Adaptivitet og fleksibilitet: Regnestrategier i de yngste klasser

Pernille Bødtker Sunde,
Katholieke Universiteit Leuven
(Belgien) og VIA University
College

Abstract: *Regnestrategier har betydning for elevens udvikling i matematik gennem hele skoleforløbet. Regnestrategier er en indikator for tal- og regneforståelse, og der er en veldokumenteret sammenhæng mellem udpræget brug af tællestrategier og risiko for senere matematikvanskeligheder. I denne artikel afdækker jeg begrebet regnestrategier og kommer med eksempler fra min egen forskning om elevers brug af regnestrategier til etcifret addition fra første til fjerde klasse. Perspektiverne til undervisningen er at den bør fokusere på tal- og regneforståelse og sigte mod at udvikle adaptiv ekspertise, dvs. at eleven behersker et bredt udsnit af strategier og kan anvende disse adaptivt og fleksibelt.*

Regnestrategier

Regnestrategier er kommet markant mere i fokus de seneste år. Personligt blev jeg for alvor opmærksom på regnestrategierne og deres betydning i forbindelse med mit eget arbejde med elever med matematikvanskeligheder. Det førte omkring 2010 til et samarbejde med Pernille Pind og et større udviklingsprojekt som i 2014 mundede ud i publiceringen af både test- og interventionsmaterialer med fokus på regnestrategiudvikling hos især indskolingselever (Sunde & Pind, 2014a, 2014b). Dette skabte grundlaget for et egentligt forskningsprojekt om danske elevers brug og udvikling af regnestrategier til etcifret addition og sammenhængene med deres senere matematiklæring[1]. Det er disse ca. ti års arbejde som ligger til grund for denne artikel.

I Faghæftet for matematik (2019) har regnestrategier en fremtrædende plads. I Fælles Mål er det et selvstændigt færdigheds- og vidensområde under tal og algebra, og i

1 Det projekt resulterede i en ph.d.-afhandling i 2019 (Sunde, 2019) og er fortsat som en del af min nuværende internationale DFF-postdocstilling ved Katholieke Universiteit Leuven i Belgien hos professor Lieven Verschaffel og professor Bert De Smedt (Danmarks Frie Forskningsfonds bevilling nr. 0127-00022B).

både læseplanen og undervisningsvejledningen nævnes regnestrategier og arbejdet med disse adskillige gange. I læseplanen står bl.a.:

> "Det er centralt, at læreren udfordrer og støtter de enkelte elever på en måde, så eleverne udvikler deres regnestrategier på baggrund af deres talforståelse frem for at lære procedurer for opstilling og udregning. Der sigtes ikke mod opøvelsen af standardiserede algoritmer" (Faghæftet for matematik 2019, s. 37).

Det fremhæves også i undervisningsvejledningen at arbejdet med regnestrategier ikke kun handler om at eleverne får metoder til udregning, men arbejdet skal bygge på udvikling af tal- og regneforståelse:

> "[A]mbitionen er noget andet og mere, end at eleverne får præsenteret beregningsmetoder, som de efterfølgende øver sig på. Formuleringen hænger sammen med, at eleverne skal lære med forståelse. Det er med andre ord ikke hensigten, at eleverne reproducerer beregningsmetoder, men at de udvikler metoder, fordi en sådan udvikling kun kan foregå, når den er forbundet med forståelse af tallenes og regningsarternes egenskaber" (Faghæftet for matematik 2019, s. 93).

Regnestrategier er eller bør altså være et centralt element i matematikundervisningen i skolen. Målet med denne artikel er at give et overblik over hvad regnestrategier er, hvilke faktorer der påvirker elevens valg af regnestrategier, samt hvilke sammenhænge der er mellem regnestrategier og elevens videre udvikling i matematik. Derudover vil jeg give eksempler på resultater fra mit ph.d.-projekt om regnestrategier til addition med etcifrede tal i første til fjerde klasse (Sunde, 2019). Til slut gives eksempler på hvordan denne forskningsbaserede viden kan bruges i forbindelse med undervisning.

Regnestrategier til etcifret addition kan måske ved første øjekast synes som et noget snævert felt, men forskning viser at det er udvikling af gode strategier til den etcifrede regning som lægger fundamentet for den dybere regneforståelse og arbejdet med bl.a. flercifret regning. Det viser sig ofte at elever som er udfordret i udskolingen, har problemer med den helt grundlæggende talforståelse, og de er i stor udstrækning afhængige af tællestrategier som fx at finde resultatet af 3 + 8 ved a tælle 8, 9-10-11, et mønster som bl.a. Ostads (2010) og min egen forskning (Sunde, 2019) bekræfter.

Hvad er regnestrategier?

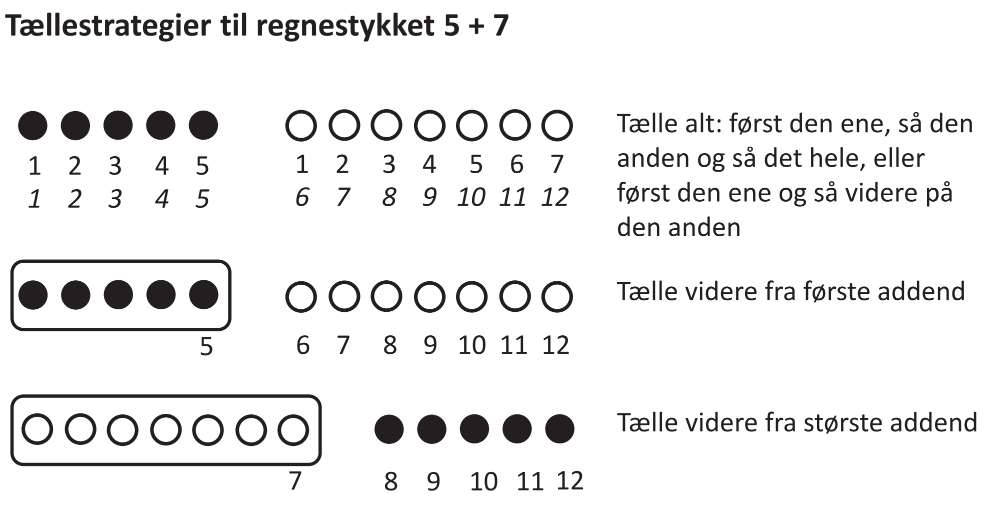
Begrebet strategi kender vi fra hverdagssammenhænge som en (langsigtet) plan for at opnå et specifikt mål. Der findes ikke en entydig definition af hvad en strategi er i matematiksammenhænge (Ostad, 1997b), men i relation til regning med tal er der generel konsensus om at en regnestrategi består af en række mulige handlinger som til enhver tid kan ændres og tilpasses den aktuelle situation (fx Ostad, 1997b; Siegler & Jenkins, 1989; Verschaffel et al., 2007). En regnestrategi adskiller sig således fra en procedure eller algoritme ved at disse består af fastlåste og ufravigelige trin-for-trin-handlinger (Siegler & Jenkins, 1989; Verschaffel et al., 2007). Hvor procedurer og algoritmer ikke kræver konceptuel forståelse, så er netop dette, altså forståelse af tal og regnearter, en forudsætning for at kunne udvikle og anvende regnestrategier (Verschaffel et al., 2007).

I det følgende vil jeg udelukkende beskæftige mig med regnestrategier relateret til arbejdet med positive heltal – og primært etcifret addition. Men principperne kan overføres til andre talområder og regnearter som fx subtraktion (Sunde & Pind, 2018) og multiplikation (Pind, 2016; Sunde & Pind, 2016b).

Regnestrategier opdeles typisk i simple tællestrategier, automatisering og mere sofistikerede regrupperingsstrategier. Tællestrategier (eng.: backup strategies) er sikre, men langsomme strategier, fx at tælle på fingrene hvilket kræver en mindre grad af konceptuel forståelse. Automatisering (eng.: direct retrieval) er når resultatet kan huskes udenad og blot hentes direkte fra hukommelsen. Regrupperingsstrategier (eng.: fact-based, retrieval-based eller decomposition strategies), også kaldet opdelings- eller hukommelsesstrategier, bygger på en god talforståelse da man opdeler regnestykket i andre regnestykker som man nemmere kan regne ud, fx fordi man har automatiseret dem.

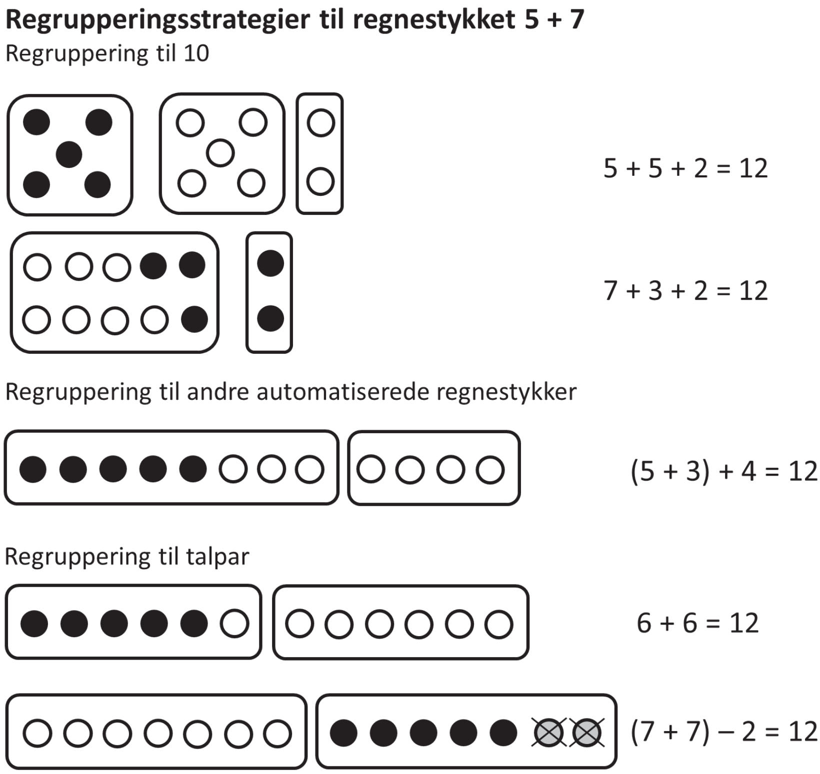
Regnestrategier, overordnede kategorier:
Tælling: Resultatet findes ved forskellige former for tælling.
Automatisering: Resultatet hentes direkte frem fra hukommelsen.
Regruppering: Regnestykket deles op i nye regnestykker som er nemmere at regne da de er helt eller delvist automatiserede.

Tællestrategier er de første strategier børn tilegner sig, og børn lærer ofte disse strategier til antalsbestemmelse før de starter i skole (Clements & Sarama, 2007). Der skelnes mellem tælling med konkrete materialer, herunder fingre, og mundtlig tælling som kan være enten at tælle højt eller at tælle "inde i hovedet" (Carpenter & Moser, 1984; De Corte & Verschaffel, 1987). Begge typer af tælling kan inddeles i adskillige kategorier (for en grundig gennemgang, se Baroody, 1989), men typisk anvendes de to kategorier *tælle alt* og *tælle videre* (se figur 1). Ved tælle alt tælles begge addender. Ved 2 + 3 tælles først 1-2, derefter 1-2-3 og til slut 1-2-3-4-5 eller alternativt først 1-2 og så videre 3-4-5. Ved tælle videre-strategien tælles direkte videre fra en af addenderne, typisk den største, men elever der ikke er helt fortrolige med denne strategi, tæller også fra den første addend.



Figur 1. *Eksempler på forskellige tællestrategier til løsning af regnestykket 5 + 7.*

Regruppering tager udgangspunkt i at opdele regnestykket i nye regnestykker som man nemmere kan regne ud (se figur 2). Det forudsætter at man har automatiseret nogle regnestykker. Ved fx regnestykket 5 + 7 kan man tage udgangspunkt i en regruppering til 10 ved at opdele i 5 + 5 + 2 eller 7 + 3 + 2. Man kan også anvende talpar ved i dette tilfælde at regruppere til 6 + 6. Disse eksempler viser regruppering baseret på efterfølgende addition, dvs. at delsummer holder sig under den endelige sum, men strategierne kan også indeholde efterfølgende subtraktion hvor delsummer er over den endelige sum, fx kan 7 + 8 også løses som 8 + 8 – 1.



Figur 2. *Eksempler på forskellige regrupperingsstrategier til løsning af regnestykket 5 + 7. De to addender opdeles og sammensættes så der konstrueres nye regnestykker som er nemmere for eleven at regne ud, fx fordi eleven har automatiseret disse.*

Forudsætninger og udvikling

Som det fremgår af ovenstående, kræver strategierne meget forskellige niveauer af talforståelse. For at kunne anvende tællestrategier forudsættes blot at man har en grundlæggende forståelse af principperne om en-til-en-korrespondance og kardinalitet, dvs. at antallet af elementer i en mængde kan bestemmes ved tælling, og at det tal som kobles til det sidste element, angiver det samlede antal elementer (se fx Kristiansen, 2021; Sunde, 2021). Man behøver altså blot at forstå tal som en række af selvstændige enheder på en talrække, fx at seks kommer før syv (Fuson, 1992).

Regrupperingsstrategier forudsætter derimod en dybere konceptuel forståelse af tal. De bygger dels på at man har automatiseret enkelte regnestykker (Gray, 1991; Threlfall, 2002), men især at man har en forståelse af del-helhed (Canobi, 2004) og opdeling af tal (Ambrose et al., 2003; Gray & Tall, 1994; Verschaffel et al., 2007), dvs. at man forstår at seks ikke blot kommer før syv, men også er en del af syv, altså at mængden syv også indeholder mængden seks, eller 7 = 6 + 1, og at seks også er tre toere osv. At kunne opdele i enere, tiere osv. er selvsagt også centralt i arbejdet med flercifrede tal. Internationale undersøgelser har således vist at børnehavebørns brug af regrupperingsstrategier baseret på opdeling i tiere og enere afhang af deres viden om strukturerne i talsystemet (Laski et al., 2014). Elever i første klasse som var gode til subitizing (at kunne genkende helt små mængder uden at tælle), anvendte i højere grad regrupperingsstrategier end børn som ikke var gode til subitizing (Gaidoschik, 2012). Og for elever i anden og tredje klasse var der en sammenhæng mellem deres brug af regrupperingsstrategier og deres forståelse af matematisk ækvivalens, fx det at kunne løse ligninger som 4 + 4 = _ + 3 og forståelsen af lighedstegnet (Chesney et al., 2014).

Den generelle udvikling i strategibrug til etcifret addition går fra tælling til automatisering og regruppering. Hastigheden hvormed denne udvikling sker, er dog meget forskellig fra elev til elev. Nogle elever anvender i lang tid overvejende tælling for derefter langsomt at skifte til også at anvende automatisering og regruppering. Andre elever bevæger sig hurtigere fra tælling til at anvende andre strategier. Så der er stor individuel variation, både i hastigheden af ændringen og i den forholdsmæssige brug, eller frekvensen, af de enkelte strategier. Der er ikke som sådan tale om at en strategi *afløses* af en anden, men at dette sker som en gradvis ændring i frekvensen af de enkelte strategier (Carpenter & Moser, 1984; Siegler, 1996). Siegler (1996) beskriver således i sin *overlapping waves*-teori at flere strategier er til rådighed og i brug på samme tid, men at den relative brug af strategierne ændres over tid.

En analyse af 147 danske elevers strategiudvikling fra første til fjerde klasse bekræfter dette billede (Sunde et al., 2020). Elevernes strategibrug blev undersøgt i enten ét, to eller tre efterfølgende skoleår. Dette foregik ved en-til-en-interview hvor eleven fik vist et kort med et etcifret additionsstykke. Eleven blev bedt om at løse opgaven og forklare hvordan han/hun fandt svaret. Dette blev gentaget med i alt 36 regnestykkekort med de additionsstykker som kan dannes af tallene 2 til 9. Elevens strategibrug til hvert regnestykke blev kategoriseret i giver op/regner fejl, tælle alt, tælle videre, automatisering og regruppering (for detaljeret beskrivelse, se Sunde, 2019). Analysen viste at i første klasse bruger eleverne i høj grad forskellige former for tælling, og i løbet af de næste klassetrin sker et skift mod større brug af automatisering og regrupperingsstrategier. Der er dog betydelig individuel variation idet nogle elever fx anvender tælling over længere tid end andre.

En efterfølgende mikroanalyse af 83 andre elevers udvikling over fem måneder i første klasse viste således at de elever som primært foretrak tælling i starten af første klasse, i højere grad holdt fast i tælling fem måneder senere sammenlignet med elever der havde et mere varieret strategivalg i starten af første klasse (Sunde & Sunde, 2019). Dette billede var uafhængigt af hvilken klasse eleverne gik i (Sunde & Sunde, 2019), på trods af at undervisningen i tal og regning i de seks klasser var meget forskellig (Sunde

& Sayers, 2017). Udviklingen i strategibrug sker altså for de fleste elever langsomt, og de elever som tæller meget, ser ud til at vedblive med at tælle. Det er et mønster som bekræftes af Bailey et al. (2012). De beskriver et feedback-loop hvor den strategi eleven er god til, også er den strategi eleven foretrækker. Dermed får eleven mere træning i denne specifikke strategi og vil derfor med større sandsynlighed vælge denne i fremtiden. Dette sammenholdt med mine resultater indikerer således at det kan kræve en særlig opmærksomhed og målrettet undervisning at støtte elever i at udvikle et større strategirepertoire hvilket er centralt for et adaptivt, fleksibelt strategivalg.

Adaptivt, fleksibelt strategivalg

Valget af strategi afhænger, som også beskrevet ovenfor, af både selve opgavens karakteristika og elevens viden og færdigheder. Ser vi fx på opgaven 7 + 8 ud fra et opgaveperspektiv, kan man argumentere for at den simpleste og mest effektive strategi (hvis man ikke har automatiseret summen) er at anvende talpar +/– 1, altså 7 + 7 + 1 eller 8 + 8 – 1. Men ser vi det fra et elevperspektiv, er dette ikke nødvendigvis den mest effektive tilgang hvis eleven ikke er sikker i og hurtig til talparrene. En elev der i stedet er sikker i og hurtig til tiervenner, vil regne opgaven ved fx at regruppere til 7 + 3 + 5 eller 8 + 2 + 5. En elev som ikke har automatiseret disse summer med sikkerhed, eller som ikke har den fornødne talforståelse til at opdele tallene, vil med større sikkerhed regne opgaven ved brug af tælling. Så at kunne vælge den bedste strategi til at løse en opgave afhænger ikke kun af selve opgaven, men også af den pågældende elevs repertoire af tilgængelige strategier og elevens sikkerhed i strategierne, herunder hvilke summer eleven har automatiseret, og elevens generelle tal- og regneforståelse.

Der er generel enighed om at det at kunne vælge den mest hensigtsmæssige strategi til en given opgave er centralt, og man taler i den sammenhæng om adaptivitet og fleksibilitet (Bailey et al., 2012; Rechtsteiner-Merz & Rathgeb-Schnierer, 2015; Torbeyns et al., 2002). Selvom definitionen og brugen af disse begreber er noget inkonsistent og overlappende (Nunes et al., 2016), så bidrager de til forståelsen af hvorfor nogle elever udvikler adaptiv ekspertise og andre ikke gør. Hatano (2003) definerer adaptiv ekspertise som "evnen til at anvende meningsfuldt lærte procedurer fleksibelt og adaptivt" (s. xi, min oversættelse). Adaptivt strategivalg betyder således at kunne vælge en strategi under hensyntagen til hvor effektiv og hensigtsmæssig den pågældende strategi er til løsning af det specifikke problem (Siegler & Lemaire, 1997; Torbeyns et al., 2005).

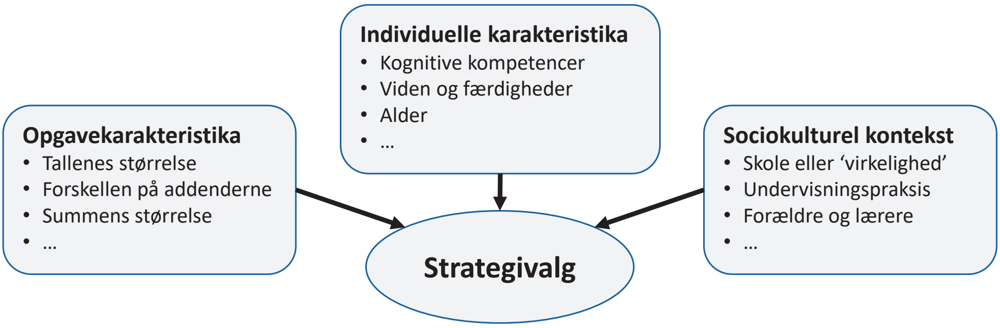
Hatano og kolleger (Hatano, 2003; Hatano & Inagaki, 1986; Hatano & Oura, 2003) skelner imellem adaptive eksperter og rutineeksperter. Rutineeksperter er, som navnet antyder, eksperter i at anvende bestemte rutiner til bestemte typer opgaver og ikke nødvendigvis med forståelse. I regnestrategisammenhænge kan det være elever som er sikre i og hurtige til at anvende tællestrategier, men også elever som fx altid anvender tiervenner (en sum til ti-strategi) til etcifret addition, men ikke er i stand til at tænke fleksibelt og anvende fx talpar når det måske er nemmere. Rutineeksperter har ikke nødvendigvis forståelse for de forskellige processer og sammenhænge der ligger bag de procedurer de anvender, som fx sammenhængen mellem regnearterne. De er, modsat adaptive eksperter, derfor heller ikke så gode til at overføre viden og strategier til nye kontekster. Det kan fx være at anvende tiervenner til at løse 10 – 3 ved at tænke 3 + 7 er 10, så 10 – 3 må være 7. I forhold til flercifret regning kan rutineeksperter fx være rigtig gode til at anvende en standardalgoritme ved subtraktion uden tierovergang, men have udfordringer ved fx 200 – 199, hvor adaptive eksperter vil skifte strategi og anvende en tælle-op-strategi som er både nemmere og mere sikker i dette tilfælde. Adaptive eksperter har netop den grundlæggende forståelse som gør dem i stand til at tilpasse metoder og strategier til den aktuelle situation og overføre og tilpasse kendte metoder til nye situationer.

Verschaffel og kolleger (Verschaffel et al., 2009) påpeger at også den sociokulturelle kontekst har betydning for strategivalget, og de definerer adaptivt strategivalg som:

> "Det bevidste eller ubevidste valg og brug af den mest hensigtsmæssige løsningsstrategi til et givet matematisk problem, for et givet individ, i en given sociokulturel kontekst" (s. 343, min oversættelse).

Der er flere eksempler på hvordan konteksten kan påvirke elevernes valg af strategier. Bjorklund & Rosenblum (2002) fandt fx at 6-7-årige børn anvendte langt mere sofistikerede strategier når de spillede slanger og stiger med deres forældre end når de løste de samme additionsopgaver i en skolekontekst. Også selve klasserumskulturen og hvordan eleverne oplever lærerens forventninger, kan påvirke elevernes strategivalg. Særligt højt præsterende elever kan blive påvirket af eksplicit undervisning i "regler" for strategivalg (Torbeyns et al., 2005).

En række forskellige faktorer påvirker altså valget af regnestrategi (Verschaffel et al., 2009). De kan opsummerende kategoriseres i (se figur 3): 1) faktorer som knytter sig til selve opgaven, fx regneart, talområde og opgavetype med eller uden kontekst, 2) faktorer knyttet til individet, såsom alder, køn, viden og færdigheder, motivation og selvtillid, samt 3) den sociokulturelle kontekst, dvs. den sammenhæng strategien skal udføres i – er det i en hverdagssituation, i skolen, sammen med forældrene? – men også den undervisningspraksis eleven påvirkes af, og hvad der bliver værdsat i den kulturelle kontekst.



Figur 3. *Eksempler på faktorer der påvirker elevens strategivalg. De enkelte faktorer er ikke prioriteret og påvirker ikke nødvendigvis i lige høj grad strategivalget (efter Sunde, 2019).*

Regnestrategier og matematikvanskeligheder

Der er en veldokumenteret sammenhæng mellem de regnestrategier eleverne foretrækker, og hvordan de præsterer i matematik generelt, samt risikoen for senere matematikvanskeligheder (fx Dowker, 2014; Ostad, 1997a; Vanbinst et al., 2014). Både højt og lavt præsterende elever kan anvende hele repertoiret af strategier (Torbeyns et al., 2004), men der er stor forskel på i hvor høj grad de bruger de forskellige strategier. Generelt anvender højt præsterende elever oftere regrupperingsstrategier, hvor lavt præsterende primært anvender tællestrategier (Dowker, 2014; Torbeyns et al., 2004). Over tid ses ligeledes at højt præsterende gradvist skifter til mere brug af automatisering og regruppering, hvor lavt præsterende i højere grad fastholder en stor grad af tælling (Ostad, 1997a; Vanbinst et al., 2014).

Denne sammenhæng mellem strategibrug og senere præstation i matematik har jeg haft mulighed for at undersøge blandt 61 elever fra seks forskellige klasser hvor jeg har information om både deres strategibrug i første klasse og deres præstation i matematik i fjerde klasse (for detaljeret beskrivelse, se Sunde, 2019). En foreløbig statistisk analyse viser at man ud fra elevernes strategibrug til etcifret addition tidligt i første klasse i høj grad kan forudsige deres præstationer i matematik i fjerde klasse. Dette gælder i emner som tal og regning, brøker, ligninger og løsning af tekstopgaver. Elevernes strategibrug til etcifret addition blev undersøgt i starten af første klasse. Andelen af de forskellige strategier blev så sammenholdt med elevernes resultater i en matematiktest i starten af fjerde klasse. Statistisk set kan man ud fra børnenes strategibrug i første klasse forklare 30 % af variationen i deres testscore i fjerde klasse. Det er især brugen af strategien tælle alt i første klasse som indikerer præstationen i fjerde klasse: jo højere grad af brug af tælle alt, jo lavere score i fjerde klasse. Omvendt er der en stærk positiv sammenhæng mellem høj grad af brug af regrupperingsstrategier og scoren i fjerde klasse. Man kan anføre at en stikprøve på 61 elever er forholdsvis lille, men denne type data baseret på individuelle interviews er tidskrævende at indsamle. Det er derfor relevant at forholde sig til at på trods af den lille stikprøve er resultaterne entydige og signifikante.

De beskrevne mønstre bunder formodentlig i at regnestrategierne, som beskrevet tidligere, forudsætter vidt forskellig konceptuel forståelse af tal og mængder. Elever som anvender regrupperingsstrategier allerede i starten af første klasse, må formodes at have en forståelse af del-helhed (Canobi, 2004) og opdeling af tal (fx Verschaffel et al., 2007). At kunne arbejde med del-helhed og opdeling og regruppering af tal og mængder er fx vigtigt i udvikling af brøkforståelse (Pedersen & Bjerre, 2021) og arbejdet med ligninger (Chesney et al., 2014). Det er derfor ikke overraskende at elever der tidligt anvender regrupperingsstrategier, scorer relativt højere i en matematiktest i fjerde klasse som netop indeholder den type opgaver, end elever der primært anvender tællestrategier. Det er således ikke regnestrategierne i sig selv, men den talforståelse som de repræsenterer, der ligger til grund for sammenhængen.

Det mest interessante ved undersøgelsen er dog at børnenes strategibrug i første klasse bidrager med information om hvor godt de klarer sig i fjerde klasse, hvilket ikke opfanges af de matematiktest som vi normalt bruger til at evaluere børns matematikfærdigheder i første klasse. Selv når der i analysen tages højde for elevernes færdighedsniveau målt med en matematiktest, MAT-testen (Jensen & Jørgensen, 2007), som i sig selv kan forklare 28 % af variationen i præstationerne i fjerde klasse, bidrager strategibrugen med yderligere statistisk signifikant forklaringskraft på 12 %. I kombination forklarer resultaterne fra MAT-testen og strategitesten i første klasse altså 40 % af variationen i børnenes matematikpræstationer i fjerde klasse.

At regnestrategibrug har større forklaringskraft end en matematiktest, som her MAT-testen, skyldes formodentlig at de fleste af opgaverne i denne type test ligger inden for et talområde hvor tællestrategier kan bruges uden større besvær. Det betyder at elever som ikke har en dybere forståelse for tal og regnearterne addition og subtraktion, godt kan score middel eller måske højt i testen. Der kan fx være tale om rutineeksperter (Hatano, 2003) som klarer sig godt i de simple regnestykker i matematiktesten i første klasse (dvs. de regner rigtigt), men som får sværere ved at løse opgaverne når talområdet udvides og kompleksiteten og kravet til konceptuel forståelse øges i opgaverne i fjerde klasse. De rutinestrategier som var gode i første klasse, fx tælling, er ikke længere hensigtsmæssige i fjerde klasse.

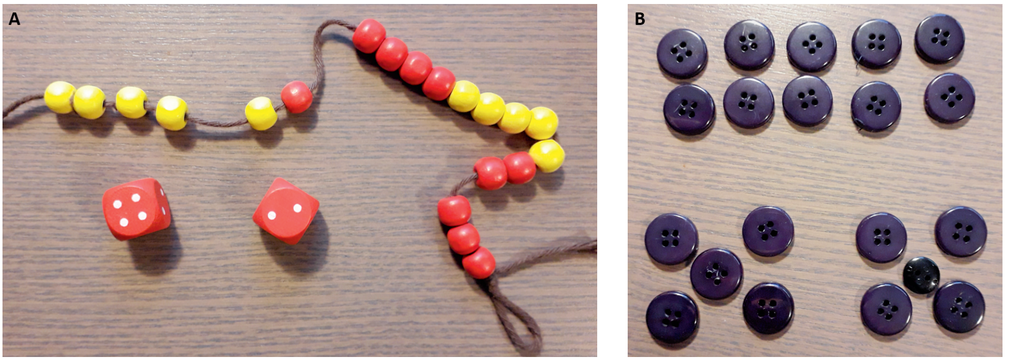
Resultaterne, som er i overensstemmelse med en tidligere undersøgelse ud fra andre data (Sunde & Pind, 2016a), tyder på at regnestrategier med fordel kan anvendes som en tidlig indikator for mulige senere matematikvanskeligheder. Dette giver mulighed for at opdage elever i risikogruppen langt tidligere end hvis man blot anvender standardiserede, generelle matematiktest.

Undervisning og regnestrategier

Forskningen viser altså at regnestrategier er en vigtig faktor i børns udvikling i matematik, og at det især er knyttet til adaptivitet og fleksibilitet, altså det at kunne vælge hensigtsmæssige strategier. Flere studier af undervisningens effekt sammenligner børns strategibrug på tværs af lande, og her ses bl.a. at elevernes strategirepertoire og brug er influeret af den type af undervisning de har modtaget (Geary et al., 1996; Hickendorff et al., 2018; Shen et al., 2016). Så hvordan kan undervisningen støtte denne udvikling? Det centrale her er at de færreste elever udvikler fleksible regnestrategier helt af sig selv og undervisningen har stor indflydelse på elevernes udvikling og valg af strategier.

Både højt og lavt præsterende elever kan udvikle forskellige regnestrategier og opnå adaptiv ekspertise. Det kræver dog at eleverne præsenteres for forskellige strategier, og at der er fokus på udvikling af adaptivitet, altså at eleverne lærer at tilpasse valget af strategi til regnestykkets karakteristika og deres egne færdigheder (Torbeyns et al., 2005). Fx har Clements et al. (2020) dokumenteret at selv særligt dygtige børnehavebørn udvikler fleksible regnestrategier bedre hvis undervisningen tager udgangspunkt i elevernes faglige niveau og undervisningen foregår i veltilrettelagte trin. Hvis undervisningen går for hurtigt frem ved fx at springe vigtige udviklingstrin over, så har eleverne sværere ved at tilegne sig regrupperingsstrategier og den vigtige fleksibilitet selvom den samlede undervisningstid er den samme. Sarama & Clements (2009) beskriver denne form for trin eller læringsstier (learning trajectories) med udgangspunkt i forskningsbaseret viden. Et eksempel kan være at man arbejder med at opdele fx ti centicubes i forskellige grupper. Dermed støttes udviklingen af en automatisering og genkendelse af tiervenner, og dette er første skridt til at udvikle regnestrategier der tager udgangspunkt i regruppering til tiervenner.

I praksis skal undervisningen således centreres omkring udvikling af elevens talforståelse og især forståelsen af at tal kan deles op på forskellige måder (Sarama & Clements, 2009; Verschaffel et al., 2007), hvilket også er vist i figur 2. Som tidligere beskrevet er tællestrategierne de første strategier børn udvikler. Selvom der er en veldokumenteret sammenhæng mellem stor brug af tælling og matematikvanskeligheder, er det vigtigt at forstå at tælling er et vigtigt skridt på vejen i udviklingen af gode strategier. Det er ikke *forbudt* at tælle, men elever der næsten udelukkende tæller, bør støttes i at udvikle talforståelse der gør dem i stand til at udvikle og anvende andre strategier. Man bør allerede i midten af første klasse overveje om en særlig indsats er påkrævet for disse elever.



Figur 4. *Forskellige konkrete repræsentationer til understøttelse af udvikling af talforståelse og regnestrategier. A: talperlekæde og terningeprikmønstre. B: konkreter, her knapper, som kan manipuleres enkeltvis og uafhængigt af hinanden.*

Udviklingen af regnestrategierne skal understøttes med brug af mange forskellige repræsentationer i form af både mængde- og tallinjerepræsentationer og abstrakte repræsentationer, og der skal skabes sammenhæng imellem disse repræsentationer (Sarama & Clements, 2009). Eksempler på konkrete materialer og repræsentationer som kan støtte udviklingen af fleksible strategier, kan inddeles i tallinjerepræsentationer og enkeltelementmodeller. Tallinjerepræsentationer kan være enten en tegnet tallinje eller en lineal. Disse repræsentationer vil ofte støtte en udvikling af tællestrategier når vi arbejder med etcifret regning, men de er gode til at se strategier som + 1 og + 2. En overgangsrepræsentation imellem enkeltelementmodeller og tallinjer er talperlekæder (figur 4A). Enkeltelementmodeller som fx centicubes er gode til at støtte forståelsen af opdeling af tal og til at skabe forskellige talbilleder eller mønstre. I figur 4B ses to forskellige modeller eller billeder af 10 som kan støtte forskellige måder at regruppere på (se også eksemplerne i figur 2).

Det er vigtigt at pointere at der i princippet om adaptiv fleksibilitet ligger at man ikke som sådan kan *automatisere* valget af strategi. I det øjeblik man målretter undervisningen mod specifikke strategier og automatisering af strategivalget ved fx at fokusere på altid at bruge tiervenner, så risikerer man at strategierne får karakter af algoritmer eller procedurer: Når man møder denne type opgaver, så skal de løses på denne specifikke måde. Man risikerer en instrumentel læring og at strategivalget bliver en slags "default"-metode (Blöte et al., 2000; Threlfall, 2002), hvilket kan resultere i udvikling af rutineekspertise.

Afsluttende bemærkninger

Opsummerende viser forskningen at elever som tidligt foretrækker tællestrategier, scorer lavere end deres klassekammerater i matematiktest senere i skoleforløbet. Dette bunder formodentlig i sammenhængen mellem udvikling af regnestrategier og talforståelse. Elevernes tidlige strategibrug har således vist sig at være et godt redskab til at opdage elever i risiko for matematikvanskeligheder så tidligt som i starten af første klasse.

International såvel som min egen forskning i dansk kontekst dokumenterer at talforståelse og regnestrategier er centrale for god udvikling i matematik. Dette er kædet sammen med udvikling af adaptiv ekspertise, altså det at man har et bredt udvalg af strategier og kan anvende dem fleksibelt og adaptivt, også i nye situationer (Hatano, 2003; Verschaffel et al., 2009). Undervisning bør tilstræbe udvikling af adaptiv fleksibilitet med udgangspunkt i tal- og regneforståelse.

I denne artikel har jeg taget udgangspunkt i regnestrategier til etcifret addition, men principper og tilgange kan overføres til andre områder af arbejdet med tal- og regneforståelse. Endelig skal jeg pointere at principperne om adaptiv fleksibilitet ikke kun er knyttet til tal og regning, men er et generelt princip som bør efterstræbes i alle grene af matematikken (Hatano & Oura, 2003).

Referencer

Ambrose, R., Baek, J.-M. & Carpenter, T.P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. I: A.J. Baroody & A. Dowker (red.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructive adaptive expertise* (s. 305-336). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Bailey, D.H., Littlefield, A. & Geary, D.C. (2012). The codevelopment of skill at and preference for use of retrieval-based processes for solving addition problems: Individual and sex differences from first to sixth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(1), s. 78-92. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.04.014.

Baroody, A.J. (1989). Kindergartners' mental addition with single-digit combinations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(2), s. 159-172. https://doi.org/10.2307/749280.

Bjorklund, D.F. & Rosenblum, K.E. (2002). Context effects in children's selection and use of simple arithmetic strategies. *Journal of Cognition and Development*, *3*(2), s. 225-242. https://doi.org/10.1207/S15327647JCD0302_5.

Blöte, A.W., Klein, A.S. & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, *10*(3), s. 221-247. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(99)00028-6.

Canobi, K.H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, *19*(1), s. 81-93. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2003.10.001.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), s. 179-202. https://doi.org/10.2307/748348.

Chesney, D.L., McNeil, N.M., Matthews, P.G., Byrd, C.E., Petersen, L.A., Wheeler, M.C., Fyfe, E.R. & Dunwiddie, A.E. (2014). Organization matters: Mental organization of addition knowledge relates to understanding math equivalence in symbolic form. *Cognitive Development*, *30*(1), s. 30-46. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2014.01.001.

Clements, D.H. & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. I: F.K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 1, s. 461-555). Information Age Publishing.

Clements, D.H., Sarama, J., Baroody, A.J. & Joswick, C. (2020). Efficacy of a learning trajectory approach compared to a teach-to-target approach for addition and subtraction. *ZDM – Mathematics Education*, *52*(4), s. 637-648. https://doi.org/10.1007/S11858-019-01122-Z/FIGURES/2.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), s. 363-381. https://doi.org/10.2307/749085.

Dowker, A. (2014). Young children's use of derived fact strategies for addition and subtraction. *Frontiers in Human Neuroscience*, *7*, s. 924. https://doi.org/10.3389/fnhum.2013.00924.

Faghæftet for matematik (2019). https://emu.dk/grundskole/matematik/faghaefte-faelles-maal-laeseplan-og-vejledning.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. I: D.A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (s. 243-275). Macmillan Publishing Co, Inc.

Gaidoschik, M. (2012). First-graders' development of calculation strategies: How deriving facts helps automatize facts. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *33*(2), s. 287-315. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0038-6.

Geary, D.C., Bow-Thomas, C.C., Liu, F. & Siegler, R.S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development*, *67*(5), s. 2022-2044. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1996.tb01841.x.

Gray, E.M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: Preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), s. 551-574. https://doi.org/10.1007/BF00312715.

Gray, E.M. & Tall, D.G. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), s. 116-140. https://doi.org/10.2307/749505.

Hatano, G. (2003). Foreword. I: A.J. Baroody & A. Dowker (red.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adapting expertise* (s. xi-xiii). Lawrence Erlbaum Associates.

Hatano, G. & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. I: H.W. Stevenson, H. Azuma & K. Hakuta (red.), *Child development and education in Japan* (s. 262-272). W.H. Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.

Hatano, G. & Oura, Y. (2003). Commentary: Reconceptualizing school learning using insight from expertise research. *Educational Researcher*, *32*(8), s. 26-29. https://doi.org/10.3102/0013189X032008026.

Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2018). Grade-related differences in strategy use in multidigit division in two instructional settings. *British Journal of Developmental Psychology*, *36*(2), s. 169-187. https://doi.org/10.1111/bjdp.12223.

Jensen, P.E. & Jørgensen, I.-L. (2007). *Vejledning til mat-prøver: Pædagogisk analyse af matematik.* Dansk Psykologisk Forlag.

Kristiansen, H. (2021). *Kan børn tælle når de kan talremsen | Dagtilbud*. https://matematikdidaktik.dk/temaer/at-taelle/kan-boern-taelle-naar-de-kan-talremsen.

Laski, E.V., Ermakova, A. & Vasilyeva, M. (2014). Early use of decomposition for addition and its relation to base-10 knowledge. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *35*(5), s. 444-454. https://doi.org/10.1016/j.appdev.2014.07.002.

Nunes, T., Dorneles, B.V., Lin, P.-J. & Rathgeb-Schnierer, E. (2016). *Teaching and learning about whole numbers in primary school*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45113-8_1.

Ostad, S.A. (1997a). Developmental differences in addition strategies: A comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology*, *67*(3), s. 345-357. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1997.tb01249.x.

Ostad, S.A. (1997b). Strategic competence: Issues of task-specific strategies in arithmetic. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *3*, s. 7-32.

Pedersen, P.L. & Bjerre, M. (2021). Two conceptions of fraction equivalence. *Educational Studies in Mathematics, 107*(1), s. 135-157. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10030-7.

Pind, P. (2016). *RoS – den lille tabel* (1. udgave). Pind og Bjerre.

Rechtsteiner-Merz, C. & Rathgeb-Schnierer, E. (2015). Flexible mental calculation and "Zahlenblickschulung". I: K. Krainer & N. Vondrová (red.), *CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 354-360). Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01281864/.

Sarama, J. & Clements, D.H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Shen, C., Vasilyeva, M. & Laski, E.V. (2016). Here, but not there: Cross-national variability of gender effects in arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology*, *146*, s. 50-65. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.01.016.

Siegler, R.S. (1996). *Emerging minds: The process of change in children's thinking.* Oxford University Press.

Siegler, R.S. & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Siegler, R.S. & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, *126*(1), s. 71-92. https://doi.org/10.1037/0096-3445.126.1.71.

Sunde, P.B. (2019). *Strategies in single-digit addition: Patterns and perspectives* [Aarhus Universitet]. https://doi.org/10.7146/aul.349.

Sunde, P.B. (2021). *Tælling som svar på hvor mange | Dagtilbud*. https://matematikdidaktik.dk/temaer/at-taelle/taelling-som-svar-paa-hvor-mange.

Sunde, P.B. & Pind, P. (2014a). *RoS – kuffert*. Pind og Bjerre.

Sunde, P.B. & Pind, P. (2014b). *RoS – test*. Pind og Bjerre.

Sunde, P.B. & Pind, P. (2016a). Comparison of two test approaches for detecting mathematical difficulties. I: L. Lindenskov (red.), *Special needs in mathematics education* (s. 141-156). DPU, Aarhus Universitet.

Sunde, P.B. & Pind, P. (2016b). *RoS – test gange*. Pind og Bjerre.

Sunde, P.B. & Pind, P. (2018). *RoS – minus*. Pind og Bjerre.

Sunde, P.B. & Sayers, J. (2017). Danish teachers' expectations of year one pupils' additive competence. Artikel præsenteret ved The Eighth Nordic Conference on Mathematics Education, Norma 17, Stockholm, Sverige.

Sunde, P.B. & Sunde, P. (2019). Development and variance components in single-digit addition strategies in year one. I: U.T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (red.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (vol. TWG02, issue 22). Freudenthal Group. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02401094.

Sunde, P.B., Sunde, P. & Sayers, J. (2020). Sex differences in mental strategies for single-digit addition in the first years of school. *Educational Psychology*, *40*(1), s. 82-102. https://doi.org/10.1080/01443410.2019.1622652.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(1), s. 29-47. https://doi.org/10.1023/A:1020572803437.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2002). Strategic competence: Applying Siegler's theoretical and methodological framework to the domain of simple addition. *European Journal of Psychology of Education*, *17*(3), s. 275. https://doi.org/10.1007/BF03173537.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2004). Strategy development in children with mathematical disabilities: Insights from the choice/no-choice method and the chronological-age/ability-level-match design. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(2), s. 119-131. https://doi.org/10.1177/00222194040370020301.

Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2005). Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction*, *23*(1), s. 1-21. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2301_1.

Vanbinst, K., Ghesquière, P. & De Smedt, B. (2014). Arithmetic strategy development and its domain-specific and domain-general cognitive correlates: A longitudinal study in children with persistent mathematical learning difficulties. *Research in Developmental Disabilities*, *35*, s. 3001-3013. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2014.06.023.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. I: F.K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 557-628). Information Age Publishing.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, *24*(3), s. 335-359. https://doi.org/10.1007/BF03174765.

English abstract

Strategies in arithmetic are important in a student's development in mathematics throughout school. Strategies are related to understanding of number and arithmetic operations and excessive use of counting strategies early in school has been linked to risk of later mathematics difficulties. In this paper, I outline the different aspects of strategies in arithmetic and present example from my own research on grade 1 to 4 students' use of strategies for single-digit addition. Results indicate, that teaching should focus on understanding of number and arithmetic and aim towards adaptive expertise, i.e. the ability to apply strategies flexibly and adaptively.