

# Hvordan kan du vide det? Indskolingselevers ræsonnementer og beviser



Kasper Højbjerg,  
Københavns  
Professionshøjskole



Charlotte Krog Skott,  
Professionshøjskolen  
Absalon



Ida Redder Honoré,  
Københavns  
Professionshøjskole



Mette Amalie Fischer  
Bundgaard, Aarhus  
Universitet, DPU



Steffen Overgaard,  
Københavns  
Professionshøjskole

**Abstract:** Ræsonnementer og beviser er centrale i matematikundervisningen, men vi mangler viden om hvordan der kan arbejdes med dette i en dansk indskolingskontekst. Med udgangspunkt i Stylianides' tre karakteristika for et matematisk bevis – accepterede udsagn, gyldige argumentationsformer og passende repræsentationer – undersøger vi indskolingselevers ræsonnementer og beviser når de arbejder med særligt designede ræsonnementsopgaver, i et kvalitativt interventionsstudie. Analysen viser at eleverne udvikler relativt sofistikerede ræsonnementer, og at der er progressioner i deres måder at argumentere og repræsentere på fra 1. til 3. klassetrin. Vi konkluderer at der er et stort potentiale i at arbejde målrettet med ræsonnementer og beviser i indskolingen.

## Indledning

At ræsonnere matematisk beskrives ofte som en essentiel del af matematikken: “[...] at ræsonnere matematisk er lige så afgørende for at kunne forstå og anvende matematik,

som tekstforståelse er for læsning” (Ball & Bass, 2003, s. 29, vores oversættelse). Der har de sidste 20 år været et øget fokus på at ræsonnere og bevise i læseplaner. Internationalt har fx National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) haft fokus på “reasoning and proof” i skolematematikken med Principles and Standards (2000), og i Danmark blev ræsonnementskompetencen indskrevet i Fælles Mål for alle klassetrin i grundskolen i 2009. Hermed blev arbejdet med ræsonnementer og beviser også en del af indskolingens matematikundervisning. Forskningen viser imidlertid at mange lærere og elever oplever at det er svært at arbejde med ræsonnementer (fx Boaler, 2019). Derfor gennemførte vi i efteråret 2021 et interventionsstudie for at undersøge hvordan danske indskolingselever ræsonnerer og beviser i matematikundervisningen. Nogle af de deltagende lærere udtrykte nysgerrighed, men også tvivl – for kan danske indskolingselever ræsonnere og bevise? Fx udtaler en lærer:

“Jeg er mega imponeret over hvad de fik ud af det. [...] Jeg havde godt tænkt at der er masser der nok skal finde den rigtige løsning, men om de forstår hvorfor eller hvad der er sket, det var jeg faktisk ikke helt overbevist om. Og det var der rigtig mange der gjorde, så det er jeg meget imponeret over.”

Som citatet antyder, er der et potentiale for at arbejde med ræsonnementer i de yngste klasser, men der er samtidig brug for en tydeliggørelse af hvordan dette kan forstås og gøres i praksis i undervisningen. For selvom ræsonnement er et udbredt matematikdidaktisk begreb, er det ikke forskningsmæssigt entydigt defineret, og det kan derfor være vanskeligt at gå til og vanskeligt for lærere at bruge i praksis. I artiklen ser vi ræsonnementer som både proces og produkt. Som proces er det at ræsonnere noget eleverne *gør* mens de arbejder med specifikke typer af opgaver og aktiviteter. Som produkt er ræsonnementerne det der kommer ud af elevernes arbejde, fx i form af skriftlige og mundtlige forklaringer og begrundelser. Denne artikel belyser indskolingselevs arbejde med ræsonnementer og beviser ud fra forskningsspørgsmålene:

1. Hvad gør danske indskolingselever når de ræsonnerer og beviser?
2. Hvilken progression er der i elevernes ræsonnementer fra 1. til 3. klasse?

I næste afsnit giver vi et overblik over forskning i elevræsonnementer og beviser i skolen med fokus på indskoling, hvorefter projektets design, metode og analyseramme præsenteres. I de efterfølgende analyser besvarer vi artiklens to forskningsspørgsmål ud fra udvalgte eksempler på indskolingselevs arbejde med ræsonnementer og beviser. Artiklen afsluttes med en diskussion og konkluderende pointer.



## Forskningsoverblik

Ræsonnementer og beviser er en central del af matematik: "Hvis problemløsning er 'matematikens hjerte', så er bevisets dens sjæl ... [disse to] hører uadskilleligt sammen" (Schoenfeld, 2009, s. xii, vores oversættelse). At ræsonnere og bevise kan udfylde forskellige funktioner, men til vores formål er det centralt at de begge sigter mod at skabe mening med matematiske begreber og relationer. Hvis man fx tror at noget hænger matematisk sammen på en bestemt måde, så forsøger man at finde ud af *hvorfor* det skulle være sådan – og selv hvis det viser sig at man har taget fejl, så har man lært noget om fænomenet i processen (Schoenfeld, 2009). Denne meningsskabende funktion fremhæves især i relation til undervisning på de yngste klassetrin, hvor den går godt i tråd med elevernes medfødte nysgerrighed efter at vide hvorfor ting fungerer som de gør, og deres nysgerrighed efter at forstå hvorfor ting er som de er (Stylianou et al., 2009). Ved at lære selv at kunne skabe mening i matematikken og selv at kunne afgøre om noget matematik er rigtigt eller forkert, kan elever lære at stole på egen evne til at ræsonnere (Schifter, 2009, s. 71), og de bliver således mindre afhængige af andres vurderinger, fx lærerens, lærebogens eller klassekammeraternes.

Et overvældende antal studier viser imidlertid at det er vanskeligt for elever at lære at ræsonnere og bevise, og også at det er vanskeligt for lærere at undervise i det (Stylianides, 2016). Det er fx veldokumenteret at elever i udskoling og gymnasiet har problemer med at forstå hvad et bevis er (de sætter ofte deres lid til empiriske argumenter), at forstå logikken og metoderne i bevisførelse og at forstå det matematiske sprog og den matematiske symbolik (Stylianou et al., 2009). Mange af disse problemer kan tilskrives elevers manglende muligheder for at danne mening med beviser og for at erkende bevisers forklarende natur (Stylianou et al., 2009). Forskningen i ældre elevers læring af beviser dominerer, og vi ved således kun lidt om yngre elevers læring af ræsonnement. De få eksisterende studier viser imidlertid at indskolings elever kan udvikle meningsfulde argumenter som også indeholder frø til hvad matematikere ville acceptere som formelle beviser (Schoenfeld, 2009). Studier har fx vist at yngre elever kan udvikle uformelle deduktive argumenter såsom bevis ved inspektion, give modeksemples og formulere rekursive argumenter (Maher, 2009).

Selvom yngre elever kan siges at kunne argumentere deduktivt, så forstås ræsonnement og beviser i indskoling anderledes end på de ældre klassetrin. På ældre klassetrin ses beviser typisk som en kæde af logisk sammenhængende argumenter der er formuleret formelt i et symbolholdigt sprog. Frem for at fokusere på formalitet og symbolsk notation er fokus på de yngste klassetrin ofte på at engagere elever i logiske ræsonnementer og forklaringer der giver mening i forhold til den sammenhæng de indgår i, og i forhold til elevernes faglige niveau. Der er altså tale om en bredere forståelse af beviser som en socialt konstrueret proces hvor normerne for hvad der udgør acceptable argumenter, har flydende grænser der til en vis grad afhænger af

den enkelte klasse (Stylianou et al., 2009). En sådan forståelse af ræsonnementer og beviser er fremtrædende i Stylianides' definition af et bevis, der har tre karakteristika:

1. Beviset bygger på sande udsagn der er accepteret i klassen og dermed ikke kræver yderligere argumentation (*accepterede udsagn*).
2. Beviset benytter gyldige argumentationsformer der er kendt af, eller som begrebsmæssigt ligger inden for rækkevidde af, klassens fællesskab (*argumentationsformer*).
3. Der kommunikeres i udtryks- og repræsentationsformer der er passende og kendt af, eller som begrebsmæssigt ligger inden for rækkevidde af, klassens fællesskab (*repræsentationsformer*) (Stylianides, 2016, s.13, vores oversættelse).

Med definitionen forsøger Stylianides at opnå en balance mellem matematik som disciplin og elever der er ved at lære matematik. Begreberne *sande* og *gyldige* skal således forstås i forhold til hvad der er accepteret i matematikkens verden, samtidig med at definitionen foreskriver at beviset også afhænger af hvad der er passende i forhold til – og accepteret og kendt af – klasserummets fællesskab. En styrke ved Stylianides' definition er at den kan bruges på tværs af klassetrin da de tre karakteristika skal forstås i relation til et klasserum. Fx kan et uformelt argument om at summen af to ulige tal er lige ved brug af centicubes ses som et bevis i de yngre klasser, mens det i udskolingens ville kræve et formelt argument og brug af algebraisk notation.

Flere andre studier peger ligeledes på at repræsentationer er afgørende for yngre elevers muligheder for at kunne ræsonnere og bevise. Fx foreslår Schifter (2009) et såkaldt *repræsentationsbaseret bevis* der bygger på hendes og kollegers omfattende undersøgelser af hvordan yngre elever bruger repræsentationer som et redskab til at reducere abstraktion og bygge deduktive argumenter. I et andet studie knytter Maher (2009) elevers ræsonnementsaktiviteter tæt til hvordan de bruger repræsentationer til at tænke og danne mening med matematiske idéer.

Studier peger desuden på at en klasserumskultur præget af problembehandling, kommunikation og hypotesedannelse understøtter yngre elevers udvikling af beviser og ræsonnementer (Reid & Zack, 2009). Altså en kultur hvor eleverne opfordres til at stille spørgsmål, at forstå egen og andres tænkning, at udvikle hypoteser og bygge argumenter for disse samt at tale om deres egen tænkning og sammenligne matematiske idéer (Stylianou et al., 2009). Dette skal ses i modsætning til at præsentere elever for beviser og lade dem øve sig i at gentage dem (Maher, 2009).

## Metode, design og analyseramme

Projektet "Hvordan kan du vide det?" blev udført som et samarbejde mellem Københavns Professionshøjskole og fem sjællandske folkeskoler i efteråret 2021. Projektet er

designet som et kvalitativt interventionsstudie og blev gennemført i 28 indskolingsklasser med deltagelse af 19 matematiklærere.

Inspireret af Stylianides (2016) udviklede vi tre versioner af tre forskellige ræsonnementsopgaver, hvor versionerne var målrettet hhv. 1., 2. og 3. klassetrin. De ni opgaver handlede om at ræsonnere i forhold til et begrænset antal tilfælde, og hver opgave lagde op til at eleverne efterfølgende skulle generalisere deres ræsonnement til et større antal (men ikke til en mængde af tal, såsom de naturlige tal). Eleverne kunne således løse flere af opgaverne ved systematisk at optælle alle mulighederne, hvilket er en gyldig argumentationsform i denne kontekst. Til hver opgave udviklede vi en lektionsplan og en lærervejledning. Lærervejledningerne var inspireret af NCTM's (2008) ræsonnementscyklus, og de stilladserede undervisningens organisering, bl.a. ved at lægge op til elevarbejde efterfulgt af fælles klasserumsdiskussioner.

På hver skole deltog alle projektets lærere i et indledende møde hvor opgaverne og lærervejledningerne blev introduceret, og lærerne udvalgte den opgave de ville afprøve i én undervisningslektion. En-to af artiklens forfattere tog feltnoter og videofilmede afprøvningserne, og elevprodukter blev indsamlet hvor det var muligt. Under klasserumsdiskussioner og opsamlinger var fokus for videoobservationen på lærerens interaktion med klassen, og under elevernes selvstændige arbejde blev der fokuseret på en-to grupper af elever. Hver lektion blev efterfulgt af en refleksionssamtale mellem lærer og observatør(er), og efterfølgende blev der skrevet en feltfortælling af en af observatørerne.

Et overblik over alle afprøvnings af opgaven viste at opgaven "Påklædningsproblemet" var benyttet i 14 lektioner, fordelt over 1. til 3. klasse på fire skoler. Dette gav mulighed for at undersøge elevernes arbejde med ræsonnementer og beviser på tværs af de tre klassetrin og gav os samtidig mulighed for at spore en eventuel progression. I "Påklædningsproblemet" har Tante Tut et antal forskelligfarvede hatte og frakker, og lærervejledningerne opfordrer til at iscenesætte opgaven ud fra spørgsmålene: "På hvor mange forskellige måder kan Tante Tut klæde sig på? Hvordan kan man vide at man har fundet alle de forskellige måder? I kan tegne de forskellige muligheder eller bygge dem med centicubes." Fra 1. til 3. klasse øgedes antallet af Tante Tuts hatte og frakker, og i 3. klasse lagde opgaven yderligere op til at eleverne skulle udvikle et modbevis til en påstand fra læreren.

Artiklens analyser bygger på følgende empiri fra afprøvnings af "Påklædningsproblemet":

- Videooptagelser fra 14 lektioner (fem 1. klasser, syv 2. klasser og to 3. klasser)
- Transskribering af udvalgte videosekvenser
- Feltnoter og -fortællinger
- Elevprodukter.

Empirien analyseres med udgangspunkt i Stylianides' (2016) definition af et matematisk bevis. Dette er valgt som analyseramme fordi ræsonnementer og beviser er i spil som både proces og produkt. Samtidig giver tilgangen mulighed for at analysere forskelle og progressioner mellem klassetrinnene da definitionen netop rummer en bredere forståelse af beviser, som en socialt konstrueret proces, der skal ses relativt til klassens faglige niveau.

For hvert klassetrin har en-to af artiklens forfattere lavet en overordnet analyse for at indkredse eksempler på elevræsonnementer og -beviser ud fra Stylianides' tre krav. I den forbindelse er udvalgte videosekvenser blevet transskriberet og diskuteret i forfattergruppen. På baggrund af disse diskussioner er der udvalgt tre eksempler fra hvert klassetrin som paradigmatisk cases (Flyvbjerg, 2013). Eksemplerne skal altså ses som nogle af de bedste eksempler på elevræsonnementer som i større eller mindre grad falder under Stylianides' definition af et bevis. For hvert klassetrin beskriver vi desuden hvordan eleverne generelt ræsonnerede, for også at give et mere repræsentativt billede.

## Når indskolingselever ræsonnerer

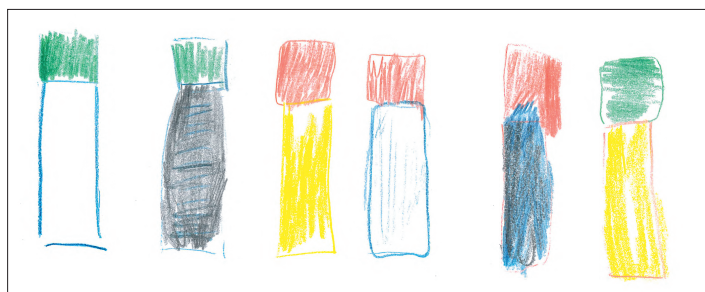
### 1. klasse

I 1. klasse arbejdes med en variant af opgaven hvor Tante Tut har to hatte og tre frakker. Efterfølgende får Tante Tut endnu en hat, og eleverne skal forsøge at generalisere deres første svar og begrunde hvor mange muligheder Tante Tut nu har.

På tværs af de fem 1.-klasser er det karakteristisk at eleverne arbejder med "Påklædningsproblemet" på en ikke-struktureret måde i begyndelsen. De bygger muligheder i centicubes eller tegner dem uden at være systematiske. De sammenligner en ny mulighed med dem de allerede har lavet, og nogle elever forsøger ved denne form for inspektion at begrunde at de har fundet alle mulighederne. Mange elever udvikler dog i løbet af lektionen en systematik for bedre at kunne overskue mulighederne. Det er kun ganske få elever der bruger systematisk optælling allerede fra starten af.

### Eksempel 1.1

En elev har tegnet de seks muligheder:

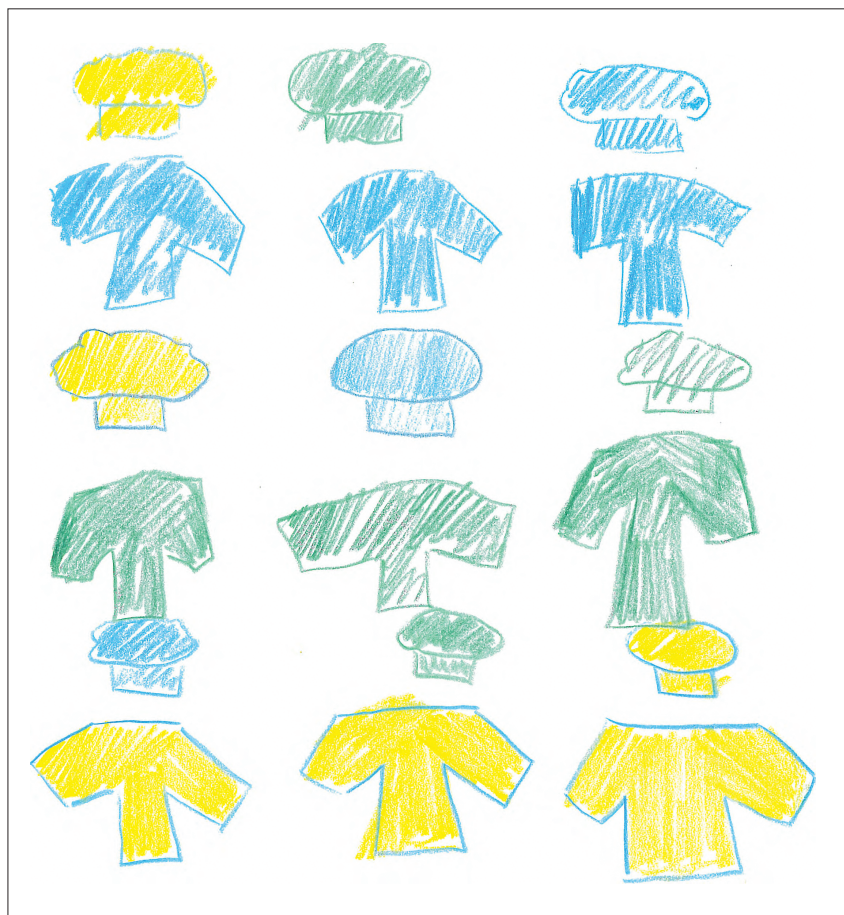


Figur 1. Elevillustration 1.1.

Eleven benytter en systematisk tilgang til at tegne frakkerne (hvid, sort, gul, hvid, sort, gul), men ikke til at sætte hattene på. Eleven forsøger efterfølgende at forklare sin systematik, men famler meget. Hun bliver ved med sige "Det er fordi der er tre ...", men kan ikke formulere sammenhængen. Til sidst udbryder hun: "Det har jeg glemt." Eleven udvikler en begyndende systematisk tilgang til opgaven, men kan i sidste ende ikke helt artikulere de tanker der ligger bag. Derfor har eleven endnu ikke udviklet et bevis ifølge Stylianides' definition.

### Eksempel 1.2

En klasse har skiftet Tante Tut ud med klassens maskot – Le Chef – og her har en elev tegnet kokkehuer og T-shirts som vist på figur 2. I stedet for at arbejde med to hatte og tre frakker arbejder denne klasse med kokkehuer og T-shirts som hver findes i tre forskellige farver.



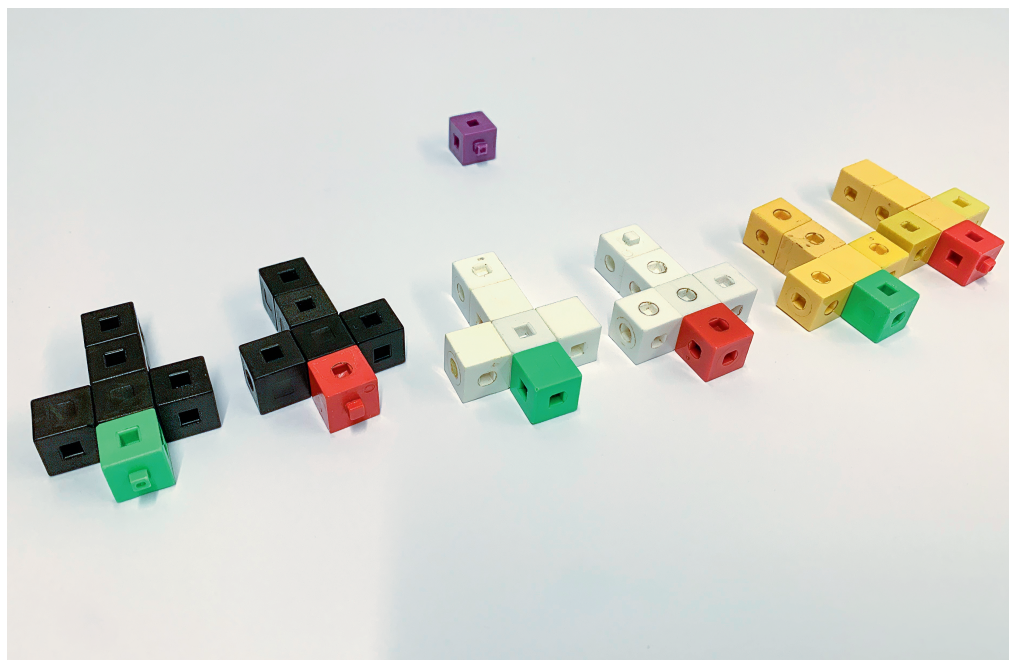
Figur 2. Elevillustration 1.2.



Læreren spørger “Hvorfor synes du at du er færdig?”, hvortil eleven svarer “Fordi jeg har gjort det i rækkefølge med de tre farver ... på bluserne [...] Jeg startede med den blå, og så satte jeg de tre farver her på [peger på kokkehue over de blå T-shirts], og så gjorde jeg det samme med grøn og gul”. Eleven bruger det accepterede udsagn om at en mulighed består af en kokkehue og en T-shirt i forskellige farver eller med samme farve. Eleven tæller systematisk alle mulighederne op ved først at tegne alle mulighederne med en blå T-shirt og dernæst dem med en grøn og en gul T-shirt, og eleven bruger samtidig mundtlige formuleringer med udgangspunkt i tegninger som er accepterede repræsentationsformer i klassen. Ifølge Stylianides’ definition har eleven altså udviklet et bevis for at det samlede antal af muligheder er ni.

### Eksempel 1.3

En elev begrundet hvordan han kan vide at der er seks muligheder: “Hun kan tage den røde hat på og så den gule og den hvide og den sorte frakke. Og det samme med den grønne hat.” Eleven har bygget følgende figurer i centicubes sammen med sin sidemakker:



Figur 3. Elevillustration 1.3.

Elevens argument minder om argumentet fra eksempel 1.2, selvom de to elever repræsenterer mulighederne forskelligt. Af samme grund opfylder elevens argument Stylianides’ definition på et bevis.

Læreren lader Tante Tut få en lilla hat også. En ny elev begrunder at der nu er ni muligheder fordi “det er tre gange tre”. Læreren spørger efter uddybning, og eleven svarer:

E: Det er fordi én hat kan passe på de tre, og den anden kan også passe på de tre, og den tredje kan også. Og det er jo det samme som 3 gange 3, og det er jo 9.

L: Det er fuldstændig rigtigt. Hvad hvis man havde 10 hatte og 4 frakker?

E: Så ville der være 40. På grund af at 4 gange ... nej, 10 gange 4, det ...

Eleven viser at han har forstået systematikken der ligger til grund for at besvare denne type af opgaver, og han benytter det til at begrunde en generalisering af opgaven. Eleven har tydeligvis indset at hver hat giver så mange muligheder som der er frakker. Når eleven skal svare på hvor mange muligheder 4 hatte og 10 frakker giver, nævner han ikke at hver hat giver 10 muligheder; i stedet giver eleven blot regnestykket “10 gange 4”.

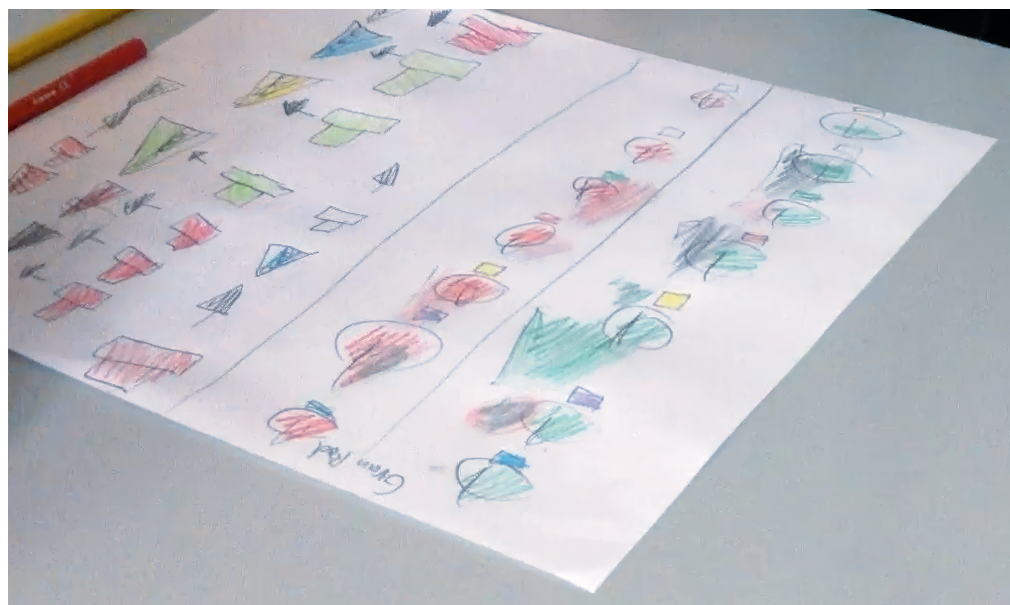
## 2. klasse

I 2. klasse har Tante Tut to hatte og syv frakker. I forlængelse heraf skal eleverne begrunde antal muligheder hvis Tante Tut får én hat mere.

I de syv 2.-klasser arbejder mange elever med en systematik fra begyndelsen, mens andre indser et behov for systematik undervejs i deres undersøgelse. Klasserne har adgang til forskellige repræsentationer. Nogle har både centicubes og farveblyanter, nogle har yderligere et papir med 24 ufarvede illustrationer af Tante Tut, og andre et ark hvorpå der er tegnet to hatte og syv frakker. Alligevel udvikler mange elever deres egen repræsentation ved at tegne hattene og frakkerne så de ligner, eller ved at tegne en abstraktion af dem med brug af farver. Nogle elever supplerer desuden farverne med bogstaver. Eleverne inddrager hverdagsreferencer som accepterede udsagn i deres argumentation, og ofte bruger de et komprimeret sprog i deres argumentation.

### Eksempel 2.1

To elever arbejder systematisk med opgaven. De deler det papir som de begge tegner på, men de tegner stadig hver deres løsning. Den første elev (til højre i figur 4) tegner først to opdelt rækker med syv grønne og syv røde hatte, hvorefter hun tilføjer en frakke som et lille farvet felt under hver hat.



Figur 4. Elevillustration 2.1.

Læreren spørger til antal muligheder, og de to elever svarer samstemmende: "Vi tror det er 14." Læreren svarer: "Her skal vi vide det, og hvordan ved I det?" Den ene elev peger på tavlen hvor farverne er skrevet op: "Hun kan have rød på grøn, gul, sort, hvid, rød, blå og lilla." Læreren samler op: "Så hvor mange måder er det?", hvortil eleven svarer at det er 7. Herefter fortsætter eleven nu med grøn hat: "Og hvis man tager grøn på grøn, gul, sort, hvid, rød, blå og lilla," hvortil læreren igen spørger til antal muligheder, og begge elever svarer 14. Elevernes systematiske optælling understøttes af accepterede udsagn om at antallet af muligheder med grøn hat og antallet af muligheder med rød hat skal adderes. Hermed giver eleverne et bevis i Stylianides' forstand fordi de tre krav er opfyldt.

### Eksempel 2.2

I en klasse siger læreren: "Så står Tante Tut nede i tøjbutikken, og så kan hun ikke finde ud af, skal jeg købe en frakke mere, eller skal jeg købe en hat mere, for at have flest mulige muligheder ... for at jeg har flest forskellige måder at tage min frakke og hat på? Er det smartest hvis jeg køber en hat mere eller en frakke mere?" En elev svarer og begrunder: "En hat ... øhh, for hvis man tager fx en gul, så kan man ikke sætte den sammen med de andre, altså hvis man vælger ... altså sådan hvis man vælger en frakke, så kan man ikke sætte den sammen med de andre frakker." Eleven bruger et accepteret udsagn om at frakker kun kan kombineres med hatte, til at ræsonnere sig frem til at det må være en hat.



### Eksempel 2.3

En gruppe på fem elever får udleveret et ark med syv frakker og to hatte, alle i forskellige farver. En elev peger først på en frakke og så på den røde hat, så en anden frakke og igen den røde hat. Hun fortsætter til alle mulige par med den pågældende hat er identificeret, hvorefter hun siger "prøv at se, vi skal bare se aaaallesammen, for det var bare hvor mange." Det er dog ikke alle i gruppen der accepterer denne argumentationsform, og efter en diskussion om andre måder at finde ud af det på beslutter to elever at lave deres egen repræsentation. Først tegnes 14 frakker og så to hatte. En anden elev forstår ikke hvorfor de har tegnet 14 frakker når der kun er syv i opgaven. Den ene forklarer: "Det er fordi når der er syv frakker, så skal hver hat jo have syv frakker. Den her skal have syv, og den her skal have syv [peger på hver hat], og så giver det 14." En elev understøtter argumentet ved at henvise til en hverdagssituation: "[...] det er én [frakke] om dagen – men hun har 14 dage – så har hun den på to dage [peger på en frakke], en til en grøn hat og en til en rød hat." En anden elev foreslår at dele de 14 dage i to uger, og tegner figur 5, mens den første elev uddyber: "Ja, for hun tager den samme frakke på i den uge og den uge, men så er der til gengæld to forskellige hatte på." Selvom en elev er udfordret i forhold til at forstå argumentet, så er det dog begrebsmæssigt inden for rækkevidde for gruppen da de andre elever er i stand til at forklare det. Gruppen udvikler derfor et bevis der opfylder Stylianides' tre krav.



Figur 5. Elevillustration 2.3.

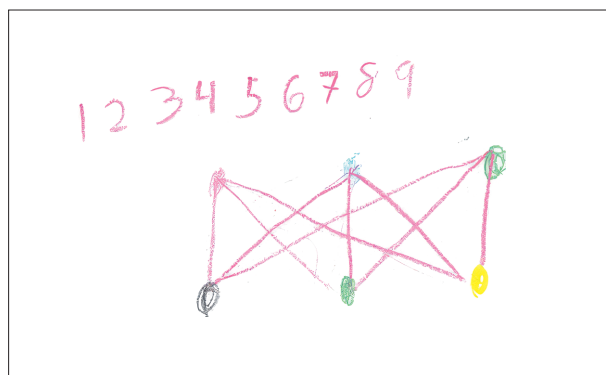
### 3. klasse

I 3. klasse har Tante Tut tre hatte og tre frakker. Efter at have arbejdet med dette problem skal eleverne forholde sig til en påstand fra læreren om at Tante Tut vil have 18 muligheder for at klæde sig på hvis hun får yderligere tre tasker. Eleverne skal i udgangspunktet ikke finde det rigtige antal, men tage stilling til lærerens påstand.

I de to 3.-klasser får eleverne stillet farveblyanter og papir til rådighed, og de skal dermed selv lave hensigtsmæssige repræsentationer af problemstillingen. Det er kendetegnende for elevernes repræsentationer at alle elever, enten fra begyndelsen eller efter kort tid, laver abstrakte gengivelser af hatte, frakker og tasker i form af prikker eller streger. De fleste elever indbygger en systematik i deres repræsentation som gør det lettere for dem at begrunde antallet af muligheder. Nogle elever er hurtige til at finde et (rigtigt) resultat af opgaven, men skal støttes i at lave et egentligt bevis.

#### Eksempel 3.1

To elever repræsenterer problemstillingen ved at tegne tre prikker i samme farve som hattene øverst på papiret og tre prikker nedenunder i samme farver som frakkerne. En elev anvender repræsentationen til at lave en systematisk optælling af antal muligheder. Hun tegner streger fra første prik (hat) til hver af de tre prikker (frakker) og tæller "1, 2, 3". Derefter fra den næste prik til hver af frakkerne, "1, 2, 3", og til sidst fra den tredje prik til hver af de tre frakker, "1, 2, 3". Eleven har identificeret et mønster og konkluderer spørgende og stadig lidt usikkert: "Så er der 9 muligheder. Kan man gøre sådan?"

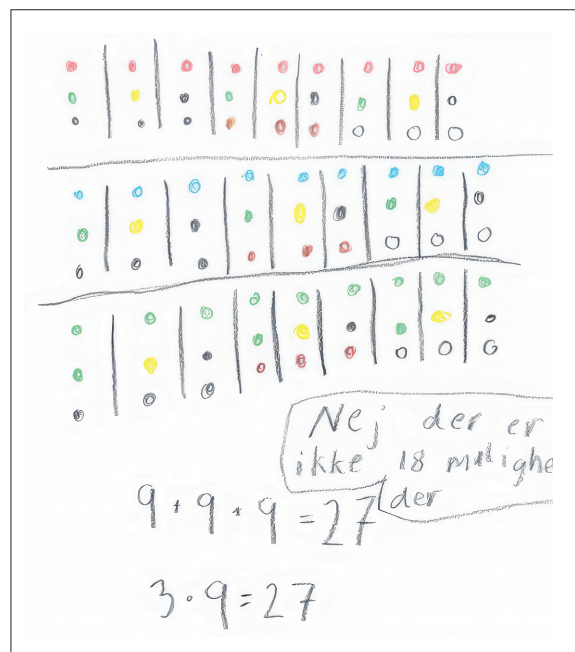


Figur 6. Elevillustration 3.1.

Eleven laver et matematisk bevis idet det opfylder Stylianides' tre krav. Implicit bruger hun sande udsagn som er accepteret af klassen. De er tæt koblet til opgavens kontekst, fx at til én hat kan der kobles tre frakker. Hun argumenterer ud fra en systematisk optælling som er accepteret som en gyldig argumentationsform i klassen. Det samme gælder for hendes repræsentationsform.

### Eksempel 3.2

To elever arbejder på at afgøre om læreren har ret i at Tante Tut har 18 muligheder med tre hatte, tre frakker og tre tasker. De vælger at tegne alle mulighederne op.



Figur 7. Elevillustration 3.2.

Efter de har tegnet den første række med rød frakke, spørger læreren ind til deres arbejde. De siger: "Vi tror det er 27. Vi har ikke lavet det færdigt, vi har kun lavet det til rød." Det virker til at eleverne er på vej til at lave et bevis i Stylianides' forstand, men de er stadig lidt usikre. Da de har lavet hele optællingen, laver de to regneudtryk som viser en måde at beregne resultatet på. De to elever er nu selv overbeviste om svaret, hvilket peger på at udviklingen af ræsonnementet har haft meningsskabende betydning for eleverne.

### Eksempel 3.3

I en classesamtale presser læreren eleverne ved ikke at acceptere deres påstande som beviser, hvilket er med til at skærpe elevernes argumentation. Læreren siger bl.a.: "Jeg har jo ikke været nede og kontrollere om det er rigtigt, men indtil videre har I ikke helt overbevist mig med ord." Det afføder en begrundelse fra en elev: "Først troede jeg også at der er 18, men det er der ikke, for der er 27. Det er fordi man kan lægge en hvid taske til alle de 9 vi havde før, du kan også lægge en brun til alle de 9 fra før, og en sort taske. Og så har du 3 gange 9."



Figur 8. Elevillustration 3.3.

Læreren accepterer begrundelsen som bygger på en accepteret sandhed om at der er 9 muligheder i løsningen fra før. Der anvendes systematisk optælling som argumentationsform, og ræsonnementet præsenteres for klassen i en acceptabel mundtlig udtryksform som er understøttet af en tegning (figur 8) på elevens papir. Altså er Stylianides' tre krav opfyldt.

## Progressionen i indskolingselevernes ræsonnementer

Vi besvarer artiklens andet forskningsspørgsmål ved at analysere progressionen i Stylianides' tre krav til et bevis på tværs af de tre klassetrin.

På alle klassetrin bruger eleverne accepterede udsagn i deres arbejde hvoraf nogle ikke nødvendigvis er direkte synlige. En del af disse accepterede udsagn eksisterer allerede i klassefælleskabet, mens andre bliver udviklet i løbet af lektionen. Der er således på alle klassetrin et behov for at afklare og acceptere opgavens præmisser. Fx spørger en elev efter introduktionen om man også kan have to hatte på samtidig, hvilket bliver afklaret så alle elevers ræsonnementer kan bygge på det accepterede udsagn at en mulighed består af én frakke og én hat. Det er indbygget i alle tre versioner af opgaven at eleverne skal generalisere deres fund til større tal. I 1. og 2. klasse får Tante Tut en hat mere, og i 3. klasse skal eleverne forholde sig til lærerens påstand om et bestemt antal muligheder. På alle klassetrin ses eksempler på at eleverne indtager tidligere accepterede metoder og resultater i deres videre ræsonnementer, fx eksempel 1.3, 2.2 og 3.3.

I alle tre versioner af opgaven er systematisk optælling en gyldig argumentationsform.

På 1. klassetrin begynder eleverne typisk med en udtømmende tilgang ved løbende at sammenligne en ny mulighed med dem de allerede har fundet. Når de ikke kan finde flere, konkluderer de at alle muligheder er fundet. Denne argumentationsform er i udgangspunktet ikke gyldig, men den kan initiere en form for systematik og dermed være et første skridt på vejen mod en gyldig argumentationsform. Når eleverne skal generalisere til større antal, benytter de også andre gyldige argumentationsformer. I eksempel 1.3 ser vi fx en 1. klasseelev der bruger det kombinatoriske *både-og*-princip.

Noget tilsvarende sker i 2. klasse i eksempel 2.1 hvor eleverne slutter at én ny hat giver det samme antal muligheder som hver hat gjorde før det. I 3. klasse møder eleverne en anderledes udfordring i form af lærerens påstand. Flertallet af eleverne udvider deres løsning af opgaven fra før for at finde svaret på det nye antal muligheder og sammenligner det dernæst med de påståede 18 muligheder. Eleverne modbeviser altså lærerens påstand ved at finde det korrekte antal (27), hvilket er en gyldig argumentationsform. Dette kan fx ses i eksempel 3.2 og 3.3. Der ses altså en progression fra mere uformelle argumentationsformer til mere formelle og deduktive argumentationsformer på tværs af de tre klassetrin.

Fra 1. til 3. klasse ses en tydelig progression i de repræsentationsformer som eleverne tegner eller bygger. I 1. klasse laver eleverne mere virkelighedstro repræsentationer af opgaven, hvor de er optaget af at repræsentationerne ligner en hat eller frakke. Fx ses det på elevillustration 1.3 at eleverne har bygget Tante Tuts krop. I 3. klasse benyttes i højere grad mere abstrakte repræsentationer som fx prikkerne i elevillustration 3.2. Eleverne i 2. klasse blander abstrakte og virkelighedstro repræsentationsformer, fx i eksempel 2.1 hvor hattene repræsenteres ved noget der ligner en hat, mens frakkerne repræsenteres ved en farvet firkant. På alle klassetrin ses eksempler på at eleverne repræsenterer alle mulighederne som tegnede objekter. I 2. og 3. klasse ses også løsninger hvor mulighederne ikke er repræsenteret direkte som tegnede objekter, men fx som forbindelseslinjer (eksempel 3.1) eller ved at eleverne peger mellem de tegnede objekter (eksempel 2.3). En tilsvarende form for abstraktion ses også i 1. klasse hvor den er koblet til en mundtlig repræsentation som i eksempel 1.3. Fra 1. til 3. klasse ses også et skift i repræsentationerne af beregninger, som i 1. klasse er mundtlige (fx eksempel 1.1), men som i 3. klasse også bliver skriftlige (fx eksempel 3.2 og 3.3).

Udviklingen i og brugen af repræsentationsformer sker på forskellige tidspunkter på de tre klassetrin og er ofte tæt koblet til systematisk optælling som argumentationsform. I 1. klasse bruger eleverne ofte repræsentationer til at oversætte problemet, men de bruger ikke nødvendigvis repræsentationerne til at understøtte et bevis gennem en systematisk optælling. En tegnet ikke-systematisk repræsentation kan besværliggøre oversættelsen til et sprogligt formuleret argument som det ses i eksempel 1.1. Her er centicubes som repræsentationsform mere fleksibel. For selvom eleverne ikke har bygget Tante Tuts forskellige påklædningsmuligheder ud fra et systematisk princip, så kan eleverne senere lægge dem i en systematisk rækkefølge og bruge rækkefølgen som støtte når de skal formulere sig mundtligt (eksempel 1.3). I 2. klasse forsøger mange elever at angribe opgaven systematisk i form af gestikulerende, mundtlige og visuelle repræsentationsformer. I eksempel 2.3 ses hvordan eleverne starter med en sproglig og gestikulerende systematik, men de har svært ved at oversætte dette til en systematisk visuel repræsentation. Eleverne bruger en hverdagskontekst til at

udvikle en visuel og systematisk repræsentation hvor de udnytter at de ved at der er syv dage på en uge. I 2. klasse er de visuelle repræsentationsformer altså ikke nødvendigvis systematiske fra begyndelsen, men bliver det ofte undervejs i elevernes undersøgelser. I 3. klasse arbejder eleverne bevidst systematisk med en eller flere tegnede repræsentationer fra begyndelsen af lektionen. De bruger ofte repræsentationen som en bekræftelse på deres svar, som i eksempel 3.2, og som en aktiv del af deres argumentation, som i eksempel 3.1.

Analysen peger altså på en klar progression i hvordan eleverne kobler deres argumenter til repræsentationerne, herunder hvordan de bruger repræsentationerne til at understøtte deres systematiske optællinger. Samtidig ses også en progression mod mere abstrakte repræsentationsformer på 2. og særligt 3. klassetrin. På 1. klassetrin er elevernes brug af repræsentationsformen afgørende for deres muligheder for at udvikle et argument baseret på systematisk optælling. Elevernes brug af forskellige repræsentationsformer er også influeret af hvad læreren stiller til rådighed, men overordnet set bruges både sproglige, gestikulerende og visuelle repræsentationsformer på alle klassetrin.

## Diskussion

Gennem vores interventionsstudie har vi undersøgt hvordan et lille udsnit af danske indskolingselever ræsonnerer og beviser, og hvilke progressioner der kan ses fra 1. til 3. klassetrin når eleverne arbejder med særligt designede ræsonnementsopgaver. Vi diskuterer nu disse opgaver og relaterer projektets resultater og erfaringer til forskning på området.

Et særkende ved vores projekt er at de opgaver vi udviklede, fokuserede på at bevise flere, men stadig et begrænset antal tilfælde (jf. "Påklædningsproblemet"). Opgaverne kunne også have fokuseret på at bevise et enkelt tilfælde, fx at det sidste ciffer i  $5^4$  er 5 (Stylianides, 2016). Fokus var altså ikke på at bevise det generelle tilfælde, som det typisk er på de ældre klassetrin. I en dansk sammenhæng er det nyt at koble ræsonnement og beviser til enkelttilfælde og et begrænset antal tilfælde. Vores og andre studier (Stylianides, 2016; Maher, 2009) tyder imidlertid på at der er et potentiale heri, særligt hvis indskolingseleverne skal kunne opleve aktiviteten som meningsfyldt, og hvis alle elever skal kunne tilgå emnet. Ligesom i mange andre lande (Stylianides, 2016) mangler der dog gode ræsonnementsopgaver af denne type i Danmark (Gissel et al., 2019; Larsen & Lindhardt, 2019).

I projektet kunne vi se at mange elever var vant til at søge lærerens eksterne validering af deres hypoteser og resultater; de var altså ikke vant til at overbevise sig selv eller hinanden. For at elever kan lære at tro på egen tænkning og at skabe mening i det matematiske indhold gennem ræsonnementer, er det centralt at læreren ikke (altid) anerkender eleverne ved at validere deres resultater, men bruger disse resul-



tater som udgangspunkt for at hjælpe eleverne med at overbevise sig selv gennem argumentation. Studier i yngre elevers ræsonnementer og beviser peger også på at dette er en hensigtsmæssig tilgang (se fx Schifter, 2009). Vores studie peger desuden på at arbejdet med ræsonnementer i indskoling i første omgang bør handle om at elever validerer egne og andre elevers hypoteser og resultater, bl.a. i klasserumsdiskussioner. Det er et skridt på vejen til at udvikle matematisk selvsikkerhed, og beviser kan derved blive "et redskab til elevers meningsskabelse i matematik" (Stylianides, 2016, s. 31, vores oversættelse).

For at støtte eleverne i at udvikle ræsonnementer skal læreren have elevernes ræsonnementer som centralt omdrejningspunkt for undervisningen. Projektets og artiklens titel, "Hvordan kan du vide det?", er et spørgsmål som de deltagende lærere blev vejledt til at stille eleverne både i iscenesættelsen af aktiviteten, i dialogen med eleverne og i de fælles opsamlings. Spørgsmålet opfordrer nemlig eleverne til at begrunde, ikke kun *hvordan* de er kommet frem til et resultat, men *hvorfor* deres resultat, hypotese eller metode må være rigtig. Spørgsmålet er med til at fokusere på kernen i matematisk tænkning og opbygningen af matematisk viden. Langt de fleste af de deltagende lærere stillede spørgsmålet flere gange i en lektion, men at kunne stille spørgsmålet på varierende måder og blive ved med at stille det er ikke ligetil. For at forstå hvad det kræver af lærerne, har vi brug for mere viden og flere erfaringer end vores begrænsede intervention gav mulighed for at opnå. At bruge spørgsmålet på udfoldede måder viste sig i nogle tilfælde også vanskeligt hvis klassens kultur overvejende var fokuseret på at levere de rigtige svar. Vores studie peger således i samme retning som andre studier der finder at en klasserumskultur præget af problembehandling, kommunikation og hypotesedannelse er afgørende for at kunne støtte elevers udvikling af ræsonnement og beviser (Reid & Zack, 2009; Stylianou et al., 2009).

Repræsentationer spiller en helt afgørende rolle når eleverne skal lære at ræsonnere (Maher, 2009; Schifter, 2009; Stylianides, 2016). Elevernes adgang til matematikken er gennem repræsentationer som har til hensigt at reducere abstraktionen i matematikken. I projektet brugte eleverne forskellige repræsentationer. Nogle byggede hatte og frakker af centicubes, nogle tegnede flotte, vellignende hatte og frakker, andre tegnede prikker eller streger, og nogle elever brugte til sidst en symbolsk notation. Fælles for elevernes brug af repræsentationer var at de understøttede deres tænkning og argumentation, fx i eksempel 1.2 og 1.3 hvor eleverne lavede tegninger der understøttede en systematisk optælling, og i eksempel 2.3 hvor en elev tilføjede uger på deres tegning og dermed lavede en forbindelse mellem deres repræsentation og hverdagssituationer. Repræsentationerne er også et centralt redskab når eleverne skal kommunikere til andre om deres ræsonnementer og beviser. Det understøtter formidlingen af et bevis så elevernes kommunikation bliver mere præcis, idet den

mundtlige formidling understøttes af handling og illustration. Samtidig hjælper det klassekammeraterne med at holde fokus og giver dem mulighed for at gå tilbage og spørge mere konkret ind til delelementer i beviset. På den ene side viser analysen at repræsentationer var et vigtigt tænke- og kommunikationsredskab for eleverne, og at det var afgørende at de var velvalgte og rummede muligheder for at eleverne kunne gøre dem til deres egne. På den anden side så vi også nødvendigheden af at læreren støtter eleverne i at udvikle dem til mere hensigtsmæssige og konventionelle repræsentationer. Et eksempel er 3.1 hvor to elever har lavet en prik-repræsentation med streger imellem der viser antallet af muligheder. Repræsentationen minder meget om et traditionelt tælletræ, og med støtte til udvikling af repræsentationen i den retning ville eleverne kunne udvikle en generel repræsentation til løsning af denne type opgaver. Et andet eksempel er at repræsentationerne ofte gik tabt i de fælles diskussioner i de deltagende klasser, idet formatet ofte var en klassesamtale hvor eleverne rent mundtlig fortalte klassen hvordan de havde tænkt og argumenteret. For de elever der ikke selv var kommet i mål med eget ræsonnement, kunne det være meget svært at følge de andres ræsonnementer uden de understøttende repræsentationer.

## Konklusion

Vores analyser viser hvordan danske indskolings elever kan ræsonnere og bevise når de arbejder med særligt designede ræsonnementsopgaver. Allerede i 1. klasse udviklede eleverne uformelle deduktive beviser ved systematisk optælling, og i 2. og 3. klasse begyndte nogle elever at formulere matematiske argumenter baseret på både-og-princippet for kombinatorik og benytte modbeviser. På alle tre klassetrin så vi elever som udviklede relativt sofistikerede ræsonnementer og beviser. Vi fandt også progression på tværs af de tre klassetrin, særligt i forhold til argumentationsformer og repræsentationsformer og koblingen mellem de to. Vi så ikke en tydelig progression i antallet eller typen af accepterede udsagn.

Disse resultater skal ses i lyset af at ingen af de deltagende klasser, ifølge deres lærere, var vant til at arbejde med ræsonnement og beviser – for hovedparten af klasserne var dette første gang – og at lærerne kun blev støttet ganske lidt i projektet i form af korte mundtlige introduktioner og lærervejledninger. Det peger samlet på at der er et stort potentiale for at arbejde målrettet med matematiske beviser og ræsonnementer i danske indskolingsklasser, og at selv små indsatser kan være frugtbare.

## Referencer

- Ball, D.L. & Bass, H. (2003). Making Mathematics Reasonable in School. I: J. Kilpatrick, W.G. Martin & D. Schifter (red.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 27-44). National Council of Teachers of Mathematics.
- Boaler, J. (2019). Prove It to Me! *Mathematics Teaching in the Middle School*, 24(7), 422-429. <https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.24.7.0422>
- Flyvbjerg, B. (2013). Fem misforståelser om casestudiet. I: S. Brinkmann & L. Tanggaard (red.), *Kvalitative metoder – en grundbog* (1. udgave, 5. oplag, s. 463-487). Hans Reitzels Forlag.
- Gissel, S.T., Hjelmberg, M., Kristensen, B.T. & Larsen, D.M. (2019). Kompetencedækning i analoge matematiksystemer til mellemtrinnet. *MONA*, 2019(3), 7-27. <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/115580>
- Larsen, D.M. & Lindhardt, B. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematikundervisningen på mellemtrinnet. *MONA*, 2019(1), 7-21. <https://tidsskrift.dk/mona/article/view/112811>
- Maher, C.A. (2009). Children's Reasoning: Discovering the Idea of Mathematical Proof. I: D.A. Stylianau, M.L. Blanton & E.J. Knuth (red.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 Perspective* (s. 120-132). Routledge.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM. (2008). *Navigating through Reasoning and Proof in Grades 9-12*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Reid, D.A. & Zack, V. (2009). Aspects of Teaching Proving in Upper Elementary School. I: D.A. Stylianau, M.L. Blanton & E.J. Knuth (red.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 Perspective* (s. 133-151). Routledge.
- Schifter, D. (2009). Representation-Based Proof in Elementary Grades. I: D.A. Stylianau, M.L. Blanton & E.J. Knuth (red.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 Perspective* (s. 71-86). Routledge.
- Schoenfeld, A.H. (2009). Series Editor's Foreword: The Soul of Mathematics. I: D.A. Stylianau, M.L. Blanton & E.J. Knuth (red.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 Perspective* (s. xii-xvi). Routledge.
- Stylianides, A.J. (2016). *Proving in the Elementary Classroom*. Oxford University Press.
- Stylianou, D.A., Blanton, M.L. & Knuth, E.J. (red.). (2009). *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 Perspective*. Routledge.

## English abstract

*Reasoning and proofs are central in mathematics education, but we lack knowledge of how this can be addressed in the context of Danish primary education. Drawing on Stylianides' three components of a proof – accepted statements, valid argumentation, and appropriate representations – we explore how primary school students engage in specially designed reasoning tasks in a qualitative intervention study. Our analysis reveals that students can develop relatively sophisticated proofs, with discernible progressions in their methods of argumentation and representation from 1<sup>st</sup> to 3<sup>rd</sup> grade. We conclude that there is a significant potential in purposefully integrating reasoning and proofs in primary school education.*