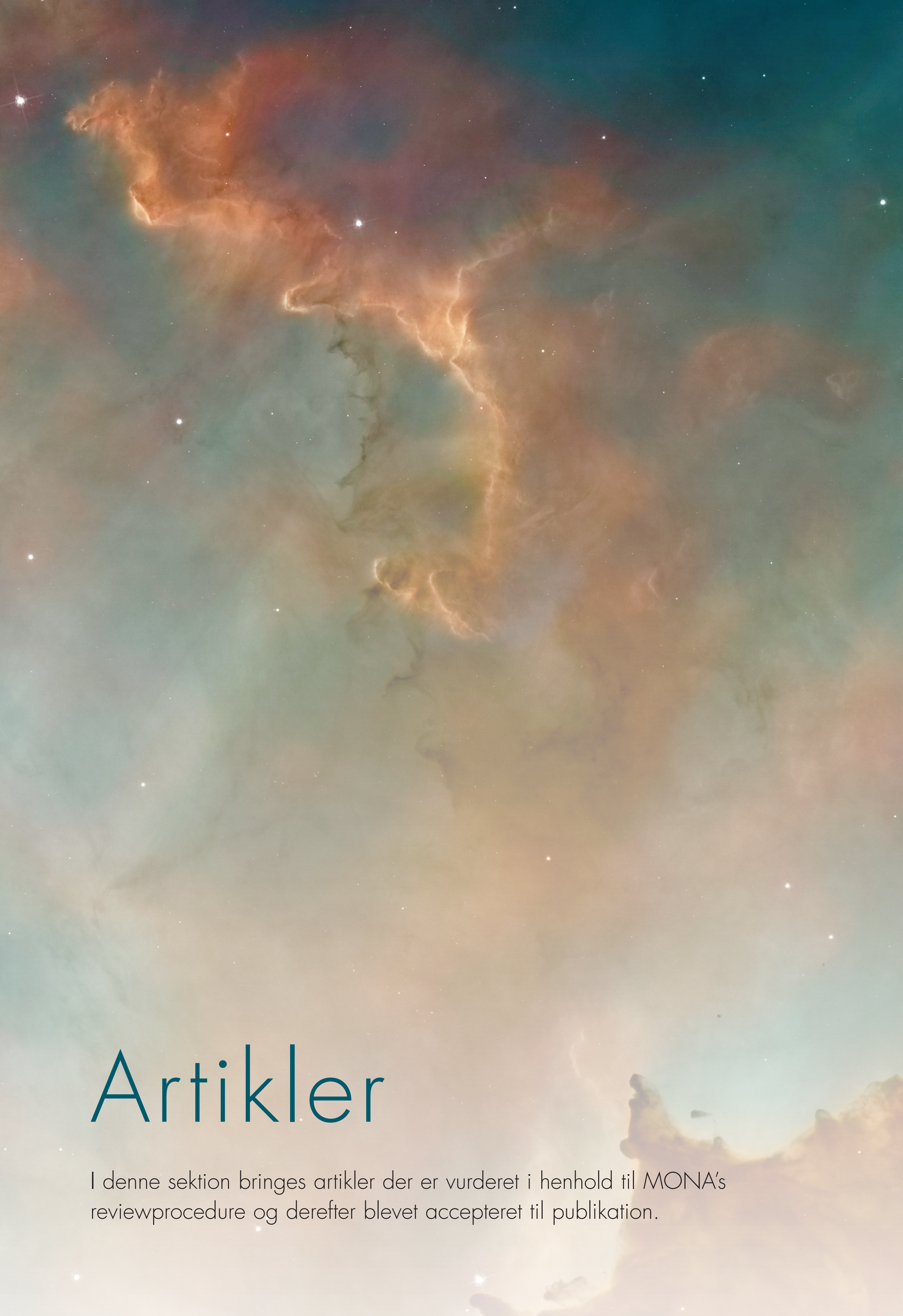


Artikler

I denne sektion bringes artikler der er vurderet i henhold til MONA's reviewprocedure og derefter blevet accepteret til publikation.

Forståelse af ækvivalente brøker


Pernille Ladegaard Pedersen, VIA University College


Mette Bjerre, VIA University College

Abstract: *Hvordan kan vi støtte elevernes brøkforståelse og brøkregning? Artiklen er en indføring i det didaktiske problemfelt ækvivalens af brøker og brøkregning. Der præsenteres en teoretisk matematisk analyse af to forståelser af ækvivalens, som kaldes enhedsækvivalens og proportional ækvivalens. Vi vil analysere a) hvordan de to forskellige forståelser adskiller sig fra hinanden, og b) hvordan de optræder forskelligt inden for tre regnearter: addition, subtraktion og multiplikation. I denne bearbejdning og udvidelse af en større engelsk artikel af samme forfattere argumenterer vi for at et større kendskab til ækvivalens kan være essentielt for at udvikle fleksible regnestrategier inden for brøkregning.*

Hvorfor arbejde med brøker?

Brøker er svært. De fleste af os kender formentlig en del børn og voksne som har det sådan. International forskning bekræfter at mange elever har vanskeligt ved at udvikle deres forståelse af brøker (Torbeyns et al., 2015), og vanskelighederne har vist sig at være konsistente gennem skolesystemet (Fazio et al., 2016; Schneider & Siegler, 2010). Desværre har forskningen også påvist at brøker er vanskelige for elever at lære at forstå (Tian & Siegler, 2017). Studier har desuden vist at brøker er et centralt emne i elevernes matematiske udvikling, da elever der ikke får udvidet deres talbegreb, stagnerer (Siegler et al., 2012; Siegler et al., 2013; Siegler & Pyke, 2013).

Forståelse af brøker er helt central for det eleverne lærer i grundskolen, da det har stor betydning for deres videre matematiske udvikling; også når det gælder mere kompliceret matematik (Bailey et al. 2012; Booth & Newton, 2012; Siegler et al., 2012; Siegler et al., 2013) som fx algebra (Bailey et al., 2012). Særligt har mange elever svært ved at konstruere og identificere ækvivalente brøker (Behr et al., 1984; Kamii & Clark, 1995; Wong, 2010).

Også i dansk kontekst er det velkendt at elever synes brøker er svære. Fx viste afgangsprøven uden hjælpemidler fra 2019 at blot 42 procent kunne svare rigtigt på opgaven "Find brøken, som lagt til $\frac{1}{3}$ giver $\frac{5}{6}$" (Winsløw, 2019, s. 1) – men hvorfor har eleverne så svært ved at forstå brøker?

Mange af disse vanskeligheder skyldes at eleverne bruger de regneregler og forståelser de bruger ved heltal, men som ikke virker ved brøker. Vi kalder det heltalsdistraktorer; på engelsk whole number bias eller natural number bias (fx Ni & Zhou, 2005; Van Hoof et al., 2013). En heltalsdistraktor er en uhensigtsmæssig overførsel af deres viden om de naturlige tal til de rationale tal, fx når eleverne intuitivt vurderer $\frac{1}{4}$ til at være større end $\frac{1}{3}$, da 4 er større end 3.

En anden knap så kendt form for heltalsdistraktor er knyttet til ækvivalensbegrebet (Pedersen, 2021), når eleven overfører sin viden fra de naturlige tal om at ethvert tal repræsenterer en unik størrelse. Fx står 3 for et præcist antal, og 4 står for et andet antal. Derfor giver det ikke umiddelbart mening at $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Tanken er således at udtrykkene er forskellige og derfor ikke kan repræsentere den samme størrelse. Det er en forhindring og kan være med til at forklare hvorfor mange elever har en tendens til at bruge en indøvet standardalgoritme når de arbejder med at finde fællesnævneren, uden forståelse for hvorfor algoritmen virker (se også Ni, 2001; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Wong & Evans, 2007).

Der er selvfølgelig mange forskellige faktorer der spiller ind, når man skal forklare hvorfor brøkbegrebet er svært – det handler ikke blot om forståelsen af ækvivalens (Ni, 2001; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Van Hoof et al., 2013).

Ækvivalens er dog et centralt begreb at forstå når der skal opbygges en fleksibel sammenhængende talforståelse, som også inkluderer rationale tal. I dansk kontekst har Pedersen og Sundes (2019) forskning vist at danske 4.-klasseselever i slutningen af skoleåret havde svært ved at sammenligne to ækvivalente brøker. Studiet viste at ca. halvdelen af de elever der kunne karakteriseres som værende på eller over gennemsnittet, havde svært ved at sammenligne $\frac{1}{4}$ og $\frac{2}{8}$ i slutningen af 4. klasse – og dette mønster gentog sig i andre senere datasæt fra 5. klasse. En opgave som $\frac{5}{11}$ sammenlignet med $\frac{3}{5}$ kunne flere svare korrekt på. Mønsteret kom tilsvarende frem i opgaven med at sammenligne $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{4}$. Ca. 95 procent af fejlene kunne forklares med at eleverne havde brugt deres viden om heltal forkert og overført den til brøker; altså heltalsdistraktor. Primært fordi de troede at $\frac{2}{4}$ var større end $\frac{1}{2}$. Dette skyldtes måske at tallene i tælleren og nævneren var større. Forståelsen af at $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, altså forståelsen af hvornår brøker er ækvivalente, synes derfor at være svært for mange danske elever.

Vi, forfatterne til denne artikel, har udgivet en dybdegående analyse af ækvivalensbegrebet for brøker ved hjælp af Kierens teoretiske begrebsramme (1976), som ligger til grund for indeværende artikel. I artiklen giver vi først en kort introduktion til de to forståelser af ækvivalens, defineret i Pedersen & Bjerre (2021), hvorefter vi forklarer og uddyber hvordan forståelserne af ækvivalens optræder og kan bruges når eleverne regner med brøker.

Introduktion til ækvivalens

Det er svært at forstå at to forskellige brøker som $\frac{3}{2}$ og $\frac{27}{18}$ repræsenterer det samme tal.

For at forstå ækvivalens kan vi tage afsæt i en del-helhedsforståelse (Kieren, 1976). Her ses brøker som en del af en helhed, fx er en fjerdedel helt konkret en del af en helhed delt i fire lige store dele. Her vil en halv tærte være det samme som to fjerdedele tærter, hvis tærterne er lige store og delt i lige store stykker. På samme måde er $\frac{3}{2}$ liter mælk det samme som seks kvarte liter mælk, da enheden/helheden er 1 liter.

I eksemplet med tærten er det intuitivt at se at de to brøker repræsenterer den samme størrelse. Ofte er denne form for arealmodel blevet fremhævet for at elever kan vurdere og estimere intuitivt at de to brøker er lige store (Kamii & Clark, 1995). En elev forklarede i et kvalitativt interview udført i forbindelse med Pedersens ph.d. (2021) at det er logisk:

> "Jeg kan tage et stort stykke kage hos min mormor, eller jeg kan tage to mindre stykker, men jeg får det samme kage. Det er mest høfligt at tage to små stykker, tror jeg!" (Elevinterview 3, elev i 4. klasse, 2019).

I English & Halford (1995) argumenterer forfatterne yderligere for at når man skal vurdere om brøker er ækvivalente, kræver det en forståelse af ækvivalens inden for den proportionale relation mellem tæller og nævner i hver brøk; fx er den proportionale relation 1 til 2 den samme som 2 til 4. De argumenterer for at den proportionale relation er central, for elever bør kunne genkende og identificere ækvivalens uden at forholde sig til at forlænge eller forkorte brøkerne. Eleverne skal i stedet kunne se eller bestemme om brøker er ækvivalente, på baggrund af invarians i kvotient eller den proportionale relation mellem tæller og nævner når to brøker sammenlignes (Behr et al., 1984; Ni, 2001).

Der er altså umiddelbart to forskellige måder at forstå ækvivalens af brøker på – én hvor man går ud fra en helhed, og én hvor man ser på forholdet imellem tæller og nævner.

I Pedersen & Bjerre (2021) introducerer vi derfor to nye begreber for forståelse af ækvivalens, som vi kalder enhedsækvivalens og proportional ækvivalens.

Proportional ækvivalens og enhedsækvivalens

Vores videre matematiske analyse i Pedersen & Bjerre (2021) af de to forståelser af ækvivalens tager udgangspunkt i den generelle forståelse af lighedstegnet i forbindelse med brøkbegrebet. Vi vil her kort forklare det matematiske ækvivalensbegreb.

En brøk skrives som bekendt symbolsk som $\frac{a}{b}$. Når vi i denne analyse refererer til brøker, mener vi rationale tal $\frac{a}{b}$, hvor a og b er heltal og $b \neq 0$.

Lighedstegnet er et kanonisk eksempel på en ækvivalensrelation. Hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på en mængde, S, så opfylder $\sim$ følgende for a, b og c i S: reflektiv

($a \sim a$), symmetrisk (hvis $a \sim b$, så er $b \sim a$) og transitiv (hvis $a \sim b$ og $b \sim c$, så er $a \sim c$). Lighedstegnet, $=$, er et eksempel på en ækvivalensrelation for de hele tal.

En mængde, S, med en ækvivalensrelation, $=$, kan deles i ækvivalensklasser ved at to elementer, a og b i S, er ækvivalente hvis og kun hvis de er i samme ækvivalensklasse.

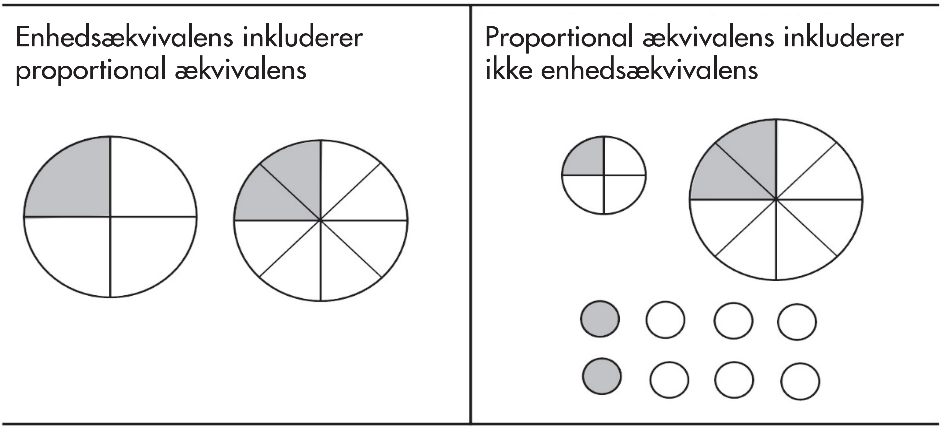
Vi kan nu definere de rationale tal som mængden af ækvivalensklasser af brøker ved

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid \text{for } a, b \in \mathrm{Z} \text{ og } b \neq 0 \}$$

Et element, s, i mængden $\mathbb{Q}$ er altså på formen $s = \frac{a}{b}$. Lad s og t være to elementer i $\mathbb{Q}$, så findes der hele tal, a, b, c og d, så $s = \frac{a}{b}$, og $t = \frac{c}{d}$. Vi kan definere en ækvivalensrelation, $=$, ved $s = t$, hvis og kun hvis $a \cdot d = c \cdot b$. Man kan tjekke at denne relation er reflektiv, symmetrisk og transitiv. $\mathbb{Q}$ er så mængden vi normalt kender som de rationale tal, og vi kan fx se at $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, da $1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$.

Enhedsækvivalens

Brøkerne $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{6}$ repræsenterer naturligvis den samme størrelse, men en metode til at forstå hvorfor det forholder sig sådan, kan være at tegne to lige store cirkler og inddele den ene i tre lige store dele og skravere to. Og herefter inddele den anden cirkel i seks lige store dele og skravere fire dele. På den måde er det muligt at se at de to brøker er lige store, idet det samme areal af de to cirkler er farvet. Men dette er kun sandt hvis de to cirkler, altså den "hele", er nøjagtigt lige store fra starten af (figur 1). Når vi taler om en bestemt enhed der definerer en "hel" eller det "hele", kan vi definere brøker som ækvivalente hvis de udgør præcis den samme del af helheden (Yoshida & Sawano, 2002). Vi har valgt at kalde denne type ækvivalens for enhedsækvivalens. Se figur 1.



Figur 1. *Eksempler på enhedsækvivalens og proportional ækvivalens.*

Proportional ækvivalens

Der er dog også en anden metode til at forstå at to brøker er ækvivalente – nemlig det vi kalder proportional ækvivalens. Den ses når brøker bliver forstået eller aflæst som et forhold eller en ratio mellem tæller og nævner. I dette tilfælde er det ikke altid nødvendigt med en enhed. Det fremgår af det følgende eksempel: "Jeg har betalt $\frac{2}{4}$ af min løn i skat, og du har betalt $\frac{1}{2}$ af din løn. Vi har betalt den samme brøkdel af vores løn, men vi har ikke nødvendigvis betalt det samme beløb i skat". Tilsvarende skal vi bruge 3 bananer til 2 æg når vi bager banankage, eller 6 bananer til 4 æg eller 9 bananer til 6 æg – forholdet mellem bananer og æg er $\frac{3}{2}$, uanset hvor stor en portion vi laver. Forståelsen af ækvivalens kræver en forståelse af den proportionale relation mellem tæller og nævner (English & Halford, 1995).

Populært kan man sige at når elever skal genkende fx $\frac{1}{4}$ i forskellige sammenhænge, vil de skulle genkende at ét ud af fire børn er en pige, at et stykke kage ud af fire er spist, eller en rød bold ud af fire bolde. På samme måde som børn lærer at genkende hvad størrelsen knyttet til naturlige tal er på tværs af repræsentationer. Fx ved at genkende antallet fire i forskellige repræsentationer: symbolet 4, fire fingre på en hånd, fire på en terning og talordet "fire". Det er alle repræsentationer af antallet fire.

Matematisk set er det den samme ækvivalensrelation, uanset om vi opfatter det som enhedsækvivalens eller proportional ækvivalens; det er blot forståelsen af hvorfor to tal er ækvivalente, som er forskellig.

Bemærk at hvis man bruger enhedsækvivalens til at forstå at to brøker er ækvivalente, vil man også kunne forstå det via proportional ækvivalens. Men hvis man skal bruge proportional ækvivalens til at forstå at to brøker er ækvivalente, er det ikke sikkert man vil kunne se det samme ved hjælp af enhedsækvivalens. Se fx ovenstående eksempel om skat.

De to forskellige forståelser vil man veksle mellem, alt efter hvilken situation brøken optræder i, og nogle gange vil de også være til stede samtidig.

At regne med brøker

I det følgende vil vi sammenholde de to ækvivalensforståelser og deres forskellige måder at optræde på i aritmetik med brøker.

Vi har valgt først at have fokus på forskellige eksempler med addition og subtraktion, da det ofte er elevernes første oplevelser med egentlig brøkregning.

Herefter gennemgår vi kort hvordan de to forskellige ækvivalensforståelser optræder i eksempler med multiplikation.

Vi har valgt at eksemplificere de forskellige forståelser gennem de mest brugte visuelle repræsentationer (fx cirkler, tallinjer og blokke). Der er naturligvis nogle begrænsninger knyttet til hver af disse repræsentationer. Fx er brugen af arealmodeller som cirkeldiagrammer blevet kritiseret for kun at støtte en additiv forståelse frem for en mere multiplikativ forståelse af brøker (Moss, 2005), og andre studier har fx fremhævet brugen af tallinjen frem for cirkelmodeller (Hamdan & Gunderson, 2017; Sidney et al., 2019). De visuelle modeller er alle repræsentationer af en brøk (Cramer et al., 2009; Rau & Matthews, 2017), og vi anerkender at relationen mellem de visuelle repræsentationer og brøken ikke er fyldestgørende. Det er derfor centralt at bruge forskellige og mangfoldige repræsentationer af brøker i sin undervisning.

Når man adderer eller subtraherer to heltal, fx $3+4$ eller $1472-978$, kan man i princippet tælle sig frem til et resultat. Det kan man pludselig ikke længere når man adderer eller subtraherer brøker som fx $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Derfor har eleverne brug for andre og nye strategier.

Når man kigger på addition af to brøker som fx $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, kan det udregnes på forskellige måder. Men helt grundlæggende er det at de to brøker er dele af lige store hele – altså vi er ikke ved at lægge en halv familiepizza sammen med en tredjedel børnepizza – pizzaerne er lige store.

Sådan er det altid når vi adderer og subtraherer. $3+4$ kan aldrig betyde at vi lægger 3 æbler sammen med 4 stole. Også her skal der være den samme enhed, men enheden er endnu vigtigere at huske når man adderer og subtraherer brøker, da det kan være svært at se hvad enheden er.

Forståelse af algoritmer til addition og subtraktion

Lad os se på regneudtrykket $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.

Da nævnerne er ens, vil mange elever umiddelbart kunne udregne at det giver $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$, hvor man bruger enhedsækvivalens, som forklaret ovenfor. Eleverne er dog ikke helt "færdige" med at regne, for resultatet er en brøk som kan forkortes. Når elever skal konvertere $\frac{2}{4}$ til $\frac{1}{2}$, kan de forstå ækvivalensen ved hjælp af enten enhedsækvivalens eller proportional ækvivalens, afhængigt af eleven.

Når vi ser på et regnestykke uden fællesnævner, fx $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, har vi stadig brug for at de tal refererer til en fælles enhed.

Fra et algoritmisk perspektiv er den almindelige måde at addere brøker på følgende:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Det skrives helt tilsvarende for subtraktion. Ovenstående kan også skrives som:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Den anden udregning kan ses som et vigtigt skridt for at forstå ækvivalensen. Her finder vi nemlig først brøker ækvivalente med henholdsvis $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ med samme nævner, og derefter lægger vi dem sammen. Hvis eleverne udelukkende lærer at $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, risikerer man at de udelukkende får en procedural forståelse af regneoperationen – og ikke nødvendigvis en konceptuel forståelse.

Det at lære $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$ kan være udgangspunktet for en mere konceptuel tilgang, som øger forståelsen, da hver af de to brøker som er lig hinanden, er tydelige i udregningen.

Vi kan se på eksemplet $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

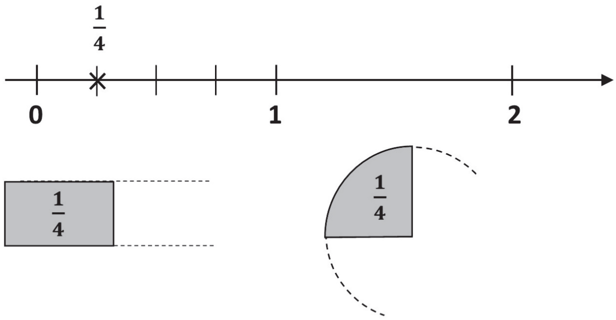
Husk at lighedstegnet er en ækvivalensrelation og derfor transitivt. Altså gælder:

$$\begin{aligned} \text{Hvis} \quad & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6} \\ \text{og} \quad & \frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}, \\ \text{så er} \quad & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Når vi ser på denne udregning, hvor der er ækvivalens mellem de to sider, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}$, så er det ikke sikkert at eleverne forstår at der er ækvivalens imellem brøkerne to og to, altså at $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ og $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, da dette er implicit i vores udregning. Dette gælder jo ikke altid for et lighedstegn. Selvom $5+3=4+4$, så er $5\neq4$ og $3\neq4$. Det kan derfor være en hjælp for elevernes forståelse tydeligt at forlænge brøkerne én ad gangen, før man adderer dem.

I forhold til hvilken type ækvivalens der her er tale om, så må to brøker være brøkdele af den samme helhed for at de kan adderes; altså skal der være tale om enhedsækvivalens. Men når vi forlænger og forkorter brøkerne for lettere at kunne addere dem, kan man forstå ækvivalensen ved både enhedsækvivalens og proportional ækvivalens.

For at huske at brøkerne ses som brøkdele af en lige stor helhed, kan det være en hjælp at bruge tallinjen som repræsentation i undervisningen. Tidligere forskning har vist at tallinjen støtter elevernes konceptuelle forståelse af brøker (se fx Hamdan & Gunderson, 2017; Sidney et al., 2019). Dette kan muligvis forklares med at tallinjen som repræsentation tydeligt har lige store enheder, som vist i figur 2.

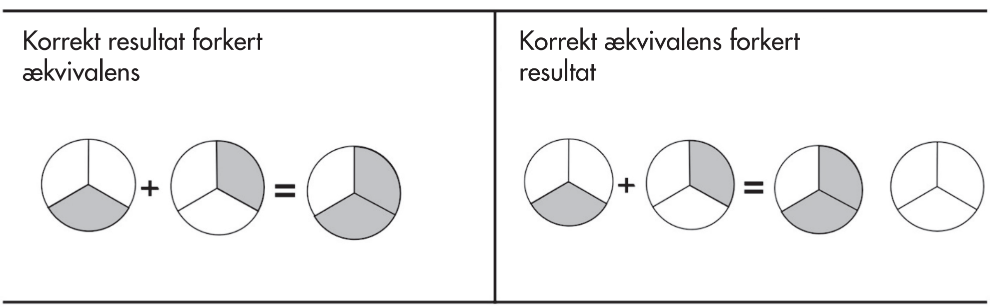


Figur 2. *Eksempler på den underliggende helhed. Som det fremgår, vil det underliggende hele/ den underliggende enhed ofte være tydeligt markeret på tallinjen. Cirkelrepræsentationen er også en repræsentation hvor det "hele" let afkodes, da vi let kan forstille os helheden. Modsat er "helhedens" slutning mere utydelig i blokmodellen.*

Problemer med ækvivalens i cirkelrepræsentationen

En typisk heltalsdistraktor for eleverne er at se tæller og nævner som to separate tal som de derefter lægger sammen hver for sig. Fx kan en elev finde på at skrive: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ (Ni & Zhou, 2005; Van Hoof et al., 2017).

Visuelle repræsentationer som fx cirkler inddelt i lige store dele kan være en god vej til at addere brøker, men her kan også opstå en forvirring som desværre kan bekræfte eleverne i ovenstående fejlforståelse. Her er regnestykket $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ vist – idéen bag repræsentationen er at på venstre side af lighedstegnet er $\frac{1}{3}$ i hver cirkel farvelagt, og på højre side er $\frac{2}{3}$ farvelagt. Men den fremstillede ækvivalens er ikke korrekt når vi kigger på det totale antal af dele på de to sider af lighedstegnet. Det er nemlig kun korrekt når vi ser på de farvede dele – der er to på begge sider. Kigger vi på de hvide dele, så er der fire på venstre side af lighedstegnet, men der er kun én hvid del på højre side. Hvor forsvinder de andre hvide dele hen? Vi har altså en relation som ikke er symmetrisk. Se figur 3.



Figur 3. *Forskellige fremstillinger af addition, hvor ækvivalensforståelse og resultat ikke harmonerer.*

Illustrationen hjælper ikke nødvendigvis på forståelsen af at $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, når man ikke mener at det der tegnes på begge sider af lighedstegnet, er det samme. Hvis man tegner de resterende hvide dele på højre side af lighedstegnet, får man en forståelse for hvorfor elever kan komme til at udregne $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$. Lighedstegnets ækvivalens er altså svær at se her.

Det er et fundamentalt problem – størrelsen af delen kan ikke blive afkodet uden en form for repræsentation af helheden. Hvis vi bare ser en del, ved vi ikke hvad helheden er. En måde at overkomme dette problem på er at få understreget og indikeret at det hele ikke "eksisterer" fysisk, men er en underliggende antagelse, fx ved at gøre linjerne stiplede. En anden måde kan være at bruge en tallinje som repræsentation i stedet for en cirkel. Idet tallinjen har det "hele" repræsenteret direkte på linjen.

Man kan ikke afgøre størrelsen af en brøkdel uden en eller anden repræsentation af hvad helheden er, men man skal samtidig huske ikke at addere de to hele når brøkdele lægges sammen – dette er svært at forstå og en del af forklaringen på hvorfor brøker er svære for børn.

Vær opmærksom på hvordan brøker repræsenteres i det undervisningsmateriale I bruger i jeres undervisning, så er det måske nemmere at hjælpe elever af med ovenstående fejlopfattelse. Man kan tegne andre repræsentationer, som fx tallinjen, til opgaver hvor brøker repræsenteres af cirkeldele, eller gøre noget ud af at fortælle hvordan cirkelrepræsentationen skal forstås.

At regne med både heltal og brøker

Når man trækker to tal fra hinanden, er en almindelig metode at opdele det ene tal, for derefter at trække det andet fra. Det gør man med heltal, og det samme gør sig gældende med brøker. At eleverne forstår hvordan de deler eller regrupperer, er vigtigt når de skal opbygge en fleksibilitet i forhold til at kunne regne med brøker. Opdeling kan antage mange former, fx $31 = 20 + 10 + 1$ og $31 = 20 + 11$.

På samme måde gælder det for brøker, og i forhold til subtraktion med brøker er det centralt med en dyb forståelse af hvordan man kan opdele brøker. Fx kan $\frac{3}{2}$ opdeles i $\frac{2}{2}$ og $\frac{1}{2}$.

Derefter skal man vide at $\frac{2}{2}$ er lig med 1, og sammenlagt har man så opdelt $\frac{3}{2}$ i $1+\frac{1}{2}$. Denne form for opdeling er central når en brøk skal trækkes fra et naturligt tal, og er med til at skabe fleksible regnestrategier inden for brøker.

Et andet eksempel er $2-\frac{1}{4}$. Her skal en af de to hele opdeles inden subtraktionen foretages. Det kræver at eleverne har en forståelse af ækvivalens, for de skal vide at 2 er det samme som $1\frac{4}{4}$ eller $\frac{8}{4}$.

Ræsonnementet er altså følgende:

$$2 = 1 + \frac{4}{4}$$

eller

$$2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4} = \frac{8}{4}.$$

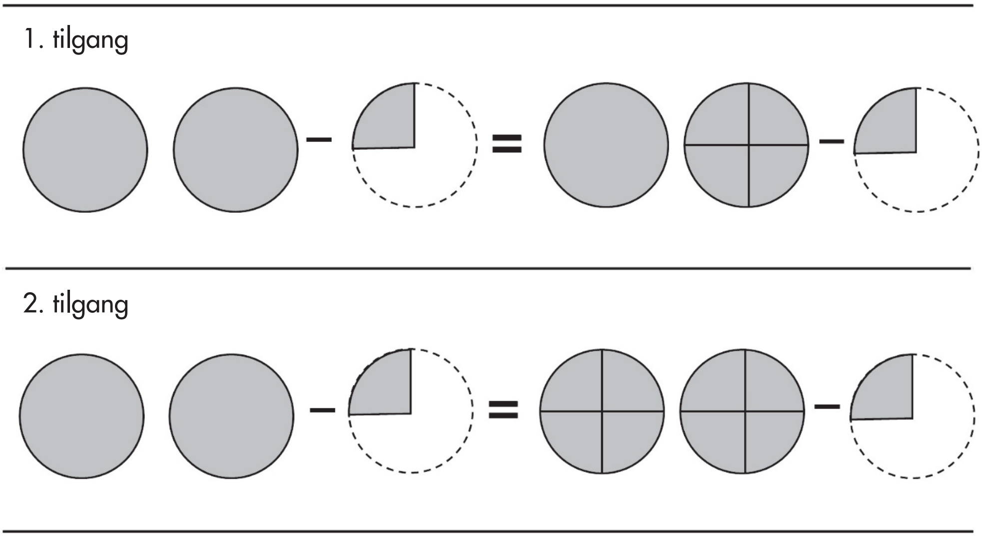
Dermed kan vi skrive:

$$2 - \frac{1}{4} = 1 + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$$

eller

$$2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

Når eleverne når frem til ovenstående, vil de nogle gange være færdige med at regne, men afhængigt af konteksten skal der måske endnu en ækvivalens til. Her skal man nemlig overveje hvorvidt det giver bedst mening at bruge blandede tal eller rene brøker. De to forskellige tilgange til disse opdelinger kan ses i figur 4.



Figur 4. *Illustrationer af subtraktion.*

Når man regrupperer naturlige tal, deler man ofte ind i enere, tiere og så videre – decimaltalsystemet giver os denne oplagte opdeling. Men man må have en anden strategi for opdeling når man skal subtrahere en brøk. Her bestemmes strategien af brøkens nævner. Det er derfor essentielt for regruppering inden for brøker at den bestemmes af nævneren i brøken. Det er således centralt at eleverne har udviklet en forståelse af ækvivalente brøker og relationen til helheden – det vil sige at forstå at der er uendeligt mange ækvivalente brøker.

Hvis eleverne fx skal udregne $2-\frac{2}{5}$, så er det smart at opdele 2 i 1 og $\frac{5}{5}$ eller i $\frac{10}{5}$. Men hvis de skal udregne $2-\frac{1}{2}$, er det pludselig fjollet at dele 2 i femtedele. Nu giver det mere mening at opdele 2 i 1 og $\frac{2}{2}$ eller i $\frac{4}{2}$. Dette kræver adaptiv fleksibilitet knyttet til forståelse af ækvivalente brøker.

I den første tilgang til opdelingerne, vist i figur 4, opdeles én hel. Dette er nemt at oversætte til hvordan man normalt opdeler naturlige tal, hvor man "veksler" fx en tier. Ved at bruge denne metode er det kun én af de hele der deles ind i mindre dele, hvor antallet jo som sagt bestemmes af brøkens nævner. Som ved de naturlige tal er der ikke nogen grund til at inddele alle de hele i brøkdele. At opdele på denne måde kan muligvis lette forståelsen, da man kan bruge sin viden fra opdeling af de naturlige tal.

Den anden tilgang, hvor man opdeler alle hele, ser umiddelbart nemmere ud hvis man ser algoritmen beskrevet (se figur 4). Her bliver alle hele delt ind i mindre dele, og igen bliver antallet bestemt af brøkens nævner. Men i denne tilgang kan vi desværre ikke bruge elevernes kendskab til og erfaring med opdeling af de naturlige tal, og derudover kan det være sværere at tolke resultatet: Hvis det er større end 1, hvor mange hele er der så, hvor stort et tal har jeg så fået? Omvendt kan det også nogle gange være en fordel at få et resultat som er en brøk og ikke et blandet tal.

Se på regnestykket $2-\frac{1}{4}$ fra før. Vi skrev resultatet både som det blandede tal $1\frac{3}{4}$ og som $\frac{7}{4}$. I mange matematikbøger vil man insistere på at $\frac{7}{4}$ er mere rigtigt, men i Pedersen & Bjerre (2021) argumenterer vi for at det kommer an på konteksten. Blandede tal findes i hverdagen, og derfor skal eleverne lære dem at kende og forstå ækvivalens, så de kan oversætte imellem et blandet tal og en brøk. Hvis vi har to hele pizzaer inddelt i fire slices hver, og vi skal gemme én slice til Ahmad, så er det godt at vide at vi har 7 slices tilbage. Har vi i stedet 2 liter mælk i køleskabet og skal bruge $\frac{1}{4}$ liter til maden, så er det nemmere at forstå at vi nu har $1\frac{3}{4}$ liter tilbage og ikke 7 kvarte liter. Et helt andet regnestykke giver måske resultatet $\frac{31}{4}$, hvor man kunne argumentere for at svaret stadig er en divisionsopgave og ikke den løsning man leder efter.

At forstå ækvivalens er helt essentielt for at eleverne forstår at disse forskellige måder at skrive resultaterne på er ens og betyder det samme. Man bruger forskellige måder at skrive det samme tal på, afhængigt af konteksten.

Når det at multiplicere nævnerne ikke er den nemmeste metode

Før så vi på det at trække en brøk fra et heltal, hvor vi lavede en regruppering for at kunne udføre subtraktionen. Man kunne også sige at vi fandt en fællesnævner.

Mange elever har lært at for at trække to brøker fra hinanden skal man finde "fællesnævneren" ved at gange nævnerne med hinanden.

Se nu på regneudtrykket

$$\frac{2}{4}-\frac{1}{2}.$$

Hvis eleverne her starter med at gange nævnerne sammen, opdager de formentlig ikke at de to brøker faktisk er ens, og at udtrykket derfor giver 0. Hvis eleverne omvendt forkorter $\frac{2}{4}$ til $\frac{1}{2}$, vil de se at udtrykket bliver $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$, som oplagt er 0.

I en artikel af Newton (2008) blev det undersøgt hvordan førskolelærere regnede med bl.a. brøker. De fandt at få førskolelærere indså at $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. De fleste brugte i stedet standardalgoritmen til at finde fællesnævneren ved at multiplicere nævnerne med hinanden. Det tyder på at de udelukkende havde en procedural forståelse af emnet. Ovenstående eksempel antyder at det vil være en fordel for elever at lære at se på brøkerne og kunne vurdere deres størrelser. Det kræver et fokus på ækvivalente brøker.

Man kan på samme måde betragte fx udtrykket $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$. Her er det heller ikke det nemmeste at finde fællesnævneren ved at multiplicere nævnerne og få 18, hvis man i stedet kan se at $\frac{1}{3}$ er det samme som $\frac{2}{6}$. For at lære at se at det giver mening at forlænge med 2 i stedet for 6, skal eleverne vide at der findes uendeligt mange fællesnævnere – og altså ikke kun den ene man finder ved proceduralt at multiplicere nævnerne med hinanden. Vi må stræbe efter at eleverne opnår den konceptuelle forståelse at de har (uendeligt) mange mulige fællesnævnere at vælge imellem. Denne forståelse hænger igen tæt sammen med forståelsen af ækvivalente brøker. Vi kan se på regnestykket fra før, $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$, og se på de to ækvivalensklasser, som er defineret i afsnit 2.1, proportional ækvivalens og enhedsækvivalens:

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\frac{6}{18}=\cdots$$

og

$$\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{3}{18}=\frac{4}{24}=\frac{5}{30}=\frac{6}{36}=\cdots$$

og se at vi kan bruge både 6, 12, 18 og så videre som fællesnævnere.

Eksempler med multiplikation

I denne artikel vil vi ikke gennemgå multiplikation eller division dybdegående. Vi vil komme med nogle få udvalgte eksempler på hvorfor forståelsen af ækvivalens også er vigtig når man skal multiplicere brøker. Division af brøker er i manges opfattelse enormt svært. Vi mener at det handler om mere og andet end forståelsen af ækvivalens, og det ligger derfor uden for vores formål med denne artikel.

Første eksempel er multiplikation af en brøk med et heltal. Hvis vi vil udregne $4 \cdot \frac{3}{4}$, kan vi lige så godt udregne $\frac{3}{4} \cdot 4$, da multiplikation er kommutativ. Men for børn, såvel som voksne, kan der være stor forskel på at prøve at regne ud hvad man får hvis man fire gange tager $\frac{3}{4}$, eller hvis man finder $\frac{3}{4}$ af 4.

Vi kan enten betragte 4 som fire enheder (fx æbler), som vi hver især tager $\frac{3}{4}$ af, eller betragte 4 som en samlet mængde, som vi vil tage $\frac{3}{4}$ af.

Altså vi kan tage $\frac{3}{4}$ af hvert æble, og derefter lægge delene sammen så vi har 4 stykker af $\frac{3}{4}$ af hvert æble, eller vi kan tage 3 ud af 4 æbler.

At forstå at dette er det samme, og at $4 \cdot \frac{3}{4}$ er 3, kræver en forståelse af ækvivalens. Begge de to forståelser tager afsæt i en enhed som vi forholder os til når vi regner; altså er det enhedsækvivalensforståelsen.

At multiplicere to brøker med hinanden

Hvis vi multiplicerer to brøker med hinanden, kan vi, afhængigt af konteksten, have brug for enten enhedsækvivalens eller proportional ækvivalens.

Vi ser på udtrykket

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}.$$

Vi kan tage udgangspunkt i en enhed, fx en pizza. Pizzaen er delt i 5 lige store stykker, og vi har 3 af disse stykker. Hvert af dem skal vi tage halvdelen af. Altså ender vi med 3 stykker pizza som er halvt så store – de har hver størrelsen $\frac{1}{10}$ pizza. Vi har regnet os frem til at $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$.

Vi kan se på samme stykke hvor vi ikke tager udgangspunkt i en enhed, men i stedet ser på proportionalitet. Hvis $\frac{3}{5}$ af æbletræets blomster bliver bestøvet, bliver halvdelen af de bestøvede blomster typisk til gode store æbler (resten falder af før de bliver modne). Antal æbleblomster er underordnet – det er forholdet vi er interesseret i. Vi kan altså selv fastsætte antallet af æbleblomster for at gøre regnestykket nemmere for os selv. Hvis æbletræet nu har 5 blomster, så bliver 3 af dem bestøvet, og halvdelen af dem bliver til æbler … det vil ikke kunne lade sig gøre. Men hvis nu træet har 10 blomster, så bliver 6 bestøvet, og træet ender altså med 3 æbler. Vi har regnet ud at $\frac{3}{10}$ af æbleblomsterne bliver til æbler. Vi kunne også have set på et æbletræ med 30 blomster, og så ville vi finde ud af at 9 af disse blev til æbler, altså $\frac{9}{30}$ af blomsterne blev til æbler. Eller et træ med 100 blomster, og så ville vi finde ud af at $\frac{30}{100}$ af blomsterne bliver til æbler.

Vi har brug for proportionalitetsforståelsen af ækvivalens når vi ser på et forhold, og det er forholdet som er interessant, og ikke hvor mange eller meget vi ender med.

Konklusion

Vores teoretiske analyse af hvordan enhedsækvivalens og proportional ækvivalens optræder i forståelser af regneoperationer, viser hvordan de parallelt er med til at udbygge brøkforståelse inden for de omtalte regnearter.

Særligt finder vi at forståelsen af ækvivalens er med til at skabe et nuanceret brøkbegreb, som gør det muligt også at udvikle fleksible og adaptive regnestrategier når det kommer til brøkregning. Hvordan opdeler vi, veksler vi eller omskriver vi brøker – så det er lettere at arbejde med i den givne kontekst? Det er næsten kun muligt hvis vi har en grundforståelse af at $\frac{1}{2}$ kage faktisk er den samme mængde kage som $\frac{2}{4}$ kage, som eleven forklarede i indledningen. Uden en udbygget ækvivalensforståelse vil det at regne med brøker hurtigt blive til ufleksible procedurer, hvor eleverne mangler forståelsen af at når vi fx finder en fællesnævner, så omskriver vi "bare" brøkerne inden for ækvivalensklassen.

Med respekt for kompleksiteten i brøkbegrebet mener vi at vores analyse netop viser hvordan ækvivalens er en del af den grundforståelse som er nødvendig for at eleverne overkommer deres naturlige tendens til "at ethvert tal står for netop én unik mængde", og lærer at ethvert rationalt tal kan repræsenteres ved uendeligt mange forskellige ækvivalente brøker.

Perspektivering

Ækvivalensforståelsen peger videre til både procentregning og algebra. Man skal kunne regne med brøker og forstå hvornår og hvorfor to brøker er ens, for at forstå hvorfor $\frac{1}{4}$ er det samme som $\frac{25}{100}$, som er det samme som $25\,\%$. Tilsvarende skal man kunne forstå hvordan brøker forkortes, og hvorfor lighedstegnet gælder, når man forkorter udtryk som fx:

$$\frac{8ac + 12bc + 36c}{12c} = \frac{2a + 3b + 9}{3}.$$

Når man arbejder med ækvivalens af brøker, lægger man grundlaget for den abstrakte forståelse af algebra, hvor et bogstav kan betyde mange forskellige ting og antage forskellige værdier. For både procentregning og algebra er det altså helt grundlæggende at have en forståelse af hvornår, hvorfor og hvordan brøker er ækvivalente.

Referencer

Bailey, D.H., Hoard, M.K., Nugent, L. & Geary, D.C. (2012). Competence with Fractions Predicts Gains in Mathematics Achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*, s. 447-455.

Behr, M.J., Wachsmuth, I., Post, T.R. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, s. 323-341.

Booth, J.L. & Newton, K.J. (2012). Fractions: Could They Really Be the Gatekeeper's Doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*, s. 247-253.

Cramer, K.A., Wyberg, T. & Levitt, S. (2009). *Rational Number Project: Fraction Operations and Initial Decimal Ideas*.

English, L. & Halford, G.S. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes*. Routledge.

Fazio, L.K., DeWolf, M. & Siegler, R.S. (2016). Strategy Use and Strategy Choice in Fraction Magnitude Comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 42*, s. 1-16. doi:10.1037/xlm0000153.

Hamdan, N. & Gunderson, E.A. (2017). The Number Line is a Critical Spatial Numerical Representation: Evidence from a Fraction Intervention. *Developmental Psychology, 53*, s. 587-596. doi:10.1037/dev0000252.

Kamii, C. & Clark, F.B. (1995). Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, s. 365-378. doi:10.1016/0732-3123(95)90035-7.

Kieren, T.E. (1976). On the Mathematical, Cognitive, and Instructional Foundations of Rational Numbers. I: R.A. Lesh & D.A. Bradbard (red.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop* (s. 101-144). ERIC/SMEAC.

Moss, J. (2005). Pipes, Tubes, and Beakers: New Approaches to Teaching the Rational-Number System. I: M.S. Donovan & J.D. Bransford (red.), *How Students Learn: Mathematics in the Classroom* (s. 309-349). The National Academies Press. doi:10.17226/11101.

Newton, K.J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal, 45*, s. 1080-1110. doi:10.3102/0002831208320851.

Ni, Y. (2001). Semantic Domains of Rational Numbers and the Acquisition of Fraction Equivalence. *Contemporary Educational Psychology, 26(3)*, s. 400-417. doi:10.1006/ceps.2000.1072.

Ni, Y. & Zhou, Y.D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist, 40(1)*, s. 27-52. doi:10.1207/s15326985ep4001_3.

Pedersen, P.L. (2021). *Learning and Understanding the Complexity of Fractions*. https://vbn.aau.dk/ws/portalfiles/portal/441584586/PHD%20PLP%202%20E%20pdf.pdf.

Pedersen, P.L. & Bjerre, M. (2021). Two Concepts of Fraction Equivalence. *Educational Studies in Mathematics, 107*, s. 135-157. doi:10.1007/s10649-021-10030-7.

Pedersen, P. L., & Sunde, P. (2019). Students' ability to compare fractions related to proficiency in the four operations. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02401060

Rau, M.A. & Matthews, P.G. (2017). How to Make 'More' Better? Principles for Effective Use of Multiple Representations to Enhance Students' Learning about Fractions. *ZDM – Mathematics Education, 49*, s. 531-544. doi:10.1007/s11858-017-0846-8.

Schneider, M. & Siegler, R.S. (2010). Representations of the Magnitudes of Fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 36*, s. 1227-1238. doi:10.1037/a0018170.

Sidney, P.G., Thompson, C.A. & Rivera, F.D. (2019). Number Lines, but Not Area Models, Support Children's Accuracy and Conceptual Models of Fraction Division. *Contemporary Educational Psychology, 58*, s. 288-298. doi:10.1016/j.cedpsych.2019.03.011.

Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis-Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I. & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*, s. 691-697. doi:10.1177/0956797612440101.

Siegler, R.S., Fazio, L.K., Bailey, D.H. & Zhou, X. (2013). Fractions: The New Frontier for Theories of Numerical Development. *Trends in Cognitive Sciences, 17*, s. 13-19. doi:10.1016/j.tics.2012.11.004.

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology, 49*, 1994-2004. doi:10.1037/a0031200

Stafylidou, S. & Vosniadou, S. (2004). The Development of Students' Understanding of the Numerical Value of Fractions. *Learning and Instruction, 14*, s. 503-518. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.015.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 50*, 614-620. doi:10.1177/0022219416662032

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. & Siegler, R.S. (2015). Bridging the Gap: Fraction Understanding is Central to Mathematics Achievement in Students from Three Different Continents. *Learning and Instruction, 37*, s. 5-13. doi:10.1016/j.learninstruc.2014.03.002.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013). Are Secondary School Students Still Hampered by the Natural Number Bias? A Reaction Time Study on Fraction Comparison Tasks. *Research in Mathematics Education, 15*, s. 154-164. doi:10.1080/14794802.2013.797747.

Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2017). Number Sense in the Transition from Natural to Rational Numbers. *British Journal of Educational Psychology, 87,* s. 43-56. doi:10.1111/bjep.12134.

Winsløw, C. (2019). Professor: Vi skylder de danske børn og unge at lære dem matematik. *Politiken*. https://politiken.dk/debat/debatindlaeg/art7576181/Vi-skylder-de-danske-b\OT1\orn-og-unge-at-l\OT1\aere-dem-matematik.

Wong, M. (2010). Equivalent Fractions: Developing a Pathway of Students Acquisition of Knowledge and Understanding. I: L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (red.), *Shaping the Future of Mathematics Education: Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 673-680). Fremantle: MERGA. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED521016.pdf.

Wong, M. & Evans, D. (2007). Students' Conceptual Understanding of Equivalent Fractions. I: J. Watson & K. Beswick (red.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice* (s. 824-833). Adelaide: MERGA.

Yoshida, H. & Sawano, K. (2002). Overcoming Cognitive Obstacles in Learning Fractions: Equal-Partitioning and Equal-Whole. *Japanese Psychological Research*, 44, s. 183-195.

English abstract

How can we support students' understanding of fractions and fraction arithmetic? This article is an introduction to the didactic field of equivalence of fractions. We present a theoretical mathematical analysis of two understandings of equivalence which we call unit and proportional equivalence.
We will analyze a) how the two different understandings differ from each other and b) how they behave differently within addition, subtraction and multiplication.
We argue, in this Danish adaptation and extension of a major English article by the same authors, that a greater knowledge of equivalence may be essential for developing flexible arithmetic strategies in fractional arithmetic.