes valg af løsningsstrategier i regneopgaver? Ser vi på de fire klassiske opgaver i regning med positive heltal i de fire regningsarter i folkeskolens prøve i matematik efter 9. klasse, færdighedsdelen fra maj 2019, kan vi se at 30 % af eleverne svarer forkert på subtraktionsopgaven $701 - 149$ og 31 % svarer forkert på divisionsopgaven $7021 : 7$ (Undervisningsministeriet, 2019b). Begge opgaver har den egenskab at de understøtter anvendelse af talbaserede metoder (se tabel 1), her med særligt fokus på shortcut-strategier der har det tilfælles at være talbaserede metoder hvor antallet af step i udregningen reduceres (se tabel 2). Ser vi nærmere på de typiske fejlsvar, viser der sig et mønster. For opgaven $701 - 149$ udgør fire af de fem mest hyppige fejlsvar, 462, 562, 648 og 652, tilsammen knap halvdelen af alle fejlsvar (8.750 elevsvar) og 13,6 % af alle elevsvar (Undervisningsministeriet, 2019b). Disse fejlsvar har det tilfælles at de kan være resultat af typiske fejl ved brug af standardalgoritmen (tabel 2). Resultater som disse understøtter en hypotese om at danske elever, trods anbefalingerne i Fælles Mål, prioriterer cifferbaserede metoder som fx algoritmer og i mindre grad arbejder med talbaserede metoder. Ud over de viste eksempler i figur 1 kan noget lignende ses ved analyse af fejlsvar af divisionsopgaver. I tabel 3 vises tre eksempler fra hhv. 2011, 2016 og 2019, hvor en algoritme sammenlignes med en talbaseret metode. Eksemplerne i tabel 3 viser hvordan en simpel fejl kan opstå når eleverne ikke husker processen i algoritmen når 0 er en af cifrene. Opgavens egenskaber understøtter samtidig muligheden for at løsningsprocessen kan simplificeres med en talbaseret metode, her ved opdeling af tallet på en hensigtsmæssig måde, fx $700 - 150 = 550$, $550 + 2 = 552$.

Tabel 2. Mulige fejlmetoder til de hyppigste fejlsvar fra folkeskolens prøve uden hjælpemidler i maj 2019. $N = 64.331$, fejlsvar: 30 % af alle svar (Undervisningsministeriet, 2019b).

Hyppigste fejlsvar til 701 – 149	Antal fejlsvar	Mulig løsningsmetode
462	2.656	$\begin{array}{r} 5 \text{ } 10 \text{ } 11 \\ 701 \\ -149 \\ \hline 462 \end{array}$
550	2.245	$\begin{array}{r} 701 - 149 \\ -1 \quad +1 \\ 700 - 150 = 550 \end{array}$
562	2.221	$\begin{array}{r} 6 \text{ } 10 \text{ } 11 \\ 701 \\ -149 \\ \hline 562 \end{array}$
648	2.101	$\begin{array}{r} 701 \\ -149 \\ \hline 648 \end{array}$
652	1.772	$\begin{array}{r} 9 \text{ } 11 \\ 701 \\ -149 \\ \hline 652 \end{array}$

Tabel 3. Eksempler på division fra prøven uden hjælpemidler i 2011, 2016 og 2019, fejlprocent, hyppige fejlsvar (Hansen, 2011; Undervisningsministeriet, 2019b), og eksempler på løsningsmetoder med hhv. standardalgoritme og shortcut-strategi.

	2011	2016	2019
Opgave	4509: 9	8032: 8	7021: 7
Fejlprocent	30 %	45 %	31 %
Hyppige fejlsvar	51	104	103
Standardalgoritme	$\begin{array}{r} 501 \\ 9 \overline{)4509} \\ \underline{45} \\ 009 \\ \underline{09} \\ \underline{0} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1004 \\ 8 \overline{)8032} \\ \underline{8} \\ 0032 \\ \underline{0032} \\ \underline{0} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1003 \\ 7 \overline{)7021} \\ \underline{7} \\ 0021 \\ \underline{0021} \\ \underline{0} \end{array}$
Shortcut-strategi	$4500: 9 = 500$ $9: 9 = 1$ $500 + 1 = 501$	$8000: 8 = 1000$ $32: 8 = 4$ $1000 + 4 = 1004$	$7000: 7 = 1000$ $21: 7 = 3$ $1000 + 3 = 1003$

Dette indikerer at standardalgoritmen fortsat spiller en væsentlig rolle i den danske matematikundervisning på trods af anbefalingerne i læseplanen. Men analyser af fejlsvar i folkeskolens prøve giver os ikke svar på hvordan eleverne rent faktisk regner, hverken når de regner forkert eller rigtigt. Målet med denne undersøgelse er derfor at få øget indblik i de danske elevers brug af talbaserede strategier og standardalgoritmer i addition og subtraktion med flercifrede tal.

Regnestrategier, adaptivitet og generel udvikling i matematik

Både international og dansk forskning har vist en tydelig sammenhæng imellem elevers brug af talbaserede regnestrategier tidligt i skoleforløbet og deres senere udvikling i matematik (Dowker, 2014; Ostad, 1997; Sunde et al., 2023; Vanbinst et al., 2014). I en dansk kontekst har Sunde et al. (2023) fx vist at elever der i starten af 1. klasse foretrak usofistikerede tællestrategier, klarede sig dårligere i 4. klasse i både tekstopgaver, brøker og ligninger.

Selvom eksperter inden for området er enige om vigtigheden af udvikling af variation af strategier, strategi-fleksibilitet og evnen til at vælge optimale strategier til forskellige situationer i form af adaptivitet, er der begrænset forskning inden for området. Derudover påpeger Verschaffel (2023) at resultater vedrørende sammenhæng mellem elevers fleksibilitet og præstation i matematik ikke er entydige. For over 30

år siden præsenterede Hatano & Inagaki (1984) begreberne adaptiv ekspertise og rutineekspertise. De påpegede at målet for matematikundervisningen må være udvikling af adaptiv ekspertise som indebærer at elever på baggrund af deres forståelse kan tilpasse deres strategivalg til forskellige og vekslende situationer. Selvom rutineekspertes på baggrund af god træning har færdigheder til at løse bestemte opgaver både hurtigt og sikkert, mangler de kompetencer til fleksibelt at kunne tilpasse sig til nye situationer (Hatano & Inagaki, 1984). I dansk sammenhæng viser resultater fra Jóelsdóttir (2023) at adaptive eksperter, defineret som elever som viser effektivitet (regner korrekt) med shortcut-strategier, klarer sig signifikant bedre i nationale tests i matematik end rutineekspertes, defineret som de elever som regner de samme opgaver med tilsvarende effektivitet, men som ikke anvender shortcut-strategier til nogen af opgaverne.

I dansk såvel som international sammenhæng mangler der forskning i elevers brug og udvikling af regnestrategier med flercifrede tal, både i forhold til forskellige aldersgrupper, køn og andre individuelle karakteristika, og sammenhænge mellem adaptiv fleksibilitet og elevernes generelle udvikling i matematik, og i forhold til hvordan undervisning bedst understøtter udvikling af elevers adaptivitet og fleksibilitet (Verschaffel, 2023).

Dette studie

Vi indledte artiklen med en kort analyse af afgangselevernes fejlsvar i de fire regningsarter. Analyser af fejlsvar ved folkeskolens prøver kan ikke give os indsigt i hvordan eleverne egentlig regner, eller om de faktisk godt kan bruge talbaserede strategier. Det kan kun give os en indikation af at der måske er noget der bør undersøges nærmere. Vi vil her undersøge nogle af de resultater Lóa Björk Jóelsdóttir har indsamlet i forbindelse med sit ph.d.-studie (Jóelsdóttir, 2023) hvor hun netop undersøger elevers brug af og kendskab til forskellige regnemetoder og -strategier.

Vores forskningsspørgsmål er derfor: 1) I hvilket omfang vælger elever standardalgoritmen frem for shortcut-strategier som førstevalg ved løsning af additions- og subtraktionsopgaver med flercifrede tal hvor shortcut-strategier er oplagte at anvende? Og 2) er der forskel på dette på 3., 6. og 8. klassesetrin?

Elever fra 20 skoler fordelt på fem kommuner, både større og små, deltog i undersøgelsen. Skolerne blev valgt med henblik på at sikre deltagelse af både større og mindre skoler fra forskellige skoleområder. I alt har 2.298 elever fordelt på 121 klasser fra 3., 6. og 8. klasse løst – *Tri Phase Flexibility Assessment* (TriFA), med addition, subtraktion og multiplikation med flercifrede tal. Denne test er udviklet med baggrund i Xu et al. (2017) med det formål at kunne undersøge elevers strategivalg og strategirepertoire. Testen beskrives kort herunder, og en mere uddybende beskrivelse kan findes i Jóels-

dóttir & Andrews (2023). I testen løser eleverne i 3. klasse 8 opgaver med flercifrede tal, i 6. klasse 9 opgaver og i 8. klasse 12 regneopgaver med selvvalgt metode, og de bliver bedt om at vise hvordan de har løst opgaven. Eleverne viser deres løsningsstrategi med matematiske symboler, tekst eller tegninger. De elever som vælger at løse opgaven med hovedregning, skriver/tegner noter til hvordan de har tænkt. Efterfølgende kodes elevernes metoder efter kategorier som eksemplificeret i tabel 1. Samtlige tests er dobbeltkodet af førsteforfatteren og en forskningsassistent trænet i kodning af TriFA, og efterfølgende er alle uenigheder identificeret og afklaret. I tilfælde af usikkerhed er afklaring søgt ved hjælp af andenforfatteren.

Testen forløber i tre faser med en fælles introduktion hvor eleverne bliver opfordret til at se på både de tal og de regneoperationer der indgår i hver opgave, før de løser opgaven. Fase 1 er elevernes første valg af metode. Elevernes valg af metode i denne fase giver et mål for opgavespecifik adaptivitet. I fase 2 starter eleverne forfra med de samme opgaver som nu løses igen, men med andre metoder. Det er et udtryk for elevernes strategirepertoire og dermed fleksibilitet. I sidste fase skal eleverne angive hvilken af alle de metoder de har angivet til hver opgave i både fase 1 og 2, som de selv mener er den bedste metode i det pågældende tilfælde. Hvis eleverne kun har fundet frem til én metode, er den markeret som den bedste. Dette giver yderligere informationer om elevernes adaptivitet, om eleverne anvender shortcut-strategier, og om de identificerer disse som de mest hensigtsmæssige.

I denne undersøgelse fokuserer vi på fase 1, elevernes adaptive strategivalg, og de to additionsopgaver og de to subtraktionsopgaver der er udviklet til at fremhæve fx kompensation som hensigtsmæssig shortcut-strategi baseret på opgavens tal og regningsart. De udvalgte opgaver og antallet af elever der har løst hver opgave, fremgår af tabel 4.

Tabel 4. *Overblik over opgaver. Antal elevbesvarelser og rigtige svar for hver opgave fordelt på klassetrin. Standard deviation (SD) er tilføjet i parentes.*

	298 + 483			199 + 323			693 – 499			673 – 199		
	N	Antal løst	Rigtig (SD)	N	Antal løst	Rigtig (SD)	N	Antal løst	Rigtig (SD)	N	Antal løst	Rigtig (SD)
3. klasse	380	312	65 % (50)	368	307	72 % (45)	174	87	20 % (40)	174	84	25 % (44)
6. klasse	365	362	90 % (30)	366	365	91 % (28)	365	340	64 % (48)	366	324	68 % (47)
8. klasse	408	405	93 % (26)	410	408	93 % (26)	408	393	82 % (39)	410	400	73 % (45)

Da fokus er på talbaserede strategier og brug af standardalgoritme til hhv. addition og subtraktion og ikke på forskelle i de enkelte opgavers egenskaber, vil vi i den efterfølgende analyse samle hhv. de to additionsopgaver og de to subtraktionsopgaver som en variabel pr. regningsart. Vi bruger en t-test for uafhængige stikprøver for de to additionsopgaver i 6. og 8. klasse for at undersøge om der er forskel på elevernes strategibrug mellem de to opgaver der har samme design mht. tal og regningsart. T-testen viser ingen signifikant forskel på brugen af standardalgoritme for addition, $t(1547) = 0,51$, $p = 0,612$, og for subtraktion, $t(1547) = -0,16$, $p = 0,872$, og det betyder at vi efterfølgende kan behandle resultaterne for de to additionsopgaver som én variabel for addition og de to subtraktionsopgaver som én variabel for subtraktion.

Danske elevers strategier til flercifret addition

Tabel 5 viser fordelingen af de forskellige metoder til flercifret addition fordelt på de tre klassetrin. Brugen af standardalgoritmen er lavest i 3. klasse med 48 % og stiger til 86 % af alle løste opgaver for elever i 8. klasse. Rigtigheden, dvs. andelen af rigtigt besvarede opgaver, stiger også fra 3. (75 %) til 6. (92 %) og 8. klasse (93 %). At rigtigheden ikke øges væsentligt fra 6. til 8. klasse, kan skyldes en loftseffekt, dvs. at når rigtigheden i 6. klasse allerede er over 90 %, er der ikke meget plads til forbedringer.

Af talbaserede strategier er dekomposition (split) den mest hyppige på alle tre klassetrin, mens kompensation, som umiddelbart er den mest hensigtsmæssige strategi fra et opgavemæssigt perspektiv, udgør hhv. 7 %, 8 % og 5 % på de tre klassetrin og altså mindst i 8. klasse. Samtidig er rigtighedsprocenten for kompensation højest eller hhv. 88 %, 96 % og 95 %.

Yderligere ses at mens der er 12 % af eleverne i 3. klasse som ikke viser hvordan de har løst opgaven, dvs. at de når frem til et svar uden at vise deres metode, er der kun 4 % af eleverne i 6. klasse og 2 % i 8. klasse som ikke viser en metode bag deres svar. Dette hænger formodentlig sammen med øgede kommunikative kompetencer. Elever i 6. og 8. klasse har mere erfaring med at kommunikere i og om matematik. På alle tre årgange er procentandelen af rigtige svar lav i forhold til andre metoder når eleverne ikke kommunikerer en metode.

Tabel 5. Strategier anvendt til addition (298 + 483 eller 199 + 323) fordelt på klassetrin.

	3. klasse		6. klasse		8. klasse	
	% af løste opgaver	% rigtige	% af løste opgaver	% rigtige	% af løste opgaver	% rigtige
Standardalgoritme	48 %	75 %	69 %	92 %	86 %	93 %
Dekomposition (split)	17 %	74 %	15 %	87 %	6 %	96 %
Sekventielle strategier (lægge til)	6 %	71 %	2 %	92 %	1 %	100 %
Kompensation	7 %	88 %	8 %	96 %	5 %	95 %
Ingen beskrevet metode	12 %	52 %	4 %	72 %	2 %	83 %
Fejlforståelse	1 %		0 %		0 %	
Tæller	1 %	60 %	0 %		0 %	
Cifferbaserede metoder (ikke standardalgoritme)	3 %	31 %	1 %	63 %	< 1 %	50 %
Andet	4 %	38 %	< 1 %	100 %	< 1 %	100 %

Danske elevers strategier til flercifret subtraktion

Tabel 6 viser fordelingen af strategier og rigtighed i procent for ni forskellige strategier eller metoder til flercifret subtraktion samt kategorien "andet" som dækker over metoder som ikke umiddelbart kan kategoriseres ud fra elevernes skriftlige svar, eller som er en kombination af flere strategier og dermed ikke kan kategoriseres entydigt. Standardalgoritmen er, som for addition, den hyppigst brugte metode. I 3. klasse er 33 % af de løste opgaver løst med standardalgoritmen sammenlignet med 81 % i 8. klasse. Kompensation er den mest sikre strategi, dvs. den med højest rigtighed. Her skal der dog tages det forbehold at der er ret få elever som bruger strategien (hvh. 1 %, 6 % og 3 %), men minimum 95 % af opgaver løst med kompensation er korrekte.

Tabel 6. Strategier anvendt til subtraktion (693 – 499 eller 673 – 199) fordelt på klassetrin.

	3. klasse		6. klasse		8. klasse	
	% af løste opgaver	% rigtige	% af løste opgaver	% rigtige	% af løste opgaver	% rigtige
Standardalgoritme	33 %	37 %	61 %	72 %	81 %	80 %
Dekomposition (split)	5 %	25 %	2 %	59 %	1 %	91 %
Sekventielle strategier (træk fra)	8 %	46 %	4 %	68 %	2 %	67 %
Sekventielle strategier (tæl op)	2 %	33 %	8 %	60 %	4 %	65 %
Kompensation	1 %	100 %	6 %	95 %	3 %	96 %
Ingen beskrevet metode	22 %	11 %	8 %	45 %	4 %	28 %
Fejlforståelse	19 %		7 %		3 %	
Tæller	1 %	0 %	0 %		0 %	
Andet	10 %	18 %	5 %	61 %	2 %	72 %

Diskussion

Resultaterne viser entydigt at danske elever i 3., 6. og 8. klasse anvender og foretrækker standardalgoritmen til løsning af flercifret addition og subtraktion, selv når opgaven vil være nemmere at løse med en talbaseret metode set ud fra opgavens karakteristika, i dette studie shortcut-strategien kompensation, og eleverne direkte bliver opfordret til at se på tallene inden de regner. Det gælder alle tre årgange der indgår i denne undersøgelse. Resultaterne er interessante, dels fordi shortcut-strategier, som kompensation, generelt er mere effektive (målt på rigtighed) (Jóelsdóttir et al., 2023), og dels set i lyset af at læseplanen i matematik har lagt op til brug af talbaserede strategier i over 20 år, som beskrevet i det indledende afsnit. Derudover har dansk forskning vist at elever der foretrækker regnemetoder der bygger på talforståelse, ser ud til at klare sig bedre i matematik end de elever der foretrækker standardalgoritmen eller simple tællestrategier (Jóelsdóttir, 2023; Sunde et al., 2023).

Talforståelse er en forudsætning for anvendelse af talbaserede strategier (se fx Sunde, 2022), og man må forvente at elever på ældre klassetrin har udviklet bedre talforståelse sammenlignet med de yngre elever. Derfor skulle de ældre elever have bedre forudsætninger for at anvende de talbaserede strategier og dermed et mere adaptivt strategivalg. Resultaterne her viser at det ikke er tilfældet. Danske elever ser

altså i vid udstrækning ud til at udvikle sig mod rutineekspertise frem for adaptiv ekspertise, til trods for at Fælles Mål fremhæver adaptiv fleksibilitet som målet med undervisningen i regning.

En mulig forklaring på den udbredte brug af cifferbaserede metoder og i særdeleshed standardalgoritmen kan være de sociomatematiske normer i klasserummet (Cobb & Yackel, 1996), dvs. hvad eleverne oplever som værdsat, fx gennem typen af feedback. Dette kan også inkludere forventninger til skolematematik i hjemmet. Fra Hatano (1988) ved vi at det som hindrer udvikling af adaptiv ekspertise, er 1) mange gentagelser af samme slags opgaver, 2) at effektivitet værdsættes mere end forståelse, 3) at rigtigt svar er det som kræves, og 4) at løsningsprocessen sjældent er indholdet i den matematiske dialog. I hvor høj grad disse fire punkter kan genkendes fra danske matematikklasser, ved vi ikke, men disse punkter samt evt. manglende fokus på den basale talforståelse (Threlfall, 2002) er mulige forklaringer. Resultaterne fra dette studie giver anledning til at matematiklæreren forholder sig til de fire punkter i lyset af egen praksis. Den matematiske dialog om løsningsprocessen bør især have fokus på sammenligning af forskellige strategier. Dette vil bidrage til ikke alene elevernes fleksibilitet, men også adaptivitet hvor eleverne kan udvikle og tilpasse valg af de optimale strategier til de aktuelle situationer der indgår i en opgave.

International forskning viser at når eleverne først bliver introduceret til standardalgoritmen, så er det den de foretrækker efterfølgende (Selter, 2001). Forskningen viser ikke hvorfor, men der kan være flere faktorer i spil, fx de nævnte sociomatematiske normer i undervisningen, herunder indflydelsen af stærke traditioner og forståelse af hvad der er vigtigt i matematik, fx at målet er nået når "formlen" er på plads. En anden mulig forklaring er at der kan være tryk i at have en formel hvor der kun arbejdes med cifre og dermed regning med etcifrede tal. Det kræver dog yderligere undersøgelser at finde de mulige årsager til at danske elever foretrækker standardalgoritmer i så høj grad som vi ser i dette studie.

Resultaterne her giver desuden anledning til yderligere undersøgelser af hvad der skal til for at elever fortsætter brugen af talbaserede strategier i de ældre klasser for at opnå målet om udvikling af adaptiv ekspertise frem for rutineekspertise. Selvom der er enighed om vigtigheden af udvikling af fleksible regnestrategier og adaptivitet, mangler der stadig forskning, både internationalt og i Danmark, som viser hvordan undervisning i højere grad kan støtte denne udvikling. Der er brug for større indsigt i hvorfor der er relativt få elever som udvikler adaptivitet, men holder fast i standardalgoritmen som deres foretrukne metode. Her vil forskning med fokus på den kultur og de sociomatematiske normer i de danske matematikklasser som relaterer sig til regnestrategier, være særlig relevant.

I tolkningen af disse resultater bør der tages det forbehold at elevernes regnestrategier er vurderet ud fra deres skriftlige kommunikation. Selvom der i instruktionen

blev lagt vægt på at eleverne kunne vælge at beskrive deres løsningsmetoder med tekst, tegninger eller symboler, også hvis de først løste opgaven i hovedet, så kan manglende skriftlig kommunikationskompetence have påvirket nogle elevers valg af strategier. Resultaterne vil dog stadig vise hvilke valg eleverne har truffet i denne situation. Det er desuden en ganske lille del af besvarelsene hvor eleverne ikke har kommunikeret en løsningsmetode (fx addition: 12 % opgaver i 3. klasse og 2 % i 8. klasse), hvilket indikerer at manglende kommunikationskompetencer ikke har haft større indflydelse på de overordnede resultater.

Perspektivering

Sammenholder vi resultaterne af denne undersøgelse med vores indledende blik på folkeskolens prøve efter 9. klasse og resultaterne af de fire opgaver i heltalsregning, tyder det på at det formodentlig vil være til gavn for flere elever hvis adaptiv fleksibilitet bliver reglen snarere end undtagelsen, og at eleverne (og undervisningen) i højere grad fokuserer på anvendelse af talbaserede metoder. Det er særlig interessant at de ældste elever, efter flere år i skolens matematikundervisning, i så høj grad stoler på brugen af standardalgoritmen. Dette på trods af anbefalinger i Fælles Mål om undervisning der bygger på elevernes talforståelse. Det er vores oplevelse at flere lærere og skoler i disse år har et større fokus på adaptiv fleksibilitet, men resultaterne her viser at der stadig er et stykke vej, især i de ældre klassetrin.

For at skabe en kultur i undervisningen der er rettet mod udvikling af fleksibel matematisk tankegang og adaptiv ekspertise, kan de enkelte matematiklærere og fagteams med fordel se nærmere på hvordan skolens undervisnings- og testmateriale anvendes, og ikke mindst hvordan undervisningsmaterialet er med til at understøtte udvikling af talbaserede regnestrategier, hvilke spørgsmål der stilles i undervisningen, og hvilken feedback der gives. Ofte er det små justeringer der skal til for at tilgangen til arbejdet med tal og regning ændres i retning mod adaptiv fleksibilitet.

Referencer

- Baroody, A.J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. I: A.J. Baroody & A. Dowker (red.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (s. 1-33). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2019a). *Matematik – faghæfte 2019*. https://emu.dk/sites/default/files/2020-09/GSK_Fagh%C3%A6fte_Matematik.pdf
- Børne- og Undervisningsministeriet. (2019b). *Vejledning til folkeskolens prøver i faget matematik – 9. klasse*.

- Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist*, 31(3), 175-190. <https://doi.org/10.1080/00461520.1996.9653265>
- Dowker, A. (2014). Young Children's Use of Derived Fact Strategies for Addition and Subtraction. *Frontiers in Human Neuroscience*, 7, 1-9. <https://doi.org/10.3389/fnhum.2013.00924>
- Hansen, H.C. (2011). *Moderne matematiske færdigheder fra skolestart til studiestart – et udredningsarbejde finansieret af Undervisningsministeriet 2010-2011*. https://www.ucviden.dk/files/121875011/Udredning_fra_f_rdighedsudvalget_for_matematik.pdf
- Hatano, G. (1988). Social and Motivational Bases for Mathematical Understanding. *New Directions for Child Development*, 41, 55-70. <https://doi.org/10.1002/cd.23219884105>
- Hatano, G. & Inagaki, K. (1984). Two Courses of Expertise. *Research & Clinical Center for Child Development*, 82-83(Ann Rpt), 27-36.
- Hickendorff, M. (2018). Dutch Sixth Graders' Use of Shortcut-Strategies in Solving Multidigit Arithmetic Problems. *European Journal of Psychology of Education*, 33(4), 577-594. <https://doi.org/10.1007/s10212-017-0357-6>
- Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2018). Grade-Related Differences in Strategy Use in Multidigit Division in Two Instructional Settings. *British Journal of Developmental Psychology*, 36(2), 169-187. <https://doi.org/10.1111/bjdp.12223>
- Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2019). Multi-Digit Addition, Subtraction, Multiplication, and Division Strategies. I: A. Fritz, V.G. Haase & P. Räsänen (red.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties* (s. 543-560). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_32
- Jóelsdóttir, L.B. (2023). *Essays on Adaptivity and Flexibility in Multidigit Arithmetic*. Aarhus Universitet. [https://pure.au.dk/portal/da/publications/essays-on-adaptivity-and-flexibility-in-multidigit-arithmetic\(441b0429-68a7-45e1-ab6f-04dbddacefb6\).html](https://pure.au.dk/portal/da/publications/essays-on-adaptivity-and-flexibility-in-multidigit-arithmetic(441b0429-68a7-45e1-ab6f-04dbddacefb6).html)
- Jóelsdóttir, L.B. & Andrews, P. (2023). Danish Third, Sixth and Eighth Grade Students' Strategy Adaptivity, Strategy Flexibility and Accuracy when Solving Multidigit Arithmetic Tasks. *European Journal of Psychology of Education*. <https://doi.org/10.1007/s10212-023-00786-2>
- Jóelsdóttir, L.B., Sunde, P.B. & Andrews, P. (2023). Age- and Gender-Related Differences in Danish Students' Use of Number-Based Strategies when Solving Multidigit Addition Tasks. I: P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi & E. Kónya (red.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 433-440). European Society for Research in Mathematics Education.
- Ostad, S. (1997). Developmental Differences in Addition Strategies: A Comparison of Mathematically Disabled and Mathematically Normal Children. *British Journal of Educational Psychology*, 67(3), 345-357. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1997.tb01249.x>
- Rittle-Johnson, B., Star, J.R. & Durkin, K. (2012). Developing Procedural Flexibility: Are Novices Prepared to Learn from Comparing Procedures? *British Journal of Educational Psychology*, 82(3), 436-455. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02037.x>

- Selter, C. (2001). Addition and Subtraction of Three-Digit Numbers: German Elementary Children's Success, Methods and Strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 145-173. <https://www.jstor.org/stable/3483326>
- Siegler, R.S. & Jenkins, E. (1989). *How Children Discover New Strategies*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Sunde, P.B. (2022). Adaptivitet og fleksibilitet – regnestrategier i de yngste klasser. *MONA*, 2022(2), 7-23. <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/132755>
- Sunde, P.B., De Smedt, B., Verschaffel, L. & Sunde, P. (2023). Grade One Single-Digit Addition Strategies as Predictors of Grade Four Achievement in Mathematics. *European Journal of Psychology of Education*. <https://doi.org/10.1007/s10212-023-00761-x>
- Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 29-47. <https://doi.org/10.1023/A:1020572803437>
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and Use of Shortcut-Strategies by Traditionally Schooled Children. *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 1-17. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9155-z>
- Torbeyns, J., Peters, G., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2018). Subtraction by Addition Strategy Use in Children of Varying Mathematical Achievement Level: A Choice/No-Choice Study. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 215-234. <https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.77>
- Undervisningsministeriet. (2001). *Klare mål – matematik – faghæfte 12*.
- Vanbinst, K., Ghesquière, P. & De Smedt, B. (2014). Arithmetic Strategy Development and Its Domain-Specific and Domain-General Cognitive Correlates: A Longitudinal Study in Children with Persistent Mathematical Learning Difficulties. *Research in Developmental Disabilities*, 35(11), 3001-3013. <https://doi.org/10.1016/j.ridd.2014.06.023>
- Verschaffel, L. (2023). Strategy Flexibility in Mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 115-126. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01491-6>
- Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K. & Van Dooren, W. (2007). Strategy Flexibility in Children with Low Achievement in Mathematics. *Educational and Child Psychology*, 24(2), 16-27. <https://doi.org/10.53841/bpsecp.2007.24.2.16>
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359. <https://doi.org/10.1007/BF03174765>
- Xu, L., Liu, R.D., Star, J.R., Wang, J., Liu, Y. & Zhen, R. (2017). Measures of Potential Flexibility and Practical Flexibility in Equation Solving. *Frontiers in Psychology*, 8, 1368. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01368>
- Yang, D.-C., Reyes, R.E. & Reyes, B.J. (2009). Number Sense Strategies Used by Pre-Service Teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 383-403. <https://doi.org/10.1007/s10763-007-9124-5>

English abstract

Internationally, there is a consensus that flexibility and adaptivity, i.e. knowing multiple strategies and being able to choose the most appropriate, are key elements in mathematics education. We investigated 2298 Danish 3rd, 6th and 8th grade students' use of arithmetic strategies for 3-digit addition and subtraction designed to promote use of number-based strategies such as $199 + 323$. Across grade levels, students showed low levels of adaptivity. Students rarely used number-based strategies even though they had higher accuracy than the standard algorithm. Use of the standard algorithm was highest in 8th grade, where students also used number-based strategies the least.