En CAS- og undersøgelsesbaseret tilgang til differentialregning

Kasper Bjering Søby Jensen, lektor ved Roskilde Katedralskole og medlem af gymnasieekspertgruppen ved NCUM.

Kommentar til Bang, Grønbæk og Larsen: Efteruddannelse i CAS – erfaringer fra fire år med CMU. MONA 2020-4.

Tak for en spændende afrapportering fra fire års arbejde i CMU, Center for Computerbaseret Matematikundervisning (Bang, Grønbæk og Larsen, 2020). Og tak for invitationen til at give konkrete eksempler på hvordan man kan bruge digitale værktøjer som pædagogisk redskab – og ikke bare til opgaveløsning.

Først dog en enkelt kritisk bemærkning om brugen af forkortelsen CAS, der som bekendt står for *Computer Algebra System*. I min optik er CAS et af flere forskellige digitale værktøjer som kan anvendes i en matematikundervisning, men det bliver ofte i gymnasiedebatter brugt som samlebetegnelse for alle former for digitale værktøjer.

I stedet vil jeg foreslå at man netop anvender begrebet "digitale værktøjer", mens CAS-værktøj anvendes om digitale værktøjer der kan udføre forskellige former for algebraiske manipulationer på symbolholdige udtryk, herunder algebraisk ligningsløsning samt analytisk differentiation og integration af funktioner.

Et værktøj der hurtigt kan udføre beregningstunge operationer på store datasæt, eksempelvis en statistisk metode som regression, er således ikke et CAS-værktøj. Det gælder tilsvarende for værktøjer der tegner billeder af funktionsgrafer, eller som tillader at arbejde dynamisk med geometriske situationer.

En nuancering af de enkelte digitale værktøjer ud fra hvad deres funktion faktisk er, kan formentlig være med til at skabe en tiltrængt nuancering i diskussionen af digitale værktøjers anvendelse.

Vi har netop brug for denne nuancering til at lave en skarp skelnen mellem digitale værktøjers rolle i konkret opgaveløsning overfor deres rolle som pædagogisk værktøj ved begrebsindlæring.

Funktionsanalyse i tre trin

I et klassisk gymnasieforløb om funktionsanalyse vil man typisk starte med at beskæftige sig med overgange fra sekant til tangent for at kunne udlede (bevise) en række simple differentialkvotienter samt simple regneregler for disse. Samtidig vil man anvende disse simple resultater til at bestemme afledede funktioner til en række konkrete simple funktioner.

I forlængelse af denne indledning vil man introducere begreber som voksende/aftagende, lokalt og globalt ekstremum samt monotoniforhold. Man vil opbygge sætninger om sammenhængen mellem fortegnsvariation for afledet funktion og monotoniforhold for den funktion den er afledet fra.

Der er mindst tre dagsordener der bliver blandet sammen i et sådan forløb:

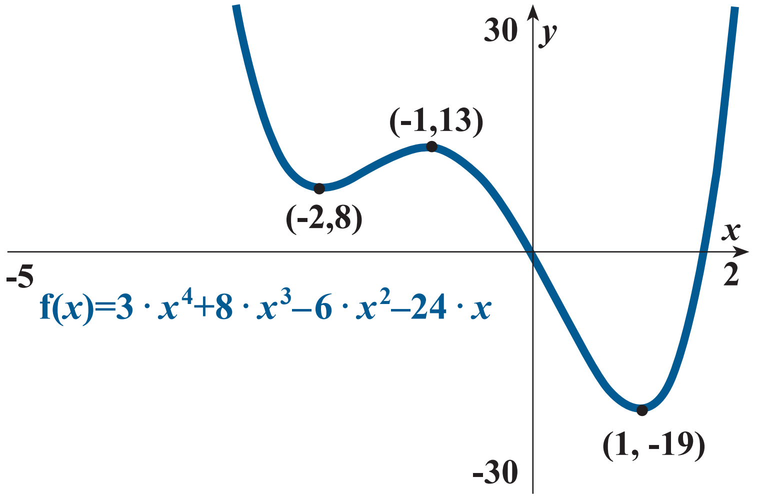
1. Indlæring af en række centrale *begreber* til beskrivelse af en funktion, herunder begrebet "afledet funktion" og dets sammenhæng til de øvrige begreber.
2. Indlæring af *færdigheder* i konkrete teknikker til at bestemme afledede funktioner.
3. Indlæring af den særlige *bevisgang* der knytter sig til beviserne for udledning af simple differentialkvotienter og regneregler for disse.

Før udbredelsen af digitale værktøjer var denne sammenblanding svær at komme udenom (selvom det sikkert er lykkedes for nogen). I grove træk havde man ikke adgang til det ene uden at have gjort det andet. Derfor måtte de tre dagsordener køre parallelt.

Det er imidlertid svært for gymnasieelever, særligt på B-niveauet, at holde rede i alle disse dagsordener på én gang. Det er derfor en pædagogisk styrke at få delt det samlede forløb op i tre adskilte forløb med hver sin dagsorden. Digitale værktøjer skaber en række muligheder for dette.

Over en årrække har jeg selv udviklet gode erfaringer med at opdele funktionsanalysen for mine B-niveau-elever i netop tre forløb. I anden halvdel af 1.g et forløb med fokus på *begreber*. I første halvdel af 2.g et forløb med fokus på afledet funktion og såvel *færdigheder* i bestemmelse af sådanne som deres *teoretiske forbindelse* til begreberne. Og endelig i anden halvdel af 2.g et forløb med fokus på *beviser og bevisgang* i emnet.

Det begrebsorienterede forløb lader sig gøre ved anvendelse af digitale værktøjer der kan tegne grafen for en funktion samt undersøge denne. Det kan være muligheden for at bestemme lokalt minimum og maksimum og på den baggrund opstille monotoniforhold for funktionen ud fra forløbet af dens grafiske billede (se figur 1).



Figur 1. *Eksempel på tegning til brug ved funktionsanalyse baseret på grafisk undersøgelse med programmet TI-Nspire.*

CAS-værktøjer giver ofte også mulighed for at bestemme ligninger for tangenter til et punkt med en bestemt x-værdi. Det kan i TI-Nspire være med kommandoen "tangentline(f(x),x=2)". Det giver mulighed for at indføre og arbejde med begreber som tangent og tangenthældning uden at indføre afledet funktion.

I det andet forløb introduceres afledet funktion som noget der kan bestemmes med CAS-værktøjet, og som bestemmer tangenthældninger (et begreb, der allerede er kendt og trænet). Med dette afsæt kan man eksperimentere sig frem til forskellige anvendelser af afledet funktion samt træne brug af vigtige formler, fx for tangentens ligning.

Det centrale er dog at man med CAS-værktøjet kan gennemføre et induktivt eksperimenterende forløb hvor man bruger CAS-værktøjet til at udlede principper for bestemmelse af afledet funktion uden brug af CAS. Fx ved at bestemme differentialkvotient for x^2, x^3, x^4 og x^5 og herfra generalisere et princip.

I det tredje forløb når eleverne har haft en chance for at forstå indholdet i begrebet differentialkvotient samt udføre færdighedsbaserede differentiation, introduceres centrale beviser for de sætninger som de undersøgte regneregler og sammenhænge bygger på. Her spiller digitale værktøjer en mindre rolle, men bruges typisk til at visualisere "overgangen fra sekant til tangent".

Det er altså ikke et spørgsmål om at erstatte færdigheder og beviser med digitale værktøjer, men om at udnytte sidstnævnte til at fremme forståelsen af førstnævnte pædagogisk mere effektivt.

En faldgrubbe for de svageste elever er at de holder fast i problemløsningsteknikker knyttet til det første forløb; det kunne eksempelvis være ved at bestemme monotoniforhold fra en grafisk undersøgelse, som den vist på figur 1. Men disse elever vil uanset hvad have svært ved at få de mere avancerede teknikker lært, så måske er det netop meget godt at de trods alt får noget af funktionsanalysen på plads.

Funktionsundersøgelse på A-niveau

På A-niveauet vil jeg typisk køre i et lidt højere tempo, men også i tre forløb. Tidligt i 1.g vil vi introducere centrale begreber, herunder afledet funktion, som dog bestemmes alene ved brug af CAS-værktøjer. Typisk bygget op omkring begrebsparrene nulpunkter/fortegnsvariation, lokale ekstrema/monotoniforhold og vendepunkter/krumningsforhold (Jensen 2021).

Anvendelsen af CAS-funktioner til at arbejde med funktioner gør det muligt at arbejde med forholdsvis komplicerede funktioner samt uproblematisk også at arbejde med afledede af højere orden og dermed også bane vejen for senere arbejde med vektorfunktioner og især funktioner af to variable.

Senere i 1.g følges op med andet forløb hvor samme undersøgende tilgang som for B-niveauet anvendes til at opdage en metode til at differentiere funktioner uden CAS-værktøj.

Endeligt falder tredje forløb på et passende tidspunkt i 2.g hvor der med afsæt i grænseværdi-begrebet udvikles beviser for en række af de anvendte sætninger og teoretiske sammenhænge. Men her spiller digitale værktøjet en mindre eller slet ingen rolle.

Det er værd at udvikle gode ideer til undervisningsforløb hvor digitale værktøjer kan bruges til at muliggøre indlæringen af centrale begreber inden for et bestemt emne før andre og mere avancerede aspekter af emnet kommer på dagsordenen.

Andre områder hvor der allerede findes gode eksempler, kan være anvendelsen af dynamiske geometriprogrammer til at udvikle begreber og forståelse af løsninger inden for eksempelvis trigonometri og vektorregning. Og simuleringer af stokastiske processer i et regneark kan danne en god klangbund for sandsynlighedsregningen.

Digitale værktøjer åbner formidable muligheder af didaktisk og pædagogisk art, men er samtidig lidt af en fælde for matematikfaget hvis de får lov vedvarende at spille en alt for stor rolle i problemløsning og opgaveregning.

Referencer

Bang, H.P., Grønbæk, N. og Larsen, C.R. (2020). Efteruddannelse i CAS – erfaringer fra fire år med CMU. MONA 2020(4).

Jensen, K.B.S (2021). Funkteoriens grundbegreber – note til gymnasial undervisning. Kan hentes på http://bjering.dk/mat/funktioner.pdf (23/3-2021).