Repræsentationer og registre

Lisser Rye Ejersbo, DPU,
Aarhus Universitet

Kommentar til Pernille Bødtker Sunde, Lóa Björk Jóelsdóttir, Pernille Ladegaard Pedersen: Blokmodellen – en overset repræsentation i dansk matematikundervisning?, MONA 2020-2.

Artiklen beskriver et meget interessant forskningsprojekt hvor forskningsgruppen i TRACK gennemfører en undersøgende benchmarking med en procedure som er udviklet og virker effektivt i Singapore. Proceduren er en anvendelse af en bestemt blokmodel hvor et matematisk problem visualiseres gennem nogle rektangulære blokke. Singapore klarer sig jo fint inden for matematik i internationale tests, så det er da oplagt at undersøge hvordan danske børn vil reagere på modellen og måske få glæde af den. I artiklen beskrives den del af projektet som foregår som en intervention i 4.-6. klasse.

Gruppen har valgt at fokusere på:

1. Problemløsning som integreret del af undervisningen med bevidst arbejde med de fem elementer: Metakognition, processer, begreber, færdigheder og indstillinger
2. En konsekvent brug af Bruners (1964, se artiklen s. 25) tre repræsentationsformer konkret, ikonisk og abstrakt, forkortet CPA (Concrete – Pictorial – Abstract).

Tre repræsentationsformer

Jeg vil starte med at se på de tre repræsentationsformer som anvendes i projektet. Bruner skelner mellem konkret – ikonisk – abstract. Artiklens Figur 1 illustrerer et eksempel på hvordan begreberne bruges. I figuren er der fire forskellige repræsentationer:

1. En **skriftlig opgave** som lyder som følgende: Allan har 3 blyanter, og Astrid har 8 blyanter. Hvor mange blyanter har de i alt?
2. En **tegning af blyanterne** som kaldes den konkrete model.

3. De **skematiske blokke** som kaldes den visuelle/ikoniske model.
4. Et **regnestykke**, skrevet som 3 + 8 =?, som kaldes den abstrakte model.

Det undrer mig at de skematiske blokke kaldes ikoniske. Ifølge den amerikanske filosof Charles Sandes Peirces (1839-1914) anerkendte tegnlære (semiotik), inspireret af logik og matematik, inddelte han begrebet tegn i tre kategorier: Ikon – Index – Symbol. Ikonet er et billede af objektet der ligner, fx et billede af nogle blyanter. Et index refererer til objektet ved at henvise til det gennem en kausal relation, fx røgen fra en brand hvor man ikke ser ilden, men ved at den er der på grund af røgen. Endelig er der et symbol som refererer til objektet gennem et tegn eller symbol hvis betydning er baseret på en konvention – her den abstrakte model. Jeg har svært ved at opfatte blokkene som ikoner, mener snarere at de hører til i det grafiske register i deres form af en skematisk model. I figur 4 skriver forfatterne at vi kan tegne på tallinjen eller tegne blokmodellen. Blokmodellen er altså her at opfatte som en grafisk arealudvidelse af tallinjen i form af blokke, hvilket ikke hører ind under det ikoniske.

Blokkene bliver også kaldt "visuel model". En visuel model er noget vi opfatter med øjnene, og kan have mange forskellige udtryk. For at modellen kan være en effektiv støtte for eleven i problemløsningen, er det en god ide at eleverne selv har konstrueret modellerne som led i deres problemløsningsproces og ikke bare får dem præsenteret som en del af opgaven, som forfatterne gennem citater af fx Verschaffel et al. (2020) gør opmærksom på. Siden 1995 har de officielle anbefalinger i Danmark været at eleverne skal være med til at udvikle egne metoder – med fokus på at udvikle. De skal lære at turde at udvikle egne forståelser gennem tegninger eller formuleringer. Det er en proces at udvikle matematiske begreber (Tall & Vinner, 1981). Men selvfølgelig skal blokmodellen præsenteres for eleverne så de kender til den, før de kan bruge den; det samme gælder for de involverede lærere.

Blokkene set i et Duvalsk perspektiv

Duvals teori giver mulighed for at analysere de kognitive processer i forbindelse med transformationer mellem semiotiske repræsentationer, hvilket igen giver mulighed for at forstå de underliggende kognitive processer i forbindelse med en matematisk aktivitet (Duval, 2017; her efter Blix & Ibsen, 2020).

Duval tager i sin teori om matematiske registre udgangspunkt i at matematiske objekter ikke er direkte tilgængelige. Matematiske objekter er defineret som de abstrakte objekter og konstruktioner der arbejdes med i matematik, fx en opgave som *Allan har 3 blyanter, og Astrid har 8 blyanter. Hvor mange blyanter har de i alt?* inkl. dens løsning.

De matematiske objekter kan kun anskues gennem semiotiske repræsentationer, hvorfor disse er så afgørende for matematisk aktivitet. Det er ifølge Duval (ibid) kernen i matematisk aktivitet at kunne foretage transformationer mellem forskellige semiotiske repræsentationer.

Synsindtrykkene giver os ifølge Duval (2002, her efter Nørskov, 2007) direkte adgang til fysiske objekter. Denne kognitive funktion kalder Duval en vision. Yderligere kan man ved hjælp af synssansen på et øjeblik opfatte flere objekter samtidigt, eller man kan opfatte en hel struktur. Denne kognitive funktion kaldes visualisering i Duvals terminologi.

Duval (2017) arbejder med fem forskellige registre (Blix og Ibsens oversættelse, 2020):

1. Det sproglige register: Skriftlige eller mundtlige matematiske opgaver eller forklaringer i et naturligt sprog
2. Skitseregistret: Tegninger og løse skitser, som i figur 3 i artiklen
3. Det symbolske register: Abstrakte udtryk, fx algebraiske udtryk
4. Det grafiske register: Grafer og skemaer
5. Hjælperegistret: Metaforiske eller analoge sammenligninger, fx en vægt som et lighedstegn.

Man kan også komme ud for en blandet repræsentation, hvilket vil sige en repræsentation der indeholder semiotiske repræsentationer fra to eller flere registre. Ser man fx på selve blokmodellen, er der tale om en blandet repræsentation fordi der både er et diagram og nogle tal.

En transformation er betegnelsen for de kognitive operationer der foretages når en person laver en semiotisk repræsentation om til en anden repræsentation – af det samme matematiske objekt – i et andet register. Transformationerne er derfor afgørende for forståelsen af det matematiske objekt. Duval mener at man skal kunne opfatte det matematiske objekt i mindst to forskellige registre før man har opnået en forståelse af objektet. Både i figur 1 og i figur 4 er det matematiske objekt repræsenteret i fire forskellige registre:

1. Det sproglige register i form af opgaveteksten
2. Skitseregistret i form af de ikoniske tegninger
3. En blandet repræsentation, bestående af det grafiske register i form af tallinjen og blokmodellen kombineret med tallene som er fra det symbolske register
4. Det symbolske register i form af regnestykket/ligningen.

Forstår eleverne at disse fire forskellige repræsentationer er af det samme matematiske objekt, er de kommet langt i forståelsen af objektet.

Repræsentationer i hjælperegistret er noget anderledes idet de inddrager metaforer for det matematiske objekt. Lakoff og Nuñez (2000) har beskrevet hvordan vi bruger metaforer i vores opfattelse af matematiske objekter. De baserer deres beskrivelse på en teori om at al menneskelig forståelse bygger på metaforer. De er interesseret i at forstå hvorfor vi tænker og taler om tal som vi gør, og deres ideer er ikke umiddelbart formuleret med henblik på anvendelse i undervisningen. Alligevel har deres beskrivelse i det sidste tiår inspireret til undersøgelser af hvordan disse metaforer indgår i skoleelevers sprog og tænkning. Ideerne kan derfor være nyttige i pædagogisk sammenhæng. Når vi tænker på addition som "at lægge sammen", forstår vi regningsarten ud fra en erfaring om to bunker genstande der samles til en. Her kan man opfatte blokkene som en slags metafor for mængderne.

Afsluttende bemærkninger

Generelt tager forfatterne højde for at elevernes egne skitser eller diagrammer giver det bedste resultat, men da undersøgelsen drejer sig om specielt blokmodellen, må man selvfølgelig tage udgangspunkt i den. Det er dog vigtigt at eleverne ikke bliver hængende i den, men at den er en blandt flere muligheder for at tegne sine egne modeller. Det er dog stadig en pudsighed at blokkene med et areal skulle være nemmere at arbejde med end tallinjen.

Jeg arbejdede selv på et tidspunkt med at eleverne skulle prøve at tegne deres opfattelse af matematikopgaven som hjælp til problemløsning (Ejersbo, 2017). Det interessante var at kunne se elevernes kognitive processer gennem tegningerne og iagttage hvordan de ofte gik fra ikoniske tegninger, som vi også ser i figur 3, til mere diagramlignende eller grafiske repræsentationer. Med Duvals teorier er det tilsyneladende en stor fordel for forståelsen af de matematiske objekter at eleven forstår at samme objekt kan have forskellige repræsentationer i mindst to forskellige registre. Det er indbygget i blokmodellen at arbejde med det matematiske objekt i flere registre. Så min konklusion er at det er meget hensigtsmæssigt at lade eleverne tegne en skitse eller et diagram når de problemløser.

Kulturens indvirkning på matematikforståelse ved vi fra Stiegler & Hiebert (1999), har en stor betydning. Deres sammenligning af undervisningen i USA, Japan og Tyskland viste hvor store forskellene var de tre lande imellem. Det er dog ikke det samme som at sige at man ikke kan overføre effektive strategier eller ideer fra andre lande, såsom åbne opgaver fra Japan eller i det her tilfælde blokmodellen fra Singapore. Vi lader os hele tiden inspirere af gode modeller og undervisningseksempler. Det betyder bare at man skal være opmærksom på hvordan de fungerer i danske sammenhænge, men det er TRACK-gruppen tilsyneladende også bevidste om. Jeg ønsker dem held og lykke med det videre projekt.

Referencer

Brix, C.G. & Ibsen, J.M. (2020). *The theory of registers of semiotic representation i anvendelse til at undersøge matematikvanskeligheder*. Speciale, DPU, AU.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking*: *The Registers of Semiotic Representations*. Dunkerque, Frankrig: Springer.

Ejersbo, L.R. (2017) Should mathematics be a creative subject? How is this realized in practice in Denmark? In Michelsen, C., Beckmann, A., Freiman, V., Jankvist U.T. (Ed.). *Mathematics as a Bridge between the Disciplines.* Proceedings of MACAS – 2017 SYMPOSIUM. Held at Danish School of Education, Aarhus University, Copenhagen 27-29 juni, 2017.

Lakoff, G. & Núñez, R.E. (2000). Where mathematics comes from. NY: Basic Books

Nørskov, N. (2007). *En Covarians-tilgang til Variabelsammenhænge i Gymnasiet*. https://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie6/

Stiegler, J.M. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. NY: The Free Press.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.