

Efteruddannelse i CAS – erfaringer fra fire år med CMU



Henrik
P. Bang,
Christianshavns
Gymnasium



Niels
Grønbæk,
Institut for
Matematiske
Fag, KU



Claus R. Larsen,
Christianshavns
Gymnasium

Abstract: *Anvendelse af matematisk software i gymnasieundervisningen har længe befundet sig i et skisma mellem matematikfaglig degeneration og progressive anvendelser. I artiklen skildres en efteruddannelsesmodel som eksplicit adresserer dilemmaet. Ud fra et aktionsforskningsgrundlag bygges på deltagende matematiklæreres engagement i at inddrage computere uden at ofre den matematiske kernefaglighed som gymnasieuddannelserne sigter mod. Vi redegør for det didaktiske fundament og en virksomhedsteoretisk forståelsesramme for modellens implementering af computere i matematikundervisningen. Vi illustrerer modellen gennem eksemplariske deltagerforløb som afdækker fundamentale vilkår, og som peger på at efteruddannelse og erfaringsdeling vedrørende brug af matematisk software vil være et påtrængende behov, også i fremtiden.*

Kort om baggrunden for CMU-initiativet

Introduktionen af CAS (computer algebra systems) i gymnasiet hvilede på en vurdering at CAS er en nødvendig, men også ønskelig udvikling i matematikundervisningen. Nødvendig fordi CAS spillede og fortsat ville spille en rolle i professionel matematik og dermed for matematik fx på videregående uddannelser. Ønskelig fordi CAS gav nye muligheder i matematikundervisningen.

Bag den positive tilgang til CAS lå dansk og international forsøgsundervisning som havde påvist et didaktisk potentiale i CAS. Gevinsten er dog ikke gratis, hvilket allerede tidligt var klart.

Gymnasiereformen i 2005 anlagde et optimistisk CAS-syn og anførte arbejdet med it som en vigtig del af alle aspekter af matematiktilegnelse, det være sig færdighedsindlæring, mere komplicerede manipulationer, matematisering og begrebsdannelse. Men tankerne er meget generelle. Mens Undervisningsvejledningen til Matematik B – STX (Juli 2008) i afsnit 2 om faglige mål og fagligt indhold specificerer det faglige stof (kerne- og supplerende stof) over en række sider, klares anvendelsen af it med få linjer. CAS-anvendelse vurderes som ukompliceret, anskues ikke som

en del af de faglige mål og indhold, men betragtes blot som et – næsten magisk – hjælpemiddel.

Baggrunden for oprettelsen af CMU¹ i 2013/14 var en bekymring om at den udstrakte brug af CAS-værktøjer ikke var modsvaret af udvikling af undervisningsforløb, nye typer aktiviteter og opgaver samt en didaktisk efteruddannelse af lærere. Mere grundlæggende skulle forholdet mellem matematik og værktøj underkastes en revurdering i lyset af computerens slagkraft. Eksempelvis lyder undersøgende tilgang, der fremhæves i officielle styredokumenter, besnærende. Den er imidlertid ikke lige til. Eleverne er allerede vænnet til at benytte computere til en afsøgning af nettet med henblik på at reducere arbejdsprocesserne med fokus på resultat og effektivitet. Matematisk software kommer derfor til at indgå i en kontekst hvor dybdelæring overskygges af hurtige svar og præsentable produkter.

CMUs arbejde med matematisk software har helt overvejende drejet sig om CAS, især platformene Maple og TI-Nspire. Begrundelsen har været at generelle forhold ved inddragelse af matematisk software i undervisningen er særligt udtalte ved CAS.

Efter 10 år med CAS i gymnasiet udkom Matematikudredningen, som gav udtryk for behovet for en bedre fundering af CAS i gymnasiet:

“Elevernes generelle løsningsstrategi for en aflevering med opgaver, der ligner eksamensopgaverne, er: at åbne deres matematikværktøjsprogram, skrive den første opgaves tekst ind, og finde det der skal beregnes eller løses (“solves”).” (Jessen, Holm, & Winsløw, 2015)

Der er mange årsager til den begrænsede CAS-succes. En af de væsentligste er underkendelse af at CAS betyder en afgørende transformation både af matematikfaget i sig selv og af dets didaktik. CMUs mission har været at styrke det matematikfaglige samspil med CAS ved at give deltagende gymnasielærere mulighed for at tilrettelægge særlige undervisningsforløb i det ændrede fag ud fra bevidste og kvalificerede valg.

Coachet aktionsforskning – en model for udvikling og efteruddannelse

På baggrund af vores erfaringer om efteruddannelse og udvikling i gymnasie- og universitetsregi satte vi nogle grundlæggende principper for CMU. Deltagerprojekter skulle bestå af design af undervisningsforløb, tilhørende faktisk undervisning og selvevaluering som tilgodeså CMUs fagdidaktiske agenda om styrkelse af samspil mellem CAS og det matematikfaglige. Deltagelse skulle bygge på den enkelte lærers

1 Center for Computerbaseret MatematikUndervisning, oprettet ved Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet med støtte fra Industriens Fond, Institut for Matematiske Fag, Undervisningsministeriet, Maplesoft.

personlige engagement og have skolens fulde opbakning. Deltagerne ans­kuedes som resurser for en udvikling snarere end personer med behov for opgradering – læreren er ekspert i egen undervisningsvirkelighed. Fastholdelse af projektprocessen, kollegial sparring og feedback skulle have særlig opmærksomhed.

Disse principper blev fastslået i nogle overordnede rammer af kontraktlig natur, op­lagt vedrørende læreren at acceptere CMUs koncept om deltagelse og afrapportering. For skolens vedkommende var forpligtelsen at give deltagende lærere den nødvendige tid til efteruddannelsen og herved at medvirke til deling af de kvaliteter som CMU forsøgte at bibringe matematikuddannelsen i Danmark. CMUs forpligtelse angik de organisatoriske og didaktiske rammer og som noget helt særligt personlig coaching af deltagende lærere. Coachene var gymnasielærere hyret af CMU. Deres overordnede funktion var fastholdelse af projektprocessen gennem kollegial sparring, rådgivende om de konkrete projekter og medierende i forhold til CMUs intentioner.

Et skoleårs projekter afsluttedes med et 2-dages internatseminar hvor deltagerne præ­senterede deres projektforsløb for de andre deltagere i den aktuelle foreløbige version. Internatet var tilrettelagt som et kollegialt miljø til fremme af udveksling af idéer og afklaring i forhold til den endelige projektrapport, men også som et lærerfagligt fællesskab. I et projektår afholdtes et antal coachsamlinger med CMU-ledelsen, dels om de enkelte projekters fremdrift, dels med matematikdidaktiske oplæg/workshops af relevans for det generelle CMU-projekt.

	april	maj	jun	aug	sep	okt	nov	dec	jan	feb	mar	april	maj	jun
Udbud														
Godken­delse														
Gennem­førelse														
Evaluering														
Afslut­ningsin­ternat														
Projektrap­portering														
Coachsam­linger														

Tabel 1. Tidslinje for projektafvikling.

I årene 2014-2017 gennemførtes mere end 50 undervisningsforløb ved individuelle lærere fra alle niveauer i STX, HTX, HHX og 8 skoleprojekter med samarbejdende lærere fra et gymnasium. I alt har mere end 90 lærere fordelt på 27 skoler deltaget. Der var i forløbet tilknyttet i alt 7 coaches. En årlig coachportefølje bestod af 6-7 individuelle deltagere eller 4 skoleprojekter.

I samråd med coachene udarbejdede vi en model for projektprocessen og coach-lærer-samarbejdet. Det er i det væsentlige aktionsforskningsmodellen 'den reflekterende praktiker' (Jaworski, 2014). Andre inspirationskilder har været (Dale, 2008), RUME-projektet (Dubinsky, 1997) og (UCLA Curtis Center for Mathematics and Teaching, 2007).

SSS-modellen

Modellen udgøres af de tre S'er: 'Startstedet' for projektet opfattet som det enkelte projekts oplæg og overordnede bærende idé, 'Sløjfen' der forbinder den bærende idé med den gennemførte undervisning, og 'Stafetten' der konkret og løbende forbinder de enkelte dele af undervisningen med hinanden.

Ved 'Startstedet' kan læreren være alt fra interesseret i at gennemføre et projekt til at have et mere eller mindre færdigudtænkt projekt, og som CAS-bruger kan læreren være alt fra novice til ekspert. En vigtig del af 'Startstedet' er i samarbejde med coachen at udarbejde en slagplan for projektet på baggrund af den/de bærende matematiske eller didaktiske idé/idéer.

'Stafetten' er dialogen mellem coach og lærer om udarbejdelse af forløb, tilpasning undervejs, udarbejdelse af materialer m.m. Konkret består den i konsultation telefonisk eller via mail og i besøg af coach på skolen.

'Sløjfen' er central for at fastholde og videreformidle refleksioner over undervisningsforløbet. I CMU's model knyttes Sløjfen med et mundtligt oplæg for en mindre gruppe på det afsluttende seminar. På grundlag af feedback herfra udarbejdes en dokumentation af det gennemførte projekt i form af undervisningsplaner, udarbejdet materiale og refleksioner. For at lette deltagernes arbejde hermed og for at sikre en vis ensartethed udformede CMU en vejledende skabelon til afrapportering. De færdige projektbeskrivelser blev efterfølgende lagt op på CMU's hjemmeside (CMU, 2020).

Coachens rolle og kompetencer

Deltagerevalueringerne priser dialog med coachen om værktøjsbrug og læreproces og støtten til egen projektproces, og mere end 90 % af de deltagende lærere er nået helt i mål i form af endelig projektrapportering.

Coachkvalifikationer er mangesidede. Ud over en solid matematikfaglig baggrund kræves et indgående kendskab til CAS-værktøjer sådan at man kan bidrage med idéer og inspiration og helt konkret sparre på udformning af arbejdsark m.m. En central del

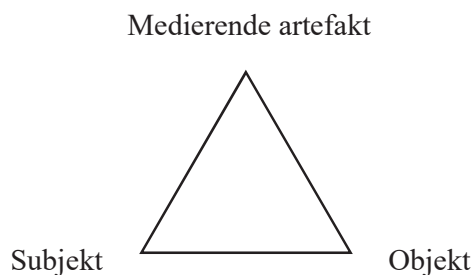
af coacharbejdet var løbende dialog og deltagelse i seminarer med ledelsesgruppen. Her udvikledes en fælles forståelse af forskellige almene tendenser vi så i projekterne. Dette fordrer en velfunderet praksisindsigt i didaktiske aspekter knyttet til brug af CAS i undervisningen. Endelig er kvaliteter der vedrører selve coachfunktionen, helt essentielle, herunder hvordan man håndterer mulige konflikter eller flytter grænser.

Først og sidst er coachens opgave selvfølgelig at sikre at projektet kommer fra 'Startstedet' til 'Sløjfen', den enkelte lærers faktiske udbytte af projektet. Coachen spiller endvidere en vigtig rolle i knytningen af Sløjfen gennem støtte af oplæg og ved sikring af projektdokumentationen som bidrag til almen videnformidling.

CMU-modellens teoretiske indlejring

Virksomhedsteori

Computeres indvirkning på matematiklærervirkelighed bør ses i en sammenhæng som inddrager didaktiske, systemiske og socialpsykologiske omstændigheder. Virksomhedsteori er velegnet for et sådant perspektiv. Udgangspunktet er Vygotskys trekant, Figur 1 (Vygotsky, 1978).



Figur 1. Den grundlæggende virksomhedsteoretiske trekant.

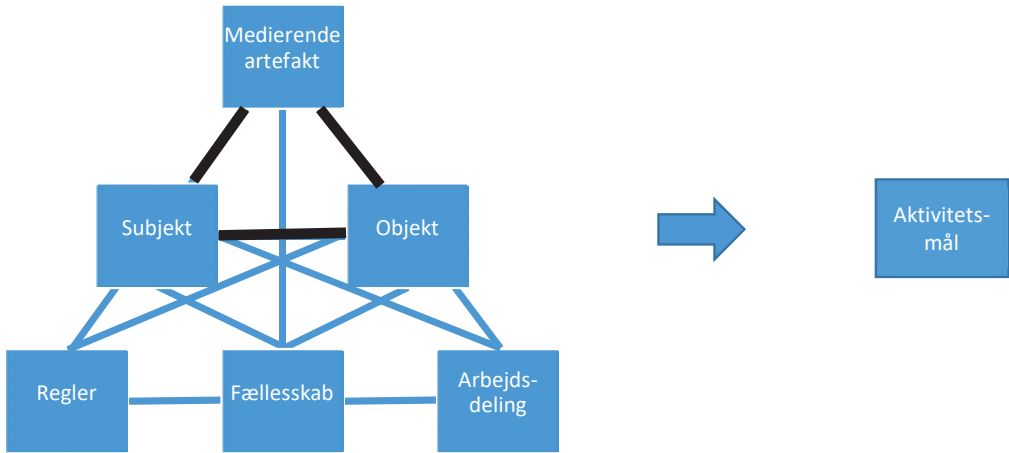
'Subjekt-objekt' skal ikke blot forstås som 'person-ting', men snarere som i grammatik: subjekt-(verbum)-objekt, noget indvirker på noget. Med 'artefakt' menes en menneskelig frembringelse som kan henføres til bestemte kulturelle/sociologiske forhold. Artefaktet ansues som noget *i sig selv* med et bestemt (uudfoldet) potentiale, fx en formelsamling. Artefaktet medierer subjekt-objekt-relationen. Virksomhedsteoriens fundamentale påstand er at der er ikke nogen subjekt-objekt-relation uden et medierende artefakt. Det giver ingen mening at analysere siderne i Vygotskys trekant uden at inddrage det modstående hjørne. Vygotskys trekant er en 'unit of analysis'. Herved placerer virksomhedsteori afgørende vægt på 'redskaber' og har derfor med informa-

tionsteknologien fået (fornyet) betydning som forståelsesramme for menneskelig virksomhed. Virksomhedsteoretiske aspekter af matematikdidaktik har i overensstemmelse hermed haft stor vægt, se fx kap. 9 i (Monaghan, Trouche, & Borwein, 2016). CMUs mission vedrører bestemte inkarnationer af Vygotskys trekant: Subjekt-objekt relationen drejer sig udadtil om udøvelse af matematiske og matematikdidaktiske hverv, dvs. om at svare på mere eller mindre afgrænsede matematiske problemer eller at planlægge og udføre undervisning. Indadtil handler det om tilegnelse af computers matematiske og matematikdidaktiske muligheder.

CMU's virke angik lærerens tilrettelæggelse og udførelse af undervisning, på den ene side 'klassisk medieret' med blyant og papir og på den anden side med computer der medierer i input-output-termer vha. et software-bibliotek e.g. Maple, Geogebra, Excel, TI-Nspire, WordMat. Det fundamentale samspil/modspil mellem disse to medierende artefakttyper er eksplicit i de fleste CMU-projekter. Mens papir-blyant-medieringen hovedsagelig har været virksomhedsteoretisk ukompliceret, er forholdet mellem udadrettet mediering (fx CAS-matematisering af et problem) og intern mediering (forståelse, beherskelse af dele af det implementerede softwarebibliotek) et kernepunkt i anvendelse af digitale teknologier i matematik.

Vygotskys trekant er efterfølgende blevet modificeret og udbygget på mangfoldige måder. I (Wartofsky, 1979) indføres en klassifikation på 3 niveauer af artefakter: Primære artefakter ('hvad'-artefakt) som relateres direkte til produktion, fx en kommandolinje i et matematisk software eller en anvisning til elever om en bestemt computeraktivitet, sekundære artefakter som relaterer sig til primære artefakter ('hvordan'-artefakt), fx en vejledning i brug af CAS-værktøj eller undervisningstilrettelæggelse medieret af en hypotetisk CAS-læringsbane, og tertiære artefakter som vedrører sekundære artefakter ('hvorfor'-artefakt), fx ved at give begrundelser for valg af software, men også mere overordnet politik, visioner, didaktik om brug af matematisk software. Herved gives et hierarki af 'units of analysis', som alle er relevante for den udøvende lærer, og som har været styrende for CMUs arbejde.

I (Engeström, 1987) udbygges det virksomhedsteoretiske begrebssystem til en mere nuanceret teori som eksplicit inddrager den samfundsmæssige kontekst (dvs. alle interessenter i det pågældende virksomhedssystem). Vygotskys tre basale komponenter udvides med Wartovskys hierarkiske struktur og flere interessenter, arbejdsdeling, fællesskab (community) og regler (Figur 2).



Figur 2. Engestrøms virksomhedssystem.

Den udvidede virksomhedsteoretiske struktur er i Engestrøms opfattelse en 'unit of analysis'. De konstituerende trekanter repræsenterer hver især en medieret virksomhedsrelation. Fx medierer 'regler' 'fællesskab-subjekt'-relationen og 'arbejdsdeling' medierer subjekt-objekt'-relationen.

Engeström angiver kun en struktur og forbigår at pilen er normativ. Subjektet er ikke blot underlagt diagrammets dialektiske omstændigheder. Hvad er subjektets motiv for at indgå og udforme den faktiske relation til objektet, og hvordan erkender en interesser sig selv som objekt i nogle Engestrømske relationer, artefakt i andre samtidig med at være subjekt i tredje? Vi bruger derfor i første omgang Engestrøms diagram til en delvis kortlægning gennem en opremsning af de vigtigste virksomhedsteoretiske interesser. Herefter redegør vi for CMU's placering og motiver.

Regler: Love og bekendtgørelser. Ministerielle læreplaner og vejledninger. Vejledende opgaver (herunder tidligere eksamenssæt). Standarder for matematikudøvelse, herunder standarder for anvendelse af digitale teknologier. Standarder for undervisning og læring (e.g. eksperimenterende, undersøgende, it-baseret, sekvensering af undervisningsformater, digital dannelse). Disse standarder er såvel officielt nedfældede som kollegiale. Overenskomster for arbejdsmarkedet. Faglige timetal. Ledelsesprincipper (top-down, bottom-up).

Fællesskab: Dette udgøres af alle sociale sammenhænge som er af relevans for subjekt-objekt'-relationen. Der er tale om et meget omfattende interessefællesskab, men ikke et paradigme­fællesskab eller målsætnings­fællesskab. Fællesskabet er således præget af modsætninger. Nogle vigtige medlemmer af fællesskabet er uddannelses­politikere, interesseorganisationer (DI, Finans Danmark, Danske Gymnasier), arbejds­markedsorganisationer (GL, Moderniseringsstyrelsen), faglige foreninger (Matema-

tiklærerforeningen herunder regionalgrupperne), netværksgrupper (e.g. Facebook), de enkelte gymnasier, skoleledelsen, skolesamarbejde, skolens faggrupper (specielt selvfølgelig matematiklærergruppen), uddannelsesforlag (Systime, L&R, Gyldendal) og softwareproducenter (Maple, Texas Instruments, Geogebra, Microsoft).

Arbejdsdeling: Efteruddannelse, lærerteams, individuel lærer, vidensdeling, 'frikøb' og anden støtte til udvikling, (it-)ressurser.

Aktivitetsmålet er først og fremmest bestemt af hvem subjekt er. Hvis det er 'lærer', er essensen i CMU-sammenhæng undervisningstilrettelæggelse. I tilfældet 'elev' er målet 'læring' dvs. at løfte subjekt-objekt'-aktiviteterne fra genstandsområdet til at være en del af et generelt beredskab, subjektets 'teori' om matematikhandlinger. Vi fremhæver at der intet idealistisk skal lægges heri. Målet er resultatet af et samspil mellem subjektets motiver og de forskellige medieringer af subjekt-objekt-relationen. Der vil ofte være et pragmatisk aspekt. Fx kan målet for både lærer og elev være at optimere eksamensperformance, således som det er påpeget adskillige steder, fx (Jessen, Holm, & Winsløw, 2015).

Virksomhedsdiagrammet rummer en række dilemmaer for de enkelte lærere, konflikter som overvejende har rod i fællesskabets interessenmodsatninger. En dybere analyse af dette kompleks falder uden for denne artikels sigte. Vi påpeger her nogle iøjefaldende forhold som har været bestemmende for CMU's arbejde. Det mest åbenbare er hvorledes 'regler' i form af læreplaner/vejledninger medierer subjekt-objekt-relationen motiveret af interesser i it-modernitet og it som produktivkraft ('vi skal være i front af it-udviklingen') i modsætning til eksamensnormer i form af opgavesæt der skal sikre 'løft af eksamensresultater'. Den ene mediering skal fremme kognitiv frisættelse, mens den anden udgør en fare for kognitiv regression. Kompetencer reduceres til eksamenspræstation. En stigende opmærksomhed om dilemmaet ses i ministerielle styredokumenters udvikling fra 2005-reformens bagatellisering af didaktiske problemer med den digitale dagsorden til 2017-reformens mere detaljerede beskrivelse af ændring af undervisningens indhold og vilkår. Etableringen af CMU, herunder forløberprojekter i 2008-2009 og 2011-2013 støttet af UVM (CMU, 2017), var foranlediget af dette dilemma. CMU er født med det ene ben i gymnasiet og det andet i universitetets matematikundervisning, fokuseret på gymnasiet matematikundervisning og med tilhør på Institut for Matematiske Fag, KU som udtryk for universiteternes forpligtelse til at sikre det samlede uddannelsessystems faglige bonitet. Umiddelbart syntes dilemmaet at handle om overgang mellem uddannelsesniveauer: Er gymnasiet brug af matematisk software kompatibel med den indledende universitetsmatematikundervisning hvor fx Maple er fremherskende? Hvordan sikrer man at gymnasiet matematiske software peger ud over skolen selv og bliver andet end et pædagogisk redskab til at opbløde 'hård matematik' inden for institutionens egne rammer? Det blev dog hurtigt klart at den

fundamentale modsætning mellem kognitiv frisættelse og kognitiv regression var et fælles anliggende for sekundær og tertiær uddannelse. I gymnasiesammenhæng fremhæves 'trekantssolveren' ofte som et eksempel på regression. Trigonometrisk forståelse reduceres til korrekt indtastning af trekantsdata. I universitetssammenhæng er et eksempel at flux af vektorfelt reduceres til beregningsalgoritmer til hvilke de studerende kan levere korrekte input i relativt komplicerede tilfælde, men hvis betydning i de begrebsdannende (banale) eksempler de ikke kan redegøre for ud over algoritmens resultat. Universitetsundervisningen kan altså ikke umiddelbart tjene som et pejlingsmærke for indsigtsgivende anvendelse af matematisk software. Snarere udtrykker CMU's forankring på Institut for Matematiske Fag den opfattelse at matematik er ét fag med institutionelle overgange som begge institutioner har ansvar for. Dette har bl.a. vist sig ved CMU's insisteren at projekternes matematiske kernebegreber hvilede på stofdidaktisk analyse.

Et andet fundamentalt konfliktforhold findes i fællesskabets mediering af 'arbejdsdeling – subjekt'-relationen. Skoleledelsens interesse er bl.a. funderet på økonomiske resurser til opgradering af it-beredskab (udstyr og efteruddannelse), skolens uddannelsespolitiske og pædagogiske profil og skolens medarbejderpolitik mht. den enkelte lærer og lærergrupper. CMU's samlede projektportefølje vidner om vidt forskellige afvejsninger af disse. De fleste deltagere har opfattet et CMU-projekt som et frirum til udvikling af lærerkompetencer både personligt og kollegialt og har selv taget initiativ til deltagelse. Enkelte skoler har deltaget i såkaldte skoleprojekter med deltagelse af hele den matematiske faggruppe. Skoleprojekterne har været resultat af en top-down ledelsesbeslutning med en markant anderledes medarbejderpolitik hvor nogle lærere følte sig tvunget med. CMU's coachkoncept var afgørende for at skoleprojekterne overvandt den indledende delvise modvilje.

Den måske mest afgørende konflikt skyldes den statslige mediering ud fra et arbejdsgivermotiv. Omprioriteringsbidrag og Moderniseringsstyrelsens sejr i OK13 om lærernes arbejdstid er i oplagt modsætning til uddannelsespolitiske målsætninger om højnelse af uddannelsernes kvalitet. Som konsekvens af skolernes selveje skal den enkelte skole forsøge at forlige disse modsætninger. Dette gav oplagt dårlige vilkår for efteruddannelse. I det første projektår var der stort set ingen projektdeltagere, så reelt blev CMU's virke udskudt et år. Lignende forhold gjorde sig gældende i andre efteruddannelses tiltag.

At de fundamentale subjekt-objekt-relationer, 'lærer-undervisningstilrettelæggelse' og 'elev-matematikproblemer' ikke fuldbyrdes i de tidlige faser af brug af digitale teknologier i matematikundervisningen, skyldes i høj grad at de blev anskuet uden hensyn til Vygotskys 'unit of analysis'. Digitale værktøjer betragtedes som noget der kan *inddrages* som *hjælpemidler* i en subjekt-objekt-relation hvis grundlæggende natur forbliver uændret. For læreren optræder de som en slags effektivisering af en i

øvrigt dækkende universitetsuddannelse, for eleverne ses de som en teknisk fjernelse af visse forhindringer. Herved 'frisættes' eleverne til arbejdet med de samme fagligheder som før. De digitale værktøjer fremstår som omkostningsfrie – der er blot tale om en resurse der byder sig til, se fx (Kissane, Kemp, & Bradley, 1997). Det er fejlagtigt på to måder. At udnytte digitale værktøjer progressivt kræver en betydelig indsats af brugeren og natur og indhold af relationen matematikudøver – matematisk hverv ændres fundamentalt.

CMU skal som virksomhedsteoretisk interessant placeres i fælleskabet med primær interesse i mediering af subjekt-objektrelationen i form af tilrettelæggelse af computerbaserede undervisningsforløb med det sigte som vi har beskrevet. Vi indså tidligt vigtigheden af relationer med 'regler' og 'arbejdsdeling'. Computerens betydning for matematik bør erkendes i kongruens med de samfundsmæssige matematikbehov ud fra en fælles forståelse gennem alle niveauer og forgreninger af uddannelsessystemet. I maj 2014 afholdt CMU i samarbejde med DTU Compute konferencen Fremtidens Matematik² med oplægsholdere fra universiteter og erhvervsliv med fokus på det 21. århundredes matematikuddannelser: Hvilke kompetencer er afgørende for vores elever og studerende i en verden der i stigende grad styres af avanceret computerbaseret matematik? Hovedbudskabet var at digitale teknologier mangedobler det matematiske potentiale, men ikke kan erstatte fundamental matematisk indsigt.

Det var fra begyndelsen klart at en syntese mellem kernefaglighed og software-potentiale ikke ville finde sted uden ændring af den arbejdsdeling som lærere i almindelighed er underlagt. Coachmodellens funktion er at fremme en arbejdsdeling med kollegial sparring og fastholdelse af udviklingsprocessen. Det bygges på den enkelte lærers motivation og arbejdsmæssige muligheder. Dette kræver finansiering. CMU afholdt coachudgifterne m.m. gennem økonomisk støtte fra Industriens Fond og Institut for Matematiske Fag, KU. Skolernes medfinansiering bestod i at give det nødvendige lærerfrirum typisk i form af 40 timers arbejdsreduktion. En lærer kunne ikke deltage uden en sådan forpligtelse fra sin skole. Ud over at forhindre 'fritidsefteruddannelse' sikredes herved også at CMUs faglige mission anerkendtes som en del af skolens ergonmi.

Matematikdidaktik

De lærende må nødvendigvis selv opbygge indsigt og handlepotentiale. Det kan ikke påføres. Dette er vores didaktiske udgangspunkt. Vi vil belyse de principielle muligheder og begrænsninger ved computeranvendelse ved nedslagspunkter i tre fremherskende teoridannelser – (1) læringsteoretisk om erkendelse, (2) kognitiv ergonomisk

2 https://www.math.ku.dk/english/research/conferences/2014/konference_fm/

om disciplin/redskab, (3) antropologisk om matematik som menneskelig adfærd. Der er tale om en pragmatisk tilgang. Vi hævder intet paradigme-fællesskab mellem disse teoridannelser, ej heller er der tale om egentlig 'networking of theories'.

(1) Læringsteoretisk har (Sfard, 1991) været dominerende. Erkendelse opnås ud fra processer, fx at tælle. Erkendelsesfremdrift består i *reificering*, dvs. at det processuelle kan tilgås under ét som objekt (in casu, tal) uden reference til delelementer af processen. Processen er blevet en struktur i sig selv som kan indgå som elementer i processer (e.g. at addere) på et højere erkendelsesniveau. Undervisningstilrettelæggelse består i at understøtte denne dualitet i en faglig progression. Sfard forholdt sig imidlertid ikke til konkrete medier, redskaber eller institutionelle rammer. APOS-projektet (Asiala, et al., 1996) udviklede med nogenlunde samme udgangspunkt (konstruktivisme, processtruktur) et koncept for matematiklæring baseret på en algoritmisk og hermed processuel tilgang til matematiske begreber. Tilgangen er proklameret computerbaseret. 'Concepts first' (se fx (Heid, 1988)) bestræbelsen har taget det modsatte udgangspunkt. Hovedtesen er at sætte begreberne forud for processerne, fx addition ved først at bruge +-operatoren i det digitale værktøj og derefter slutte af med færdighedstræning (af det nu kendte begreb).

(2) Et CAS-program er et artefakt. Det kræver aktiv indsats af brugeren at virkeliggøre artefaktets muligheder i forhold til bestemte matematiske hverv. Gennem målrettede aktiviteter, læring og problemløsning formes kognitive skemaer for anvendelse. Brugeren realiserer artefaktets potentiale og omvendt former artefaktets muligheder og begrænsninger brugerens virke. Denne dialektik er fundamentalt den samme som når fx 'musiker-instrument' skabes ud fra 'person-guitar'. Processen kaldes *instrumentel genese* (Trouche, 2014).

(3) Matematik som målrettet menneskelig adfærd beskrives i ATD (antropologisk teori for didaktik (Chevallard & Sensevy, 2014)) som udførelse af bestemte hverv og et rationale for udøvelsen. Læreren er leder af didaktiske processer, hvis mål er tilvejebringelse af meningsfulde relationer mellem elever og viden/udførelse i områder af matematikken inden for institutioner, typisk en skoleklasse og dens lærer. Læreren foretager strategiske valg om udførelse og rationale med henblik på de institutionelle læringsmål, fx om anvendelse af computerteknikker og rationale herfor.

Analyse af tre udvalgte projekter

Den løbende dialog med coachene, Sløjfen (afslutningsseminar og afrapportering) og interviews med udvalgte projektdeltagere har muliggjort at ledelsen har kunnet følge projekterne tæt. Vi præsenterer og diskuterer empiriske elementer til analyse af CMU's efteruddannelsesmodel. De repræsenterer en betydelig variation i emner, elevniveau, lærerbaggrund og -erfaring og motiv for deltagelse. Beskrivelserne skal

vise de muligheder projekterne har givet for refleksion over egen praksis inden for de overordnede institutionelle rammer fastlagt af CMU.

Empirien bag beskrivelserne udgøres af

- Projektdeltagernes dokumentation og selvevaluering af forløb på CMU's hjemmeside i SSS-modellens format eller dennes forløber (CMU, 2020).
- Undervisningsmateriale udarbejdet af projektdeltagere.
- Projektdeltagernes slidepræsentationer om projektet på SSS-modellens afsluttende seminar.
- Semistrukturerede individuelle interview, dels generelt om projektforløbet og i tilfældet S et længere interview ud fra en ATD-tilgang om til- og fravalg af CAS
- Coachenes statusrapporter på coachmøder.

Projektdeltagerne J og P er nogle af de første som gennemførte et CMU-projekt. Erfaringerne herfra har medvirket til udarbejdelse af CMU's endelige projektkoncept.

Projektdeltager J

J har mange års undervisningserfaring og benytter CAS-plattformen TI-Nspire. Projektclassen er 2. g. med matematik på A-niveau og forløbet omhandler chi-i-anden-test baseret på fremstillingen i (Grøn, Felsager, Bruun, & Lyndrup, 2014). J angiver læringsudfordringerne:

“I statistik er der mange begreber – Statistik bliver enten meget enkelt og redegørende - ...eller det bliver tungt og svært – Hvordan kan det blive et eksamensspørgsmål, der tilgodeser ræsonnementet?” (Chi-i-anden-test, Afsluttede projekter 2015 (CMU, 2020))

J ønsker at bruge CAS-simuleringer af chi-i-anden-fordelinger eksperimentelt som middel til at møde udfordringerne. Forløbet var planlagt til 18 lektioner.

J formulerede to formål med CMU-projektet, ét der vedrører elevernes læringsmål og ét der vedrører lærerkompetencer om undersøgelsesbaseret undervisning i et CAS-miljø. Begge mål formuleres ift. det konkrete undervisningsforløb, men J lægger vægt på også at opnå kompetencer der kan bruges ift. andre tilsvarende forløb. Læringsanskuelsen er proces/struktur-dualisme:

“... blive bedre til at lave en veksling mellem det eksperimenterende matematik og det teoretiske. At få integreret CAS-værktøjet som en del af læringen ... også at få de mere CAS-forskrækkede elever til at blive mere fortrolige med mediet.” (ibid.)

Coachen har hjulpet med tilpasning af TI-N-spire og med at fremskaffe materiale der belyser forbindelsen mellem simuleringstilgangen og chi-i-anden-fordelingen.

Der er fx følgende i en skriftlig kommunikation fra coachen:

“... hvis man vil arbejde med at forstå ... chi-i-anden-værdi ..., skal man lave mange simuleringer af det samme eksperiment Eleverne kan også indtegne sandsynlighedstæthedsfunktionen med de aktuelle antal frihedsgrader og sammenligne og beregne areal under grafen, svarende til 95 % ...” (ibid.)

Kommentaren følger efter nogle forslag til konkret N-spire kode og vedrører i høj grad den måde simuleringen kan indgå i undervisningsforløbet. Coaching omhandler ikke kun værktøjet, men også didaktisk design og instrumentel genese for lærere såvel som elever.

J har været meget positiv overfor efteruddannelsesforløbet og lagt vægt på de særlige muligheder der ligger i coaching med et fokus på lærerens egne matematikfaglige og didaktiske ønsker og behov.

Js overvejelser og selv-evaluering, fremkommet gennem fokusgruppe-interview, indgik i det efterfølgende CMU-arbejde. Js forløb involverer hele det Wartofskyske hierarki. J havde på forhånd udtrykt ønske om støtte på det primære artefaktniveau niveau både personligt og for eleverne. Hvad kan TI-Nspire egentlig udføre? Dette er essentielt et spørgsmål om instrumentel genese. Den anførte coachkommunikation om hvordan forløbet kan tilrettelægges, angår det sekundære niveau. Hvordan udnyttes CAS-mulighederne i den erklærede hensigt? I Js overvejelser om udbygning af egne it-kompetencer i relation til progressive undervisningsformater (e.g. eksperimenterende matematik) anskues computeren som artefakt på tertiært niveau. CMU-skabelonen til et fælles afrapporteringsformat er bl.a. udviklet på baggrund af erfaringerne med J, ligesom CMU's overvejelser om oplæg til projektdeltagere, fx vedrørende dialektikken mellem computer og matematisk indhold, er inspireret af samtaler med J og Js coach. Alle tre sider i den virksomhedsteoretiske trekant 'lærer-CMU-undervisningstilrettelæggelse' er således udtalte. Relationerne 'CMU-lærer' og 'CMU-undervisningstilrettelæggelse' belyses og formes gennem interaktionen med læreren. Dette er den dybe mening bag CMU's proklamation af læreren som resurse.

Projektdeltager P

P er en relativt erfaren lærer med mangeårig baggrund som ingeniør. Projektclassen er 2. g med matematik på B-niveau. Projektet omhandler indledende differentialregning med fokus på sekant/tangent gennem tretrinsmetoden. CAS-plattformen er TI-Nspire.

Ps projektidé blev udviklet i løbet af et seminar for projektdeltagere. P tog udgangspunkt i seminarets oplæg om stofdidaktisk analyse, både ved udarbejdelsen af sit konkrete forløb og den efterfølgende evaluering.

P har været coachet både på skolen og via nettet. P beskriver sine negative erfaringer med at lave opgaver hvor eleverne gennem mange blyant-papir-beregninger skulle få en fornemmelse af grænseværdi for sekant-hældninger, og ønsker at imødegå mange års frustration. P beskriver sin målsætning:

“... at give eleverne en hands-on oplevelse af beregning af sekant- og tangenthældning samt grænseværdi. Fordelen ved at benytte CAS ... at det ville fremme elevernes forståelse for stoffet, at de kunne arbejde selvstændigt med emnet.” (Differentialregning, tretrinsreglen, Afsluttede projekter 2015, (CMU, 2020))

P lægger sig op ad de betragtninger som vi anførte i de tidlige faser af computer-baseret matematikundervisning (Kissane, Kemp, & Bradley, 1997). På baggrund af stofdidaktisk analyse udpegede P tolv punkter der er en forudsætning for forståelse af tretrinsmetoden som den traditionelt behandles. Det er fx afklaring af hvad der menes med $f(x + \Delta x)$ når man indsætter i funktionsudtrykket $f(x) = x^2$, eller algebraiske forudsætninger såsom kvadratsætninger og brøkmanipulationer. Tre af disse punkter blev identificeret som steder hvor CAS og visualisering kunne være fordelagtig.

Ps egen vurdering af projektet er at det først og fremmest har betydet noget i hans egen måde at se på stoffet på:

“Det mest givende for mig har uden tvivl været at indse, hvor megen baggrundviden det kræver at forstå tretrinsreglen.”

Ps arbejde var fundamentalt for CMU's interne diskurs om effekten af inddragelse af CAS i undervisningen. Vi fremhæver her betydningen af tid. Hvor en blyant-papir-tilgang til visualiseringen af sekant-tangent-overgangen er tidskrævende og kun realistisk udført i ganske få trin, giver værktøjerne mange andre muligheder. Ps overordnede iagttagelse var imidlertid at eleverne forholdsvis hurtigt kom igennem visualiseringerne. De rykkede på skyderne og iagttog at sekanterne nærmede sig tangenterne, men drog kun overfladiske konklusioner heraf. Aktiviteten som proces er ikke rig nok til at føre til reificering.

I senere diskussioner på CMU's seminarer anvendte vi bl.a. termen 'CAS fastfood' om den slags observationer. Man afskaffer tidskrævende elevarbejde med en CAS-tilgang, men i stedet for at brugen af værktøj udfordrer og giver større dybde, bliver iboende træk ved computertilgangen, som eleverne jo også kender i andre sammenhænge (e.g. overfladisk google'ing i stedet for egentlige studier), dominerende. Elevernes målopfyl-

delse, at aktiviteten overstås, er i modstrid med læringsintentionerne. Det egentlig tidskrævende arbejde bliver på den måde ikke elevernes, men lærerens, der har arbejdet i timevis med at få visualiseringen til at virke. Dette misforhold ændres ikke afgørende ved at benytte færdiglavede applikationer. Der er stadig et betragteligt lærerarbejde i at forhindre 'CAS-fastfood'. Ps minutiøse stofdidaktiske analyse og refleksioner gjorde det klart i CMU at en del af forklaringen er at standarder (regler i Engeströms skema) for brug af computere reelt blot er tilpassede blyant-papir-standarder, men uden tilpassede normer for kvalitet. P transskriberer en standard for blyant-papir-mediering trin for trin til en computer-mediering af den selvsamme subjekt-objekt-relation i et forsøg på at fremtvinge kognitive aspekter som knytter sig til standarder for blyant-papir-matematik. I de senere år har betydningen af standarder for computeranvendelse fået stigende opmærksomhed, se fx (Trgalová & Tabach, 2018).

Projektdeltager S

S er en yngre lærer, på projekttidspunktet i gang med sit 7. undervisningsår i gymnasiet. Han er en erfaren bruger af Maple. Projektklassen er 3. g. med matematik i studieretningen, og forløbet handler om binomialmodel ud fra simulering med en af Maples tilfældighedsgeneratorer. På baggrund af teoretiske overvejelser i (Bang, Grøn­bæk, & Larsen, 2017a) er S blevet interviewet om sine strategiske beslutninger om elevernes teknikker til udførelse af matematiske hverv. Overvejelserne angår de muligheder det bagvedliggende rationale giver eleverne for kontrol af problembehandlingen, og om læringsmålene rent faktisk indbefatter brug af disse muligheder.

S havde allerede forud for den konkrete planlægning et relativt veludviklet syn på muligheder og dilemmaer i forhold til brug/ikkebrug af CAS og elevernes mulighed for validering. Fx formulerer han i en dialog hvor vi bl.a. kommer ind på om man skal bruge Geogebra eller Maple:

“Det det handler om for mig det er at kunne forstå hvad problemstillingen går ud på og ligesom kunne instruere værktøjet ...”

S vurderer at Geogebra kan give eleverne bedre matematisk kontrol over processen (skæring mellem grafer), men at det jo kræver at eleverne i forvejen behersker Geogebra.

Hvad er den didaktiske omkostning af inddragelse af et nyt værktøj med brug der skræddersys til et bestemt formål? Interviewet kredser flere gange om dette tema. At værktøjet i sig selv giver mulighed for kontrol over de matematiske processer, er ikke det samme som at kontrollen faktisk opnås. Hvis man til specielle forløb inddrager nye kommandoer og procedurer eller som i dialogen evt. et helt andet værktøj, kræves undervisning som eksplicit udvikler elevernes muligheder for mere selvstændigt at

bruge disse sider af værktøjet (e.g. instrumentel genese) til andre problemstillinger. Ellers er der tale om afgivelse af kontrol til værktøjet.

Ss projekt om binomialfordeling med simulering (Binomialfordelingen, Afsluttede projekter 2017 (CMU, 2020)) fik derfor fokus på hvordan eleverne selv inddrages i hvad der sker, så det ikke blot bliver læreren som får værktøjet til at levere output til (elevernes) fortolkning. Konkret handler det om at forstå hvordan man i Maple arbejder med visse datastrukturer. Isoleret set er dette ikke mål i læreplanerne, og i tilrettede applikationer er det oftest helt skjult. Der er ikke desto mindre tale om meget generelle strukturer som fx indgår når man skal indtaste data til en regression.

For S var det nyt at gå denne vej, og for CMU var det et konkret eksempel som illustrerer vores grundlæggende udgangspunkt at CAS transformerer faget fundamentalt. S står mellem valget at komme hurtigt til “den rene matematik”, binomialfordelingen, frembragt som output af computersimulering som er kodet af læreren og derfor uden for elevernes kontrol, eller at åbne op for at eleverne får mulighed for at kontrollere output. Det sidste indebærer nye matematiske repræsentationer som i sig selv ingen relation har til binomialfordeling.

At processer med datastrukturer og programmering har matematik-epistemiske implikationer er i tråd med læringsopfattelsen i APOS-teorien

Ss refleksioner over forbedringer af forløbet handler om at lærerens egen brug af værktøjet ganske vist kan overføres til eleverne som udøvelse, men syntesen mellem fag og værktøj forudsætter at elevernes faglige viden er på adækvat niveau. I modsat fald har de ikke mulighed for fuldt at erkende det matematiske indhold.

Opsamling og konklusion

Matematikundervisning er også efter 2017-reformen udfordret af de digitale værktøjer, og der vil være et løbende behov for udvikling af lærerkompetencer. Grundvilkårene blev allerede påpeget i 90'erne således som refereret i (Blomhøj, 1999):

“... inddragelse af avancerede edb-værktøjer i matematikundervisningen bevirker, at den didaktiske situation kompliceres (Balacheff, 1993, s. 155), at den traditionelle fagopfattelse af matematik udfordres (Noss & Hoyles, 1996, s. 3), at det matematiske indhold undergår en datalogisk transposition (Hillel, 1993), at behovet for undervisningsdifferentiering øges, samt at kravene til lærernes matematiske og didaktiske kvalifikationer vokser (Noss & Hoyles, 1996, kap. 8).” (Blomhøjs referencer).

At de stadig gælder, tyder på at de er permanente.

En del efteruddannelser har som mål at indkalde ekspertviden eller at udvikle eksemplariske forløb. CMU-projekternes egentlige værdi ligger først og fremmest hos

den enkelte lærer der reflekterer over praksis, og i den fælles diskussion og viden der opbygges om vilkår og muligheder med CAS. CMU-modellen giver således både individuelle kompetenceløft og oprustning af hele branchen. De tre cases bevidner dette.

Projektdelegerne har udtrykt stor tilfredshed med muligheden for at forfølge egen dagsorden, at møde opbakning til egne ønsker og at have et forum til at drøfte fagdidaktiske temaer. Den meget store gennemførelsesprocent viser en samklang mellem deltageres efteruddannelsesbehov og de rammer som CMU har tilbudt.

Efteruddannelse i anvendelse af matematiksoftware er i øjeblikket underlagt to overordnede forhold. Reformen fra 2017 har øget andelen af gymnasieelever der skal lære matematik, herunder at beherske CAS. Folkeskolens valg af teknologier ændrer gymnasieovergangen fagligt og i forhold til praksis.

Nedenfor er en langt fra fyldestgørende liste med udfordringer vi ser aktuelt.

- Læreren skal løbende afveje/vælge hvilke(n) platform(e) der er hensigtsmæssig(e), også set i lyset af hvad eleverne i forvejen behersker. Valget træffes ud fra forskellige prioriteter i et bredere og i et længere perspektiv. Hvad er mest relevant i forhold til anvendelser i andre fag eller med henblik på videregående uddannelse? Det er vigtigt at matematikundervisning ikke foregår i en gymnasieboble hvor valg alene begrundes ud fra pragmatiske hensyn fx ift. eksamensopgaver.
- Heri ligger også et stedsevarende spørgsmål om elevernes værktøjsbeherskelse, eksempelvis i valget mellem at give eleverne et færdigt ark som læreren selv har udviklet, eller at inddrage elevernes egen beherskelse af værktøjet mere eksplicit. Hvordan balanceres det i forhold til andre kernefaglige kompetencer, hvordan ser det ud i forhold til den nye gruppe af elever der nu er på B-niveauerne? Det er særlig vigtigt i prioriteringen mellem at udvikle mere undersøgende og eksperimenterende tilgange og tid og kræfter sat ind på fx eksamen, men også ift. at motivere arbejde med tilegnelse af redskaberne hos eleverne som en del af matematiklæring.
- Der er fortsat brug for rammer for udvikling af vidensdeling om matematik med digitale værktøjer.
- Det er fortsat nødvendigt med et fokus på overgange. Hvilke CAS-kompetencer har eleverne fra folkeskolen, og hvordan arbejdes der videre med det? Hvordan ser værktøjsbrug ud på de efterfølgende niveauer, hvad forventes, og hvad er relevant?
- Universiteternes matematikstudier inddrager digitale værktøjer mest for deres pragmatiske værdi: at løse matematikproblemer. Herved har lærerne fået den nødvendige faglige ballast for at benytte matematisk software i undervisningen. Dette er imidlertid ikke tilstrækkeligt til at lærerne uden videre kan ændre deres undervisning til et transformeret fag præget af udfordringerne med skiftende værktøjer og elevers ændrede omgang med faget.

I et internationalt perspektiv er det mest iøjnefaldende ved CMU's efteruddannelse nok at Danmark har været langt fremme i implementering af computerbrug i undervisningen, tydeligst fordi elevernes brug af egne medbragte computere skete tidligt og i stort omfang. Vores udfordringer og erfaringer er derfor pejlemærker til diskussion og deling i andre lande, se fx (Bang, Grønbaek, & Larsen, 2017b), (Bang, Grønbaek, & Larsen, 2019), (Groenbaek, Larsen, & Bang, 2017). De grundlæggende omstændigheder for computerbaseret matematikundervisning er imidlertid fælles, herunder tid som didaktisk parameter (Abboud-Blanchard, 2014). Både lærerens og elevernes tid har været under pres i de senere år. Vi har set et skift fra fokus på fagets indhold og praksis til et mere individualiseret lærings syn. Matematikteknologi betragtes af mange elever som en slags effektivisering (på linje med stavekontrol), men som vi flere gange har påpeget, er det en misopfattelse. Arbejdet med teknologierne er tidskrævende med heraf vanskelige prioriteringer for både lærere og elever. Eksemplet projektdeltager P viser at lærerens tidsforbrug med tilrettelæggelse og design kan være særdeles omfattende, mens eleverne overstår arbejdet hurtigt uden megen refleksion. Enhver lærer kender givetvis også til det modsatte, at elevernes beherskelse af selv små detaljer i programmerne tager rigtig meget tid.

Efteruddannelse modvirker ikke sådanne tidspres, men at adressere vilkårene i fællesskab og ikke blot negligere dem er kendetegnende for CMU.

Referencer

- Abboud-Blanchard, M. (2014). Teachers and Technologies: Shared Constraints, Common Responses. I A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Red.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (s. 297-317). Dordrecht: Springer. doi:10.1007/978-94-007-4638-1_13.
- Asiala, M., Brown, A., Mathew, D., Dubinsky, E., DeVries, D. J., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, 1-32.
- Bang, H., Grønbaek, N., & Larsen, C. (2017a). Out- and insourcing, an analysis model for use of instrumented techniques. *CERME10 Proceedings, TWG15*. Dublin. Hentet 10. oktober 2020 fra <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01942147>.
- Bang, H., Grønbaek, N., & Larsen, C. (2017b). Coaching and engaging. Developing teaching with CAS in High School. *CERME 10 Proceedings*. Dublin. Hentet 10. oktober 2020 fra https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0218.pdf.
- Bang, H., Grønbaek, N., & Larsen, C. (2019). Teachers' choices of digital approaches to upper secondary calculus. I J. Monaghan, E. Nardi, & T. Dreyfus (Red.), *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics* (s. 67-70). Kristianssand, Norway: MatRIC. Hentet 10. oktober 2020 fra https://matric-calculus.sciencesconf.org/data/pages/CalcConf2019_Papers_190910.pdf.

- Blomhøj, M. (1999). Vilkår for læring i en computerbaseret matematikundervisning – tre typer af elevvirksomhed. *12*, 35. København, Danmark: Center for Forskning i Matematiklæring.
- CMU. (2017). *Rapport*. Hentet 10. oktober 2020 fra <https://cmu.math.ku.dk/dokumenter/rapport-v-5-2.pdf>.
- CMU. (2020). *Afsluttede projekter*. Hentet 10. oktober 2020 fra Center for Computerbaseret Matematikundervisning – Københavns Universitet: <https://cmu.math.ku.dk/projekter/>.
- Dale, E. L. (2008). *Pædagogik og professionalitet*. Århus: Klim.
- Dubinsky, E. (1997). Research on Undergraduate Mathematics Education: A way to get started. USA: Mathematical Association of America. Hentet 10. oktober 2020 fra <https://www.maa.org/rume-a-way-to-get-started#SECTION00090000000000000000>.
- Engeström, Y. (1987). *Learning by Expanding: An Activity Theoretical Approach to Developmental Research*. Helsinki, Finland: Orienta-Konsultit. Hentet 10. oktober 2020 fra <http://lhc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/Learning-by-Expanding.pdf>.
- Heid, K. (1988). Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 3-25.
- Groenbaek, N., Larsen, C., & Bang, H. (2017). Challenges in Teaching Praxis When CAS Is Used in Upper Secondary Mathematics. I G. Kaiser (Red.), *Proceedings of the 13th International Congress of Mathematical Education. ICME-13 Monographs* (s. 661-662). Springer, Cham.
- Grøn, B., Felsager, B., Bruun, B., & Lyndrup, O. (2014). *Hvad er matematik? C*. København: L&R Uddannelse.
- Jessen, B. E., Holm, C., & Winsløw, C. (2015). *Matematikudredningen: Udredning af den gymnasiale matematiks rolle og udviklingsbehov*. Københavns Universitet, Institut for Naturfagenes Didaktik. Copenhagen: IND. Hentet 10. oktober 2020 fra https://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/2015-42/Matematikudredningen-web.pdf.
- Kissane, B., Kemp, M., & Bradley, J. (1997). Symbolic manipulation on a TI-92: New threats or hidden treasures? I N. Scott, & H. Hollingsworth (Red.), *Mathematics: Creating the future* (s. 388-396). Melbourne: Australian Association of Mathematics Teachers.
- Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. (2016). *Tools and Mathematics*. Switzerland: Springer. doi:10.1007/978-3-319-02396-0.
- Nielsen, K., & Fogh, E. (2006). *Vejen til Matematik*. Silkeborg: HAX.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.
- Trgalová, J., & Tabach, M. (2018). In Search of Standards: Teaching Mathematics in a Technological Environment. (L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Sille, M. Tabach, & C. Vale, Red.) *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education, ICME-13 Monographs*, s. 387-397. doi:10.1007/978-3-319-76575-4_23.
- Trouche, L. (2014). Instrumentation In Mathematics Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 307-313). Dordrecht: Springer. doi:10.1007/978-94-007-4978-8.

UCLA Curtis Center for Mathematics and Teaching. (2007). Hentet 10. oktober 2020 fra 10.oktober 2020 på <https://curtiscenter.math.ucla.edu/about/>.

Undervisningsministeriet. (2004). 3.1 Didaktiske principper. STX bekendtgørelse nr. 1348, bilag 34&35. Undervisningsministeriet.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wartofsky, M. (1979). *Models:Representaions and the scientific understanding*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

English abstract

The use of mathematical software in upper secondary education has long been in a schism between mathematical degeneration and progressive applications. The article describes an in-service education model explicitly addressing the dilemma. Based on action research, it builds on participating mathematics teachers' commitment to involving computers without sacrificing the mathematical core subject matter that upper secondary educations aim at. We explain the didactic foundation and an activity theory framework for the model's use of computers in mathematics teaching. Exemplary participant project works uncover fundamental conditions and point to a sustained demand for in-service education and experience sharing regarding the use of mathematical software.