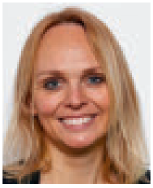
Blokmodellen: en overset repræsentation i dansk matematikundervisning?


Pernille Bødtker Sunde, VIA University College


Lóa Björk Jóelsdóttir, VIA University College


Pernille Ladegaard Pedersen, VIA University College

Abstract: *Blokmodellen er en visuel model, der anvendes i problemløsning, bl.a. til at hjælpe eleverne med at genkende regneart. Visualiseringer anvendes i matematikundervisning som redskab, eller repræsentationsmodel, til at understøtte udvikling af begrebsforståelse og problemløsningsprocesser. Med udgangspunkt i Bruners repræsentationsformer (konkret, visuel og abstrakt), foreslår vi en konceptuel model for Repræsentationsbaserede Oversættelsesstrategier i Problemløsning (ROP-modellen). I denne artikel introducerer vi blokmodellen og giver et kort rids af de internationale erfaringer. Vi præsenterer her de første erfaringer med at implementere blokmodellen i matematikundervisningen på mellemtrinnet, set fra et lærer- og undervisningsperspektiv, i forbindelse med projektet TRACK (Teaching Routines and Content Knowledge).*

Introduktion

I forbindelse med forskningsprojektet TRACK (Teaching Routines and Content Knowledge) har vi arbejdet med introduktionen af blokmodellen som redskab til visualisering i problemløsning.

TRACK er et forsknings- og udviklingsprojekt målrettet matematikundervisningen i 4. til 6. klasse. Projektet er støttet af Trygfonden og er blevet til i et samarbejde mellem VIA University College og Trygfondens Børneforskningscenter. Målet med projektet er at undersøge effekten på elevernes faglige udvikling og lærernes praksis af en intervention som bygger på udvalgte elementer fra det Singaporeanske curriculum (Ministry of Education, 2012). Et af disse elementer er blokmodellen.

Blokmodellen er en skematisk model hvor et matematisk problem repræsenteres ved blokke som viser problemets forskellige elementer og deres indbyrdes relationer (figur 1). Denne visuelle repræsentationsform er vidt udbredt, især i asiatiske lande. Det er en model til visualisering med det formål at hjælpe eleverne til at genkende regneart og dermed støtte løsningsprocessen særligt i arbejdet med problemløsning inden for de fire regnearter. I denne artikel præsenterer og diskuterer vi vores første erfaringer med introduktion og implementering af blokmodellen som repræsentationsform i matematikundervisningen i forbindelse med forskningsprojektet TRACK. Vi giver først en generel introduktion til blokmodellen og præsenterer nogle af de internationale erfaringer med brug af blokmodellen som repræsentationsform i forhold til at styrke elevers forståelse og kompetence i problemløsning. Herefter giver vi eksempler på foreløbige erfaringer fra TRACK-projektets pilotfase såvel som et bud på de udfordringer og potentialer vi ser i brugen af blokmodellen i matematikundervisning i en dansk kontekst.

TRACK Teaching Routines and Content Knowledge

Den overordnede målsætning i TRACK er at undersøge hvordan matematikundervisning kan udvikles i et praksisfællesskab blandt matematiklærere med udgangspunkt i nye undervisningsmaterialer udviklet med inspiration fra Singapore. Denne praksisudvikling understøttes ved en intervention. Målet med interventionen i TRACK er:

- at understøtte matematiklærernes udvikling af kompetencer og viden om de specifikke elementer hentet fra Singapores curriculum samt at støtte lærernes udvikling af egen praksis
- at udvikle elevernes viden og færdigheder i problemløsning og brug af forskellige repræsentationer
- at udvikle de lokale professionelle læringsfælleskaber på skolerne vha. kollegial sparring og samarbejde.

Selve interventionen består af en række lærerkurser samt specielt udarbejdet undervisningsmateriale til eleverne. I løbet af 4. til 6. klasse deltager lærerne i 5-7 årlige kursusdage, og til hvert klassetrin er udarbejdet elevbøger der dækker ca. et halvt skoleårs undervisning. I TRACK har vi valgt at fokusere på mellemtrinnet da projektet beskæftiger sig med mange forskellige aspekter af matematik, bl.a. brøker og ligningsløsning. Blokmodellen som præsenteres i denne artikel, er kun en del af projektets fokus.

Vi har valgt at tage udgangspunkt i Singapore da internationale undersøgelser af skoleelevernes faglige viden har vist at der generelt er et højt fagligt niveau i flere asiatiske lande (fx TIMSS 2015: Mullis et al., 2016), og særligt Singapore har siden starten af 80'erne opnået en unik fremgang. Det Singaporeanske curriculum og matematikundervisning bygger på didaktiske teorier af bl.a. Bruner (1964), Vygotsky (1978), Dienes (1971), Skemp (1976) og Polya (1956). Problemløsning samt en tydelig og fagligt begrundet progression står således centralt i matematikundervisningen.

I TRACK har vi valgt at fokusere på 1) problemløsning som en integreret del af undervisning med et bevidst arbejde med de fem elementer metakognition, processer, begreber, færdigheder og indstillinger og 2) en konsekvent brug af Bruners (1964) tre repræsentationsformer konkret, ikonisk og abstrakt, som forkortes CPA (Concrete-Pictorial-Abstract). Tankerne er ikke ukendte for danske lærere, og de anvendes i forskellig form i danske lærebøger. Det nye hvad angår TRACK, er den konsekvente brug af CPA og den strukturerede og velafprøvede progression der støtter elevernes læringsproces. Som en særlig ikonisk repræsentation eller visualisering i forbindelse med problemløsning arbejdes med blokmodellen som er det element i TRACK som denne artikel beskæftiger sig med.

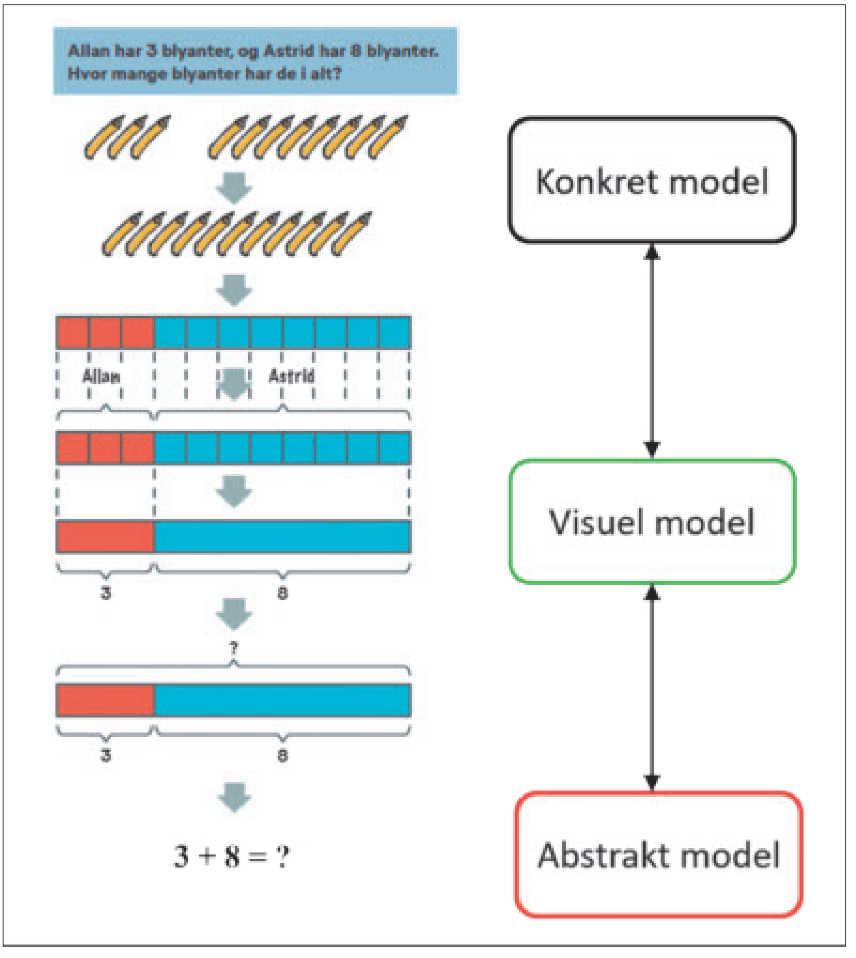
Blokmodellen som visuel model i problemløsning

Blokmodellen, kaldet "model method" eller "bar model" på engelsk, blev udviklet og introduceret i 80'erne og 90'erne i Singapore som en skematisk model til problemløsning (Kho et al., 2014). Denne form for visualisering kendes også under begrebet "tape diagram" eller "strip diagram" (se et eksempel fra USA i Beckmann, 2017). I singaporeansk matematikundervisning anvendes blokmodellen konsekvent. Der undervises således systematisk i metoden fra 1. klasse (Novotná et al., 2018), og den anvendes som redskab i hele uddannelsessystemet til fx avancerede problemløsningssituationer og ligningsløsning.

Blokmodellens teoretiske fundament bygger bl.a. på Bruners (1964) CPA udviklingsfaser eller repræsentationer: den konkrete, ikoniske og abstrakte. Blokmodellen er udviklet som et særligt redskab til at aktivere den ikoniske fase, altså skabe en oversættelse fra den konkrete til den ikoniske repræsentation. Modellen bygger endvidere på Greenos (1983) "part-part-whole" (del-del-helhed) og skemabaserede tilgang til problemløsning.

Overordnet er blokmodellen en skematisk fremstilling af et problems forskellige elementer og relationerne imellem dem. Rektangler, eller blokke, repræsenterer de enkelte *dele*, og blokkenes relative størrelse og placering repræsenterer elementernes indbyrdes relationer (figur 1). Med andre ord: Differentiering af blokkenes længder bliver brugt til at repræsentere talstørrelse, og jo længere blokken er, jo større er tallet den repræsenterer. Desuden kan et tal blive repræsenteret som en sum af dele.

I modellen arbejdes endvidere med *kendte* og *ukendte dele*, og det er i samspillet mellem visualiseringen af problemets *dele*, deres indbyrdes relationer og hvilke *dele* der er kendte og ukendte, at nøglen til at genkende regneart eller oversættelsen til den abstrakte, algebraiske løsning ligger. Denne form for visualisering kan dermed støtte elevernes udvikling af konceptuel forståelse af de fire regnearter, brøker, forhold (ratio) og procent samt løsning af tekstopgaver (Kho et al., 2014).



Figur 1. *Et eksempel på hvordan blokmodellen er en oversættelse fra de sproglige elementer til en ikonisk visuel repræsentation. De enkelte blokke repræsenterer de kvantitative elementer i problemet. Her er endvidere vist oversættelsen fra den konkrete repræsentation via den ikoniske (visuelle) og til den endelige abstrakte repræsentation, dvs. selve regnestykket. Eksemplet er fra elevmaterialet til TRACK-projektet.*

Før vi går i detaljer med forskellige typer af blokmodeller og modellens anvendelighed, forholder vi blokmodellen og dens egenskaber til forskellige aspekter af problemløsning.

Problemløsning og didaktisk brug af modeller

Problembehandlingskompetencen består i at kunne opstille og løse matematiske problemer (Niss & Højgaard Jensen, 2002). Problemer adskiller sig fra opgaver ved at den der skal løse problemet, ikke umiddelbart har eller kender til en løsningsmetode. Problemløsning er den proces som gennemføres for at løse et problem (Højgaard Jensen, 2009). Her beskæftiger vi os primært med problemer i form af tekstopgaver hvis løsning involverer de fire regnearter. For at kunne løse et sådant problem kræves mere end gode regnefærdigheder. Problemløsning handler ofte om at finde værdien af "den ukendte". Man skal altså kunne oversætte sproglige konstruktioner til de forskellige elementer i problemet og forstå deres indbyrdes relationer. Problemløsning er således en kompleks proces som kræver viden, heuristiske metoder, metakognitive processer samt læsekompetence (Verschaffel et al., 2000).

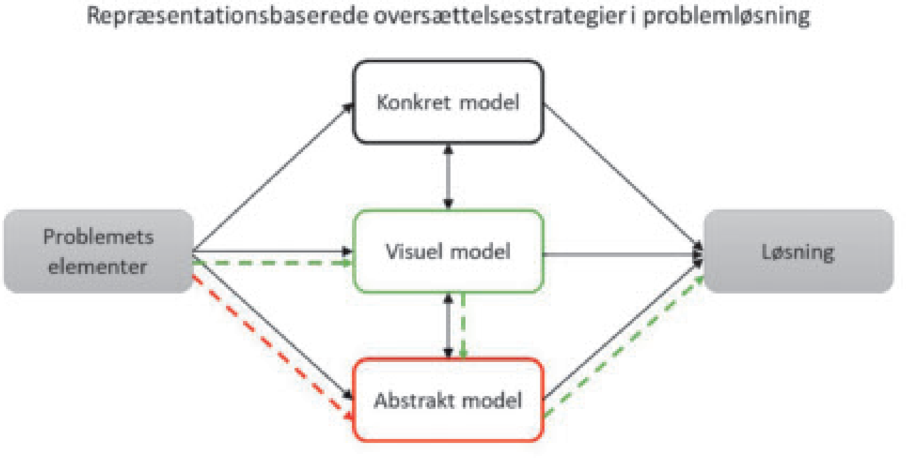
Bruner (1964) beskriver at for at forstå og løse et problem skal man enten 1) kunne forholde sig til det konkret eller udføre det i praksis, 2) kunne visualisere det eller 3) kunne symbolisere det (abstrakt) ved hjælp af sprog eller ved at opstille et algebraisk udtryk eller et regneudtryk. Disse tre repræsentationer kan altså ses som forskellige løsningsstrategier eller modeller til problemløsning. Uanset hvilken løsningstrategi man vælger, er det centralt at man kan skabe en model for relationerne imellem problemets forskellige elementer. Det gælder uanset om problemet i sin oprindelige form optræder i tekstform eller i grafisk form (grafer, diagrammer osv.).

I en konstruktivistisk og realistisk tilgang til undervisning og læring, som fx den hollandske "Realistic Mathematics Education" (RME), er didaktisk brug af modeller i elevernes læreproces en central del (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Her ses modeller som en repræsentation af selve problemet eller situationen. Kravene til en model i RME er at den dels skal indeholde elementer der fungerer som realistiske repræsentationer af kontekst eller "virkelighed", og dels skal være tilstrækkelig fleksibel til at kunne anvendes på et mere avanceret eller generelt niveau. Blokmodellen indeholder alle disse elementer og kan dermed støtte elevernes begrebsudvikling da eleverne udvikler modellen og ændrer brugen af den i takt med deres egen læring og begrebsforståelse (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Model for repræsentationsbaserede oversættelsesstrategier i problemløsning (ROP)

Med udgangspunkt i ovenstående og med inspiration fra Kho et al. (2014) har vi udarbejdet en konceptuel model, ROP-modellen (figur 2). Modellen beskriver de mulige strategier til løsning af problemet via Bruners (1964) tre repræsentationsmodeller samt samspillet imellem de tre. Der er således forskellige veje fra oversættelsen af problemets sproglige elementer til den endelige løsning. Modellen beskriver hvordan man kan vælge repræsentation fleksibelt efter det aktuelle problems egenskaber og egne færdigheder og kompetencer.

Figur 2 viser hvordan forskellige typer modeller kan indgå i løsningen af et problem. Problemets forskellige elementer repræsenteres i enten konkret, visuel/ikonisk eller abstrakt form i de tre modeller. Fra den enkelte model kan man enten oversætte til en af de andre modeller eller finde en løsning. En vigtig pointe er således at man kan bevæge sig imellem de forskellige modeller og evt. også direkte fra en konkret til en abstrakt model (se figur 4 for et eksempel på hvordan der arbejdes med alle tre repræsentationsmodeller i TRACK-materialet). Mange elever oplever vanskeligheder ved at oversætte elementerne i et problem og deres indbyrdes relationer direkte til en abstrakt repræsentation, som fx et aritmetisk regneudtryk eller en algebraisk model (Kieran, 2006; Verschaffel, Schukajlow, Star & Van Dooren, 2020). Her kan den visuelle model være en støtte i den proces og et vigtigt led i arbejdet med konceptuel forståelse i algebra og tidlig algebra (Chu et al., 2017; Kho et al., 2014).

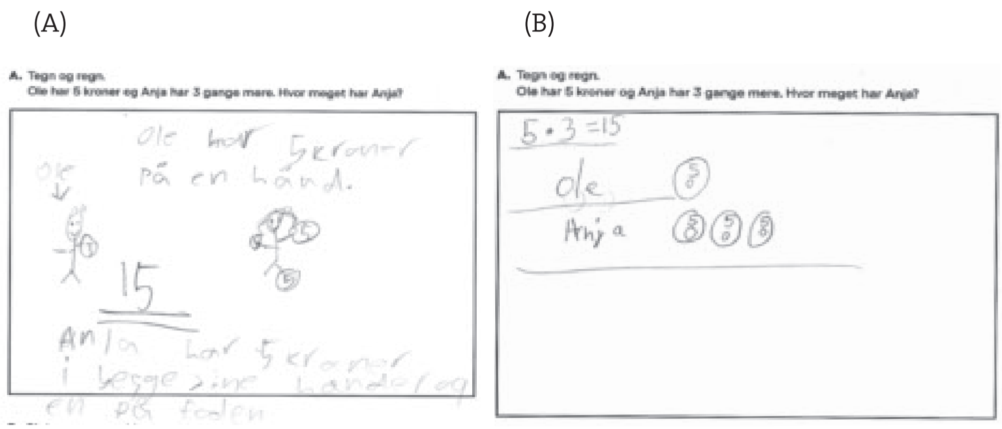


Figur 2. *Model for repræsentationsbaserede oversættelsesstrategier i problemløsning. Modellen illustrerer oversættelsen af problemets elementer via forskellige repræsentationsmodeller. Man kan gå flere veje og oversætte fra en model til en anden i løbet af processen, også direkte fra den konkrete til den abstrakte model. Den direkte vej fra problem til løsning gennem den abstrakte model, fx algebraisk, er ofte vanskelig for eleverne. Her kan en visualiseringsmodel fungere som oversættelsesled til fx det algebraiske udtryk.*

Brugen af modeller og visualisering i problemløsning er således en adaptiv fleksibel strategi idet man kan vælge (eller fravælge) den model og visualisering der passer til det pågældende problem og ens egne behov og evner (Verschaffel et al., 2009).

Visuelle modeller og algebraisk løsning

Visualisering er et vigtigt aspekt i matematikundervisning og læring (Arcavi, 2003). Visualisering i tekstopgaver handler om at oversætte sproglige elementer til visuelle repræsentationer, som kan være i billedform eller skematisk. Visualiseringer i form af billeder der kun viser de objekter (mennesker, dyr, ting osv.) som indgår i problemet, men ikke deres indbyrdes relationer og størrelsesforhold, vil sandsynligvis ikke understøtte elevernes udvikling af strategier til problemløsning (fx figur 3, A). Skematiske diagrammer eller modeller som netop tydeliggør de indbyrdes relationer og forhold mellem problemets elementer (fx figur 3, B), er langt mere succesrige som visuelle modeller i forhold til at støtte eleverne i problemløsningen (Kribbs & Rogowsky, 2015).



Figur 3. *Eleveksempler på visualisering hvor problemets elementer er gengivet som billeder af de objekter der indgår i problemet (A), og en mere ikonisk model hvor relationerne imellem elementerne er tydelige (B).*

For at skematiske modeller kan fungere som en visuel støtte i problemløsning, kræver det ifølge Ho & Lowrie (2014) at eleven kan 1) oversætte problemets elementer til en visualisering som kan bruges til løsningen, 2) kan tegne en korrekt model og 3) kan oversætte modellen til en korrekt matematisk symbolsk løsning. Det kan dog volde vanskeligheder for eleverne at konstruere matematisk korrekte tegninger som effektivt kan støtte i løsningsprocessen. Men undervisning der understøtter udvikling af strategier til visualisering, kan støtte eleverne i selv at konstruere sådanne tegninger (Rellensmann, Schukajlow & Leopold, 2017). Verschaffel et al. (2020) fremhæver netop i deres review af forskning i tekstopgaver at effekten af brug af visualiseringsmodeller er størst når eleverne selv konstruerer modellerne som et led i problemløsningsprocessen og ikke bare får dem præsenteret som en del af en opgave.

Den algebraiske repræsentation eller en ikkevisuel analytisk løsningsstrategi (den abstrakte model i ROP, figur 2) er det der traditionelt arbejdes hen imod at eleverne tilegner sig i grundskolens matematikundervisning. I læseplanen til faget hedder det fx for fagområdet tal og algebra 4.-6. klassetrin om ligninger:

> "Begreberne og udviklingen af metoder kan (…) løsrives fra støttende repræsentationer, fx sådan, at eleverne arbejder med ligninger, der er repræsenteret i symbolsprog" (Undervisningsministeriet, 2019, s. 45)

Et eksempel på hvordan vi arbejder med dette i TRACK, kan ses i figur 4.

Det at oversætte direkte fra fx sproglige elementer i et problem til et algebraisk udtryk volder vanskeligheder for mange elever. Netop den visuelle tilgang kan fungere som støtte i denne oversættelse (Kho et al., 2014; Lowrie & Kay, 2001; Verschaffel et al., 2020), og her er især blokmodellen effektiv, men det kræves at der arbejdes bevidst med denne oversættelse, hvis ønsket er at eleverne skal slippe den visuelle repræsentation (Kho et al., 2014). Det er vigtigt at understrege at blokmodellen ikke skal betragtes som en algoritme, men som en fleksibel repræsentationsform (Ng & Lee, 2009).

Tre hovedtyper af blokmodeller

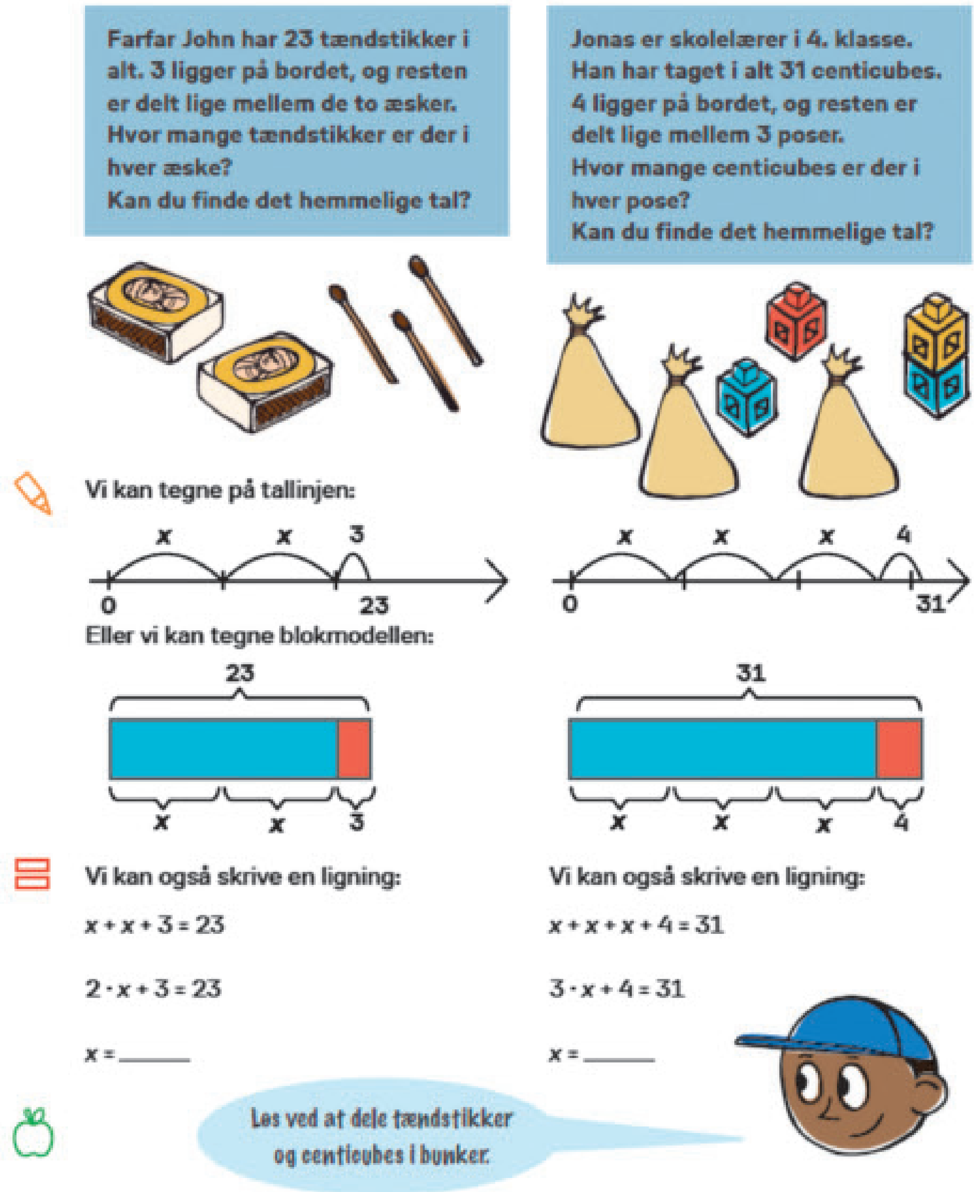
Der er overordnet tre forskellige typer af blokmodeller som repræsenterer forskellige typer af problemer: 1) del-helhed, 2) sammenligning og 3) ændring eller vækst.

Del-helhed

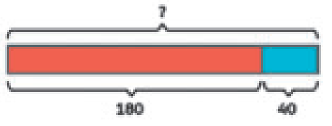
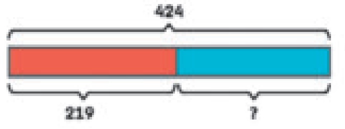
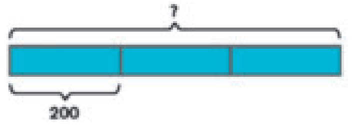
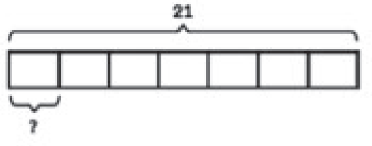
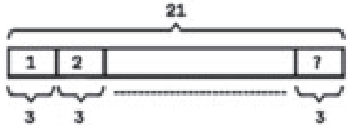
I denne model er der en relation mellem *det hele* og *delene*, fx (tabel 1, A): Søren køber en T-shirt for 180 kr. og sokker for 40 kr. Hvor meget har han købt for i alt? Her er to kendte *dele*, nemlig "180" og "40", samt en ukendt størrelse, nemlig "i alt" eller *det hele*. Regneudtrykket vil være af formen *del + del = helhed*. Det kan visualiseres med blokmodellen, som det kan ses i tabel 1. Tabel 1 giver eksempler på blokmodeller der visualiserer *del-helhed* i forskellige tekstopgaver inden for de fire regnearter. Når *delene* er af forskellig størrelse, er der tale om addition og subtraktion: addition når *det hele* er ukendt, og subtraktion når en *del* er ukendt. Når *delene* er af samme størrelse, er der tale om multiplikation og division. Det er multiplikation når *det hele* er ukendt, mens det er division når enten antallet i hver *del* eller antallet af *dele* er ukendt.

Sammenligning

Ved sammenligning sammenlignes to elementer. I eksempel A i tabel 2 sammenlignes fx fars og Mads' alder: Far er 3 gange så gammel som Mads. Faren er 36 år gammel. Hvor gammel er Mads? Der indgår altså to *dele* (fars og Mads' alder) og et *forhold* (far er 3 gange så gammel) i modellen. Som ved *del-helhed*-modellen kan de enkelte elementer i modellen alle være ukendte. Det afhænger selvsagt af selve problemet eller situationen som modellen visualiserer. I tabel 2 kan ses eksempler på forskellige tekstopgaver med tilhørende blokmodel. Ved en sammenligning tegnes altid en blok for hvert af de elementer der sammenlignes.



Figur 4. *Eksempel på oversættelse af de sproglige elementer i et problem til det algebraiske udtryk via konkrete og visuelle repræsentationer. Eksemplet er fra elevmaterialet til TRACK-projektet.*

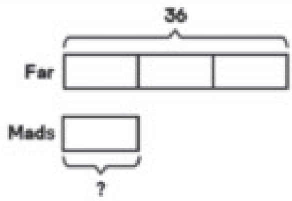
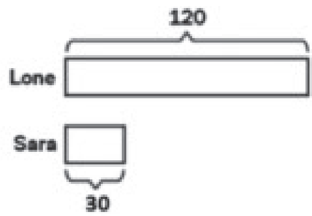
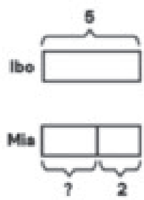
Tekstopgave	Blokmodel	Regneudtryk
A: Søren køber en T-shirt for 180 kr. og sokker for 40 kr. Hvor meget har han købt for i alt?		180 + 40 = ?
B: Der går 424 børn på Byskolen. 219 er drenge. Hvor mange er piger?		424 – 219 = ?
C: Sidste år fik Amalie 200 kroner i fødselsgave. I år fik hun 3 gange mere. Hvor mange kroner fik hun i år?		3 · 200 = ?
D: Der er 21 elever i 4.A. Klassen skal deles i 7 lige store grupper. Hvor mange elever kommer i hver gruppe?		21 : 7 = ?
E: Der er 21 elever i 4.A. Hvor mange grupper kan der laves i 4.A, hvis der skal være 3 elever i hver gruppe?		21 : 3 = ?

Tabel 1. *Eksempler på blokmodeller af typen del-helhed. Bemærk at der for division er to modeller afhængigt af om det er "antal i hver del" eller "antallet af dele" som er kendt.*

Ændring eller vækst

Her viser modellen relationen mellem en ny værdi af en mængde eller et antal og den oprindelige værdi efter en øgning/stigning eller en reduktion/fald. Ser vi på eksempel A i tabel 3, er den nye værdi 90 efter en reduktion på 9: En T-shirt koster 99 kr. Prisen sættes nu ned med 9 kr. Hvad er den nye pris? Kender vi stigningen eller reduktionen, kan vi finde den nye værdi ud fra den oprindelige værdi og omvendt (tabel 3).

I arbejdet med brøker og procent har blokmodellen den styrke at en blok kan repræsentere en hel eller 100 %. Denne blok kan så igen deles op i det relevante antal brøkdele eller i 100 eller 10, hvis der arbejdes med procent. Elever som har arbejdet med blokmodellen i forbindelse med brøker (fx ved brug af konkrete materialer i form af blokbrikker eller brøkstænger) og decimaltal, kan via blokmodellen skabe sammenhængen mellem brøk, decimaltal og procent. Blokmodellen fungerer som et fleksibelt redskab, og er brøken større end en hel, fx 4/3, så er det nemt at illustrere i blokmodellen. I tabel 3 kan ses to eksempler (B og C) på hvordan brøk- og procentopgaver, som mange grundskoleelever nok vil finde udfordrende, kan visualiseres ved hjælp af blokmodellen. Det korrekte regneudtryk er herefter, for mange, nemmere at finde.

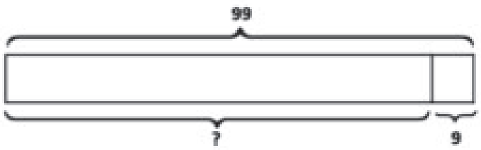
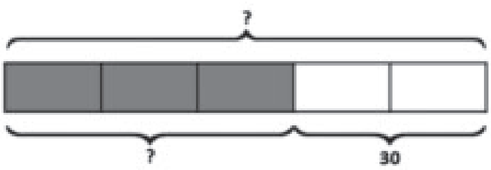
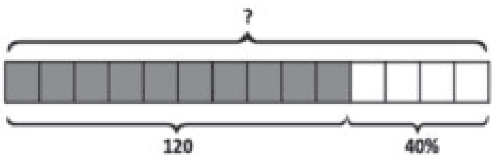
Tekstopgave	Blokmodel	Regneudtryk
A: Far er 3 gange så gammel som Mads. Faren er 36 år gammel. Hvor gammel er Mads?		36 : 3 = ?
B: Lone har tjent 120 kr., og Sara har tjent 30 kr. Hvor mange gange større er Lones beløb end Saras?		120 : 30 = ?
C: Ibo har 5 muffins og Mia har 2 færre end Ibo. Hvor mange har Mia?		5 – 2 = ?

Tabel 2. *Eksempler på blokmodeller af typen sammenligning. I A og B er der tale om forholdssituationer, og i C en forskelssituation.*

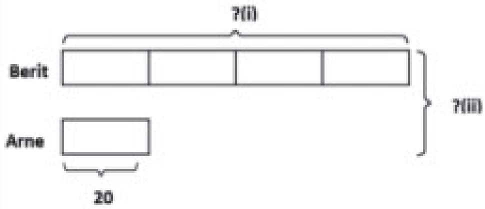
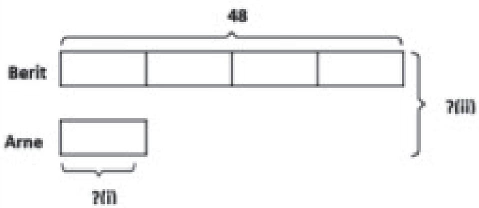
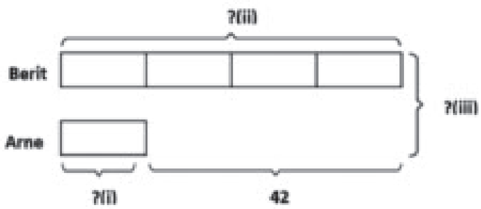
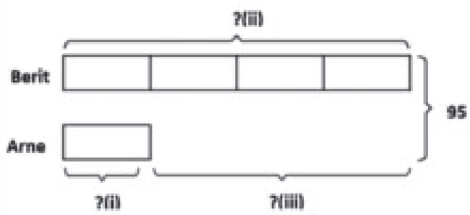
Blokmodellens mulighed for progression

Centralt for brug af blokmodellen i Singapores curriculum er den progression som er indarbejdet i modellen. Det vil sige at eleverne kan anvende repræsentationen på alle klassetrin til løsning af problemer af meget forskellig sværhedsgrad og kompleksitet.

Et eksempel på en opgavetype som kan findes i Singapores curriculum for 4. klasse, er følgende: Berit har 4 gange så mange appelsiner som Arne. I alt har de 95 appelsiner. Hvor mange appelsiner har Berit flere end Arne? I tabel 4 er vist en række forskellige opgaver konstrueret ud fra samme kontekst, men med stor variation i kompleksitet. Progressionen kan ses som en proces gående fra løsning af simple aritmetiske problemer til mere komplekse problemer inden for tidlig algebra. Det særlige er at der løbende arbejdes med hvor den "ukendte" findes i modellen, og hvordan den står i forhold til de "kendte" elementer.

Tekstopgave	**Blokmodel**	**Regneudtryk**
A: En T-shirt koster 99 kr. Prisen sættes nu ned med 9 kr. Hvad er den nye pris? *Eller* En T-shirt koster nu 99 kr. Prisen er lige blevet sat op med 9 kr. Hvad kostede den før?		99 – 9 = ? eller ? + 9 = 99
B: En T-shirt er blevet 30 kr. dyrere. Prisen er vokset med 2/3 af den oprindelige pris. (i) Hvad kostede T-shirten før? (ii) Hvad koster den nu?		(i) 2 dele =30 1 del = 30 : 2 = 15 3 dele = 3 · 15 = ? (ii) 5 dele = 5 · 15 = ?
C: En T-shirts indkøbspris er 120 kr. Butikken sælger den 40% over indkøbsprisen. (ii) Hvor meget er lagt til indkøbsprisen? (i) Hvad koster T-shirten i butikken?		(i) 10 dele=120 1 del =12 4 dele = 4 · 12 = ? (ii) 14 dele = 14 · 12 = ?

Tabel 3. *Eksempler på blokmodeller ved en ændring. B og C er eksempler på brøk og procent i blokmodellen.*

Historie	Blokmodel	Regneudtryk
A: Arne har 20 appelsiner. Berit har 4 gange så mange. (i) Hvor mange appelsiner har Berit? (ii) Hvor mange appelsiner er der i alt?		(i) 1 del =20 4 dele = 4 · 20 = ? (ii) 1 del = 20 5 dele = 5 · 20 = ?
B: Berit har fire gange så mange appelsiner som Arne. Berit har 48 appelsiner. (i) Hvor mange appelsiner har Arne? (ii) Hvor mange appelsiner er der i alt?		(i) 4 dele = 48 1 del = 48 : 4 = ? (ii) 5 dele = 5 · 12 = ? Eller 48 + 12 = ?
C: Berit har fire gange så mange appelsiner som Arne. Berit har 42 appelsiner flere end Arne. (i) Hvor mange appelsiner har Arne? (ii) Hvor mange appelsiner har Berit? (iii) Hvor mange appelsiner er der i alt		(i) 3 dele = 42 1 del = 42 : 3 = ? (ii) 14 · 4 = ? (iii) 14 · 5 =? eller 56 + 14 = ?
D: Berit har 4 gange så mange appelsiner som Arne. I alt har de 95 appelsiner. (i) Hvor mange appelsiner har Arne? (ii) Hvor mange appelsiner har Berit? (iii) Hvor mange appelsiner har Berit flere end Arne?		(i) 5 dele = 95 1 del = 95 : 5 = ? (ii) 19 · 4 = ? (iii) 19 · 3 = ? eller 76 - 19 = ?

Tabel 4. *Eksempler på blokmodeller ved komplekse sammenligningssituationer og med progression i kompleksitet og sværhedsgrad.*

Internationale erfaringer med blokmodellen

Studier af effekten af visualiseringer viser at især elevernes egne visualiseringer har en effekt på elevernes succes i problemløsning (Verschaffel et al., 2020), og at matematisk korrekte tegninger, modsat de mere naturalistiske illustrationer (som fx i figur 3), har størst effekt. Her er især skemabaserede visualiseringer tilsyneladende mest succesfulde (Verschaffel et al., 2020). Undersøgelser specifikt af blokmodellens effekt på elevers kompetencer i problemløsning i Singapore såvel som i resten af verden finder således overvejende positive effekter (Kaur, 2019). Enkelte større studier viser at blokmodellen har en effekt på elevernes forståelse af et tekstbaseret problem samt deres løsningssucces (Ho & Lowrie, 2014). Dette overordnede mønster bekræftes af en række studier med mindre robust design (Koleza, 2015; Morin et al., 2017; Osman et al., 2018).

Der er modstridende resultater på hvorvidt blokmodellen er lige givtig for alle alders- og elevgrupper. Nogle studier peger på at blokmodellen er særlig udbytterig for fagligt udfordrede elever (fx Morin et al., 2017). Fx fandt Morin et al. (2017) at elever i 3. klasse i matematikvanskeligheder oplevede effekt af en intervention rettet mod problemløsning i tekstopgaver med blokmodellen som redskab. Resultaterne viste at brugen af blokmodellen som strategi i løsningen af problemopgaver forbedrede elevernes evne til at løse opgaverne korrekt. Derudover øgedes elevernes brug af kognitive strategier, såsom at omformulere problemet, tegne en model og tjekke resultatet. Et andet studie tyder på at lavt præsterende 6.-klasseelever præsterer lavere når de præsenteres for blokmodeller i forbindelse med tekstopgaver, og at 7.- og 8.-klasseelever har større udbytte end 6.-klasseelever af blokmodellen (Booth & Koedinger, 2012). Det er dog vigtigt at pointere at i dette studie var blokmodellen en del af opgaven; eleverne skulle ikke selv fremstille en model, men kunne anvende en på forhånd givet model som led i løsningsprocessen.

I et større studie af 607 singaporeanske 6.-klasseelevers brug af blokmodellen i problemløsning fandt Ho & Lowrie (2014) at hovedparten af de elever som valgte at bruge blokmodellen, løste opgaverne korrekt. De elever som ikke løste opgaven korrekt, tegnede for hovedpartens vedkommende en korrekt model som repræsenterede problemets elementer, men de var ikke i stand til at oversætte modellen til den abstrakte matematik og altså lave den korrekte udregning. Ho & Lowrie (2014) fandt endvidere at hvis relationerne mellem problemets elementer er nemme at overskue, vælger mange elever ikke at bruge blokmodellen eller en anden visuel repræsentation.

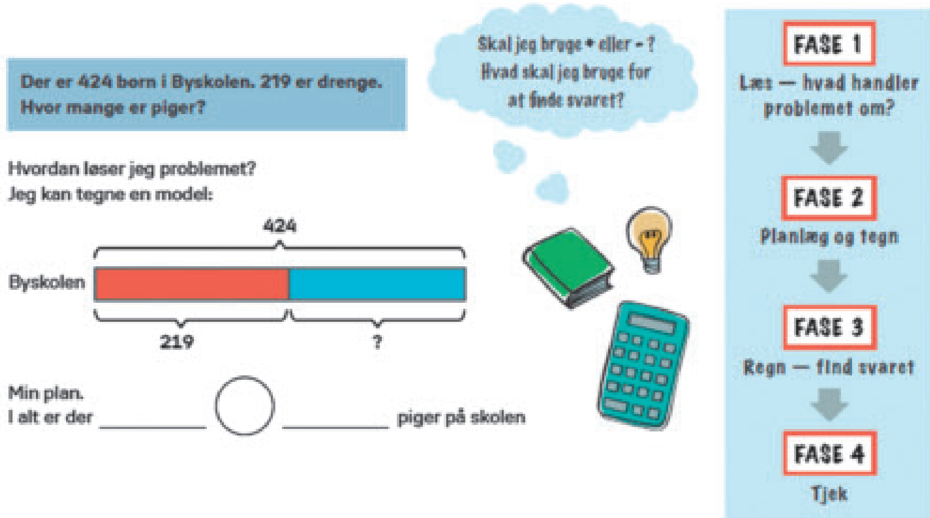
Blokmodellen er dog ikke altid det mest hensigtsmæssige redskab til visualisering i problemløsning, især ikke hvis der indgår flere forskellige typer af relationer mellem elementerne i problemet. Det er derfor vigtigt at elever lærer at bruge metoden fleksibelt så der ikke opstår "prototypiske" forståelser eller billeder som begrænser brugen af metoden. Det kan resultere i ufleksibel tænkning (Ho & Lowrie, 2014). Hvis modeller, som blokmodellen, skal støtte læreprocessen, skal modellerne fungere som et led i forståelsesprocessen og ikke blot introduceres som en "ny" metode.

> "it is not the models in themselves that make the growth in mathematical understanding possible, but the students' modeling activities" (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003, s. 29)

Ovenstående studier tyder på at anvendelse af blokmodellen i matematikundervisningen kan støtte elevernes udvikling af konceptuel forståelse og give dem et redskab til visualisering i problemløsning. Det kræver dog at eleverne er fortrolige med denne form for model, har ejerskab for modellen og selv oversætter elementerne i problemet til modellen, dvs. at de bruger modeller og visualiseringer adaptivt fleksibelt.

De første erfaringer: blokmodellen i dansk praksis

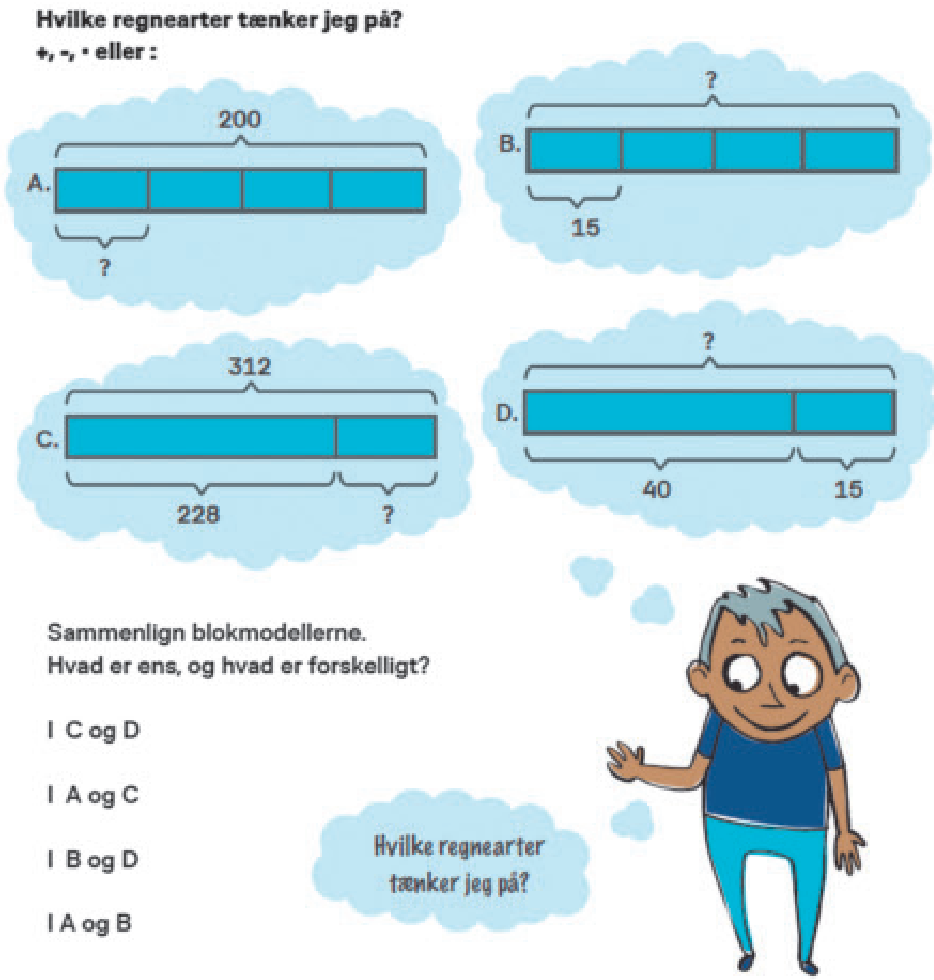
I TRACK introduceres blokmodellen i 4. klasse som en del af arbejdet med problemløsning inden for de fire regnearter. Der arbejdes systematisk med de tre repræsentationer konkret-ikonisk-abstrakt (CPA) baseret på Bruners (1964) repræsentationsmodeller samt at oversætte imellem repræsentationer så eleverne arbejder med alle dele af ROP-modellen. Eleverne arbejder med metakognitive problemløsningsstrategier baseret på (Polya, 1956 – se højre side af figur 5), og blokmodellen introduceres som en del af Polyas fase 2 med visualisering af problemet. Et eksempel fra materialet T-MAT i 4. klasse kan ses i figur 5.



Figur 5. *Et eksempel på hvordan brugen af blokmodeller i problemløsning introduceres for eleverne i 4. klasse. Til højre ses hvordan Polyas firefasemodel fungerer som støtte i problemløsningsprocessen. Fra elevmaterialet i TRACK.*

TRACK startede i skoleåret 2018/19 og er fortsat i skoleåret 2019/20. Her deltog 11 skoler med 22 klasser og 24 matematiklærere og -vejledere. Nedenfor beskrives de første erfaringer med introduktionen af blokmodellen set fra lærernes perspektiv. For at følge lærernes udvikling og oplevelse af de forskellige elementer og tiltag i projektet indsamlede vi noter og evalueringer fra kursusdagene, data via spørgeskemaer samt fokusgruppeinterviews. Det er lærernes udtalelser fra disse datakilder som danner grundlaget for det følgende.

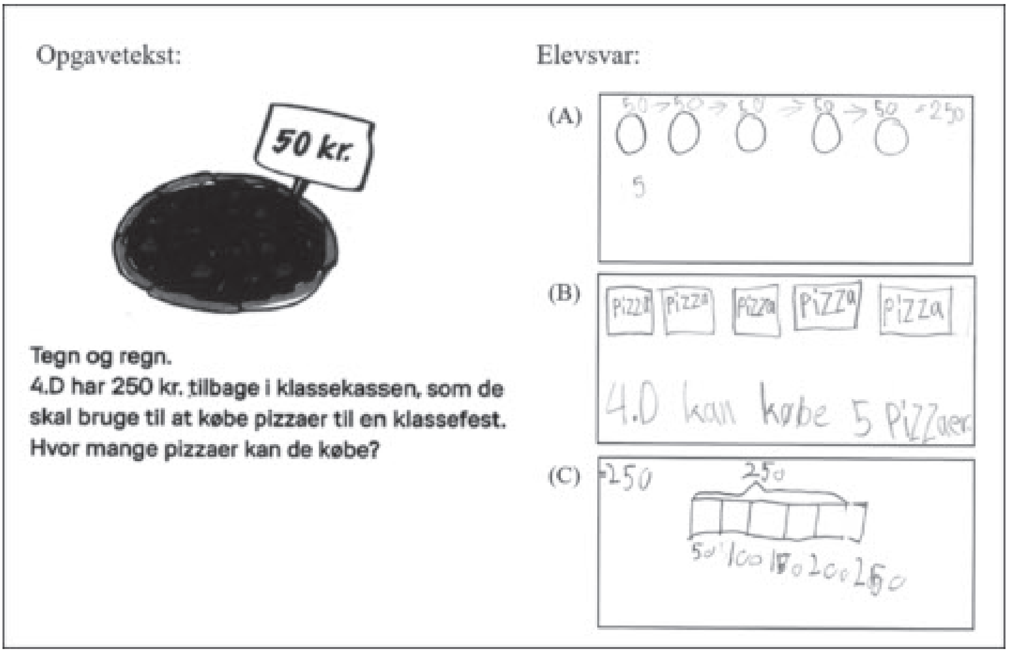
Introduktionen af blokmodellen har ikke været problemfri, og både lærere og elever har oplevet frustrationer. I starten af 4. klasse, hvor lærere og elever møder blokmodellen første gang, siger lærerne fx: “Eleverne har svært ved at skelne mellem de forskellige modeller. De er ikke vokset op med det. Men det er nok ikke kun det. Det er svært for eleverne at finde ud af hvilken regneart de skal bruge.” At eleverne har svært ved at skelne modellerne fra hinanden, kan være et udtryk for at grundmodellen er den samme, men det er placeringen af “den ukendte” i modellen og *delenes* relative størrelse der adskiller regnearterne. Derfor er en logisk negativ konsekvens at det kan være svært at skelne mellem om det er *delene* eller *helheden* der fokuseres på. Hvis den ukendte er *helheden*, er det addition og multiplikation, og er den ukendte en af *delene* eller antallet af dele, er det subtraktion eller division. Det skal sammenholdes med om delene er lige store, så det er multiplikation eller division, eller om delene er af forskellig størrelse, så det er subtraktion eller addition (se fx tabel 1). Modsat er tanken bag blokmodellen at skabe denne sammenhæng for eleven så fx sammenhængen mellem addition og subtraktion skabes. Figur 6 viser et eksempel på hvordan der arbejdes med dette i TRACK.



Figur 6. *Et eksempel fra TRACK-materialet der viser hvordan der arbejdes med at se forskelle og ligheder i blokmodeller for de forskellige regnearter.*

Det er dog interessant at efterhånden som TRACK-projektet skred frem, og eleverne havde arbejdet med blokmodellen i 4. klasse, fik vi flere positive tilbagemeldinger fra lærerne. De oplevede at den støtter elevernes udvikling af strategier til problemløsning og tekstopgaver, samt at den støtter elevernes konceptuelle forståelse af de fire regnearter. Omkring midten af 4. klasse, hvor lærere og elever var lidt mere fortrolige med blokmodellen, mødte vi således udsagn som: "For mine elever er blokmodellen en fin hjælp i problemløsning til at finde ud af regneart" og "blokmodellen er nu blevet et værktøj eleverne støtter sig til". Men nogle lærere oplevede også udfordringer: "Jeg er stadig i tvivl om mine elever er helt sikre på hvad de skal gøre hvis jeg siger blokmodel". At eleverne ifølge lærerne begyndte at opleve at blokmodellen er en måde at visualisere og finde regnearten på, kan ses som en positiv udvikling i brugen af modellen, men samtidig tyder det på at nogle elever ikke har fået "ejerskab" til modellen – eller er bevidste om hvordan blokmodellen kan bruges som redskab.

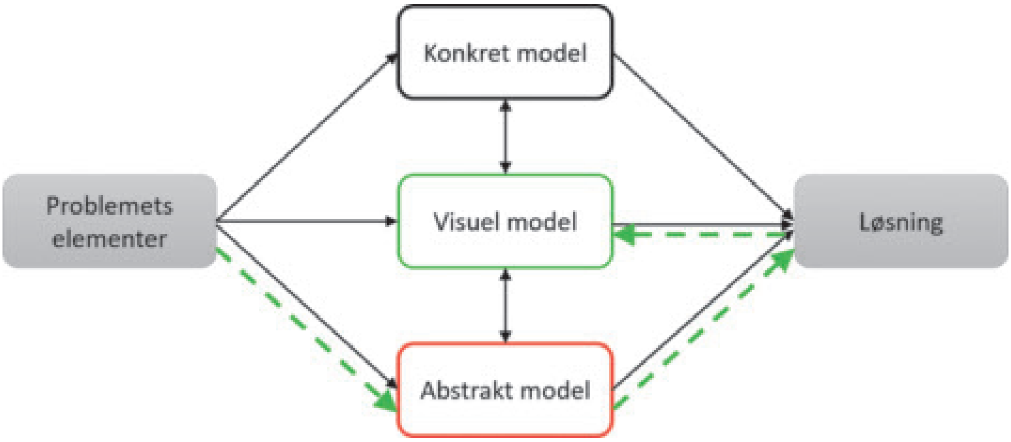
Vi har endnu ikke systematisk undersøgt elevernes brug af visualiseringer i problemløsning, men i figur 7 kan ses et par eksempler fra midten af 4. klasse. Her ses at nogle elever tydeligt demonstrerer at de kan oversætte elementerne i problemet til en blokmodel. Elev A og B viser således en begyndende stilisering af tegningen, hvor elev C tegner en egentlig blokmodel.



Figur 7. *Eleveksempler fra evalueringsopgaver i TRACK fra midten af 4. klasse, hvor man tydeligt ser tre forskellige stadier i visualiseringen hen imod en egentlig blokmodel (C).*

I 5. klasse er lærernes oplevelser med blokmodellen langt overvejende positive, og vi mødte udsagn som: "Svage elever har godt af at blive støttet af konkrete materialer, blokmodeller og tegninger". At blokmodellen bliver en støtte til elever som har vanskeligheder i faget, er positivt, særligt hvis det giver dem mulighed for også at følge og løse mere komplekse problemer. Med andre ord er det interessant at følge om brugen af blokmodellen skaber nye muligheder for undervisningsdifferentiering.

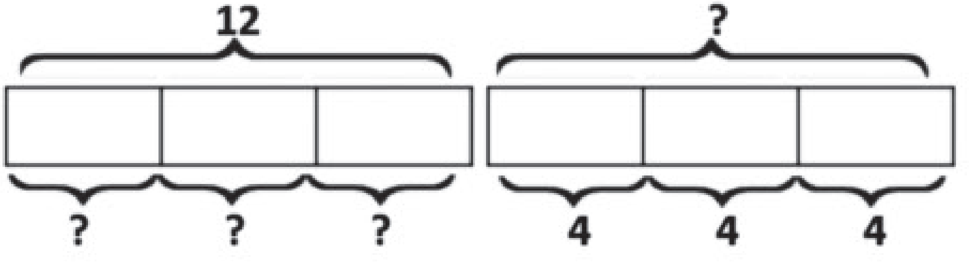
Som det fremgår af eksemplerne, er det ikke uproblematisk at introducere nye elementer i matematikundervisningen, og et udsagn som "nogle elever gør det omvendt: starter med at lave regnestykket og tegner blokmodellen bagefter" viser at der er en risiko for at visualiseringen bliver et mål i sig selv og ikke det tiltænkte redskab. I ROP-modellen kan man sige at disse elever løser problemet ved at gå via den abstrakte model, men at de derefter bevæger sig baglæns fra selve løsningen, evt. via den abstrakte model, til den visuelle model (figur 8) – altså at de opfatter den visuelle model som den endelige løsning. I den indledende fase med at introducere eleverne til selve blokmodellen er det nok ikke uundgåeligt, men det er vigtigt at være bevidst om det så eleverne kan støttes i at bruge modellen som en løsningsstrategi når det er relevant.



Figur 8. *Et eksempel på hvordan elever der opfatter blokmodellen som et mål i sig selv, og som ikke oplever problemet tilstrækkelig vanskeligt, finder løsning via den abstrakte model og derefter konstruerer blokmodellen.*

Ovenstående eksempel hænger formodentlig sammen med at nogle elever finder det uforståeligt at skulle tegne blokmodellen når de sagtens kan gennemskue hvad de skal gøre uden. De kan med andre ord håndtere problemstillingen direkte via den abstrakte model: "blokmodellen giver ikke mening for alle elever. Dem der kan regne i hovedet, synes det er irriterende at tegne", "opgaverne er for simple til at de kan se meningen med modellen". I Singapore introduceres blokmodellen parallelt med at regnearterne introduceres, så eleverne er fortrolige med denne repræsentationsform allerede fra 1. klasse. Det er en model som kræver tilvænning, og den må nødvendigvis introduceres vha. simplere problemer. Det er derfor forbundet med udfordringer at introducere den i 4. klasse hvor mange elever er så fortrolige med fx additions- og subtraktionssituationer at de sagtens kan gennemskue hvordan problemet skal løses, uden brug af en visuel repræsentation. For eleven er "problemet" altså ikke et egentligt problem der skal løses, men har snarere karakter af en opgave (jf. Højgaard Jensen, 2009). Det kan derfor være vanskeligt for eleverne at se meningen med at anvende en sådan model (Ho & Lowrie, 2014). Hvis vi tager afsæt i ROP-modellen, så er nogle elever i stand til at arbejde i den abstrakte fase uden brug af den visuelle repræsentation som blokmodellen giver. De risikerer at opleve blokmodellen som en rigid form for algoritme som de skal lave for at "gøre læreren glad". Her foreslår lærerne selv at der arbejdes med problemer som "er sværere for eleverne, så de bliver 'tvunget' til at bruge blokmodellen".

Det tager tid at tilegne sig nye arbejdsmetoder, og en lærer oplever da også at "eleverne har svært ved at huske hvordan de bruger blokmodellerne", i starten af 5. klasse. At læreren her bruger "huske", er interessant. Blokmodellen skal jo netop ikke anvendes som en fastlåst metode der skal huskes, men som et fleksibelt værktøj eller strategi. Vi kan også se at lærernes indstilling og engagement i forhold til introduktionen af blokmodellen har indflydelse på hvordan lærerne oplever at eleverne tager modellen til sig, og deres opfattelse af om det er en hjælp for eleverne. En lærer fortæller fx at hun til 5. klasse selv har lavet blokmodeller til en opgave som eleverne fandt særlig svær, og delt ark ud til elever hvor disse er på: "Det fik gang i en snak om gangefamilien. Når man laver division, er der fire forskellige blokmodeller – hvilke skal man bruge? Eleverne havde deres egen huskeregel om at når der var to forskellige objekter, skulle man bruge to blokke." Hun har tydeligvis taget blokmodellen til sig, og hun arbejder målrettet mod at støtte eleverne i at anvende den som redskab. I den pågældende situation viser hun at hun selv bringer blokmodellen ind som et redskab til at støtte elevernes forståelse af gangefamilierne, altså sammenhængene mellem $3 \cdot 4 = 12$ og $12 : 3 = 4$ osv. (figur 9). Dette er et godt eksempel på hvordan blokmodellen støtter elevernes konceptuelle forståelse af regnearterne.



Figur 9. *Et eksempel på hvordan blokmodeller kan anvendes i arbejdet med gangefamilier.*

Perspektiver

Der er ingen tvivl om at visualisering generelt støtter læreprocessen. I forbindelse med problemløsning inden for de fire regnearter kan især skematiske modeller være et vigtigt redskab til at støtte oversættelsen fra de sproglige elementer til et algebraisk eller aritmetisk udtryk.

Mange lærere kender og underviser i metakognitive strategier til problemløsning, som fx Polyas (1956) fire faser (jf. figur 5), men visualiseringen af problemet kan opleves udfordrende for eleverne (Rellensmann et al., 2017). Her giver blokmodellen lærerne en strategi eller et redskab til at stilladsere hvordan man kan visualisere et problem på en måde så sammenhænge bliver tydelige. Undervisning i strategier til visualisering, såsom blokmodellen, har vist sig at styrke elevernes egne konstruktioner af matematisk korrekte modeller (Rellensmann et al., 2017). Blokmodellens skematiske form gør det også muligt at sammenligne forskellige situationer, herunder regnearterne, så ligheder og forskelle træder tydeligt frem.

I dette projekt er det tydeligt at både elever og lærere kan opleve frustrationer og udfordringer, hvilket kun er forventeligt. Blokmodellen bliver kun et relevant værktøj hvis både elever og lærere forstår modellen og ikke mindst dens begrænsninger. Nogle af de undervisningsmæssige udfordringer vi oplever, er at blokmodellen er unødvendig for nogle af eleverne på mellemtrinnet fordi problemstillingerne er for lette. Eleverne oplever altså at der ikke er tale om "rigtige" problemer (se fx Højgaard Jensen, 2009). Da eleverne ikke har arbejdet med blokmodellen tidligere, har det været nødvendigt at introducere den ved meget simple tekstopgaver så eleverne (og lærerne) har kunnet bliver fortrolige med den. Det har medført at nogle elever har haft svært ved at tage modellen til sig. Morin et al. (2017) påpeger da også at modellen bør indføres tidligt i skoleforløbet for at støtte forståelsen af de mere fundamentale tekstopgaver. Derefter kan lærerne bygge på denne konceptuelle forståelse af blokmodellen når mere komplekse problemer introduceres på ældre klassetrin. Erfaringerne fra dette udviklingsprojekt fra mellemtrinnet viser da også at blokmodellen med fordel kan indføres i de yngste klasser. På enkelte af skolerne gik lærerne selv i gang med denne proces.

Ud fra de første erfaringer med at introducere blokmodellen i forbindelse med et pilotprojekt i 4.-5. klasse mener vi at modellen har et potentiale som redskab for elevernes udvikling af konceptuel forståelse og som støtte i oversættelsen fra tekstopgave og til regnestykke i arbejdet med problemløsning.

I denne artikel har vi præsenteret erfaringer med introduktionen af blokmodellen baseret på lærernes oplevelser. Vi har endnu ingen data på elevernes udbytte af modellen. I forbindelse med TRACK-projektet vil det være relevant at undersøge i hvilken udstrækning elever anvender modeller baseret på visualiseringer i problemløsning, og i hvilken grad det bidrager til deres succes.

Referencer

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52(3)*, (s. 215-241). https://doi.org/10.1023/A:1024312321077.

Beckmann, S. (2017). *Mathematics for elementary teachers with activities* (5. udgave). Boston: Pearson.

Booth, J.L. & Koedinger, K.R. (2012). Are diagrams always helpful tools? Developmental and individual differences in the effect of presentation format on student problem solving. *British Journal of Educational Psychology, 82(3)*, (s. 492-511). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02041.x.

Bruner, J.S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist, 19(1)*, (s. 1-15). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1037/h0044160.

Chu, J., Rittle-Johnson, B. & Fyfe, E.R. (2017). Diagrams benefit symbolic problem-solving. *British Journal of Educational Psychology, 87(2)*, (s. 273-287). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1111/bjep.12149.

Dienes, Z.P. (1971). *The elements of Mathematics*. New York: Herder and Herder.

Greeno, J.G. (1983). Conceptual Entities. I: D. Stevens (red.), *Mental models* (s. 227-252). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ho, S.Y. & Lowrie, T. (2014). The model method: Students' performance and its effectiveness. *The Journal of Mathematical Behavior, 35*, (s. 87-100). Set 20.03. 2020 på https://researchprofiles.canberra.edu.au/en/publications/the-model-method-students-performance-and-its-effectiveness.

Højgaard Jensen, T. (2009). Modellering versus problemløsning – om kompetencebeskrivelser som kommunikationsværktøj. *MONA: Matematik- og Naturfagsdidaktik, (2)*, (s. 37-54). Set 20.03. 2020 på https://tidsskrift.dk/mona/article/view/36216.

Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM, 51(1)*, (s. 151-168). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y.

Kho, T.H., Yeo, S.M. & Fan, L. (2014). Model method in Singapore primary mathematics textbooks. I: K. Jones, C. Bokhove, G. Howson & L. Fan (red.), I*nternational Conference on Mathematics Textbook Research and Development 2014 (ICMT-2014), 29-31 July 2014* (s. 275-282). University of Southampton.

Kieran, C. (2006). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. I: F.K. Lester (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 707-762). Information Age Publishing.

Koleza, E. (2015). The bar model as a visual aid for developing complementary/variation problems. I: K. Krainer & N. Vondrová (red.), *CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1940-1946). Set 20.03. 2020 på https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288480.

Kribbs, E., & Rogowsky, B. A. (2015). A Review of the Effects of Visual-Spatial Representations and Heuristics on Word Problem Solving in Middle School Mathematics. International Journal of Research in Education and Science, 2(1), 65. Hentet via Googlesøgning 20.03. 2020 på doi:10.21890/ijres.59172.

Lowrie, T. & Kay, R. (2001). Relationship Between Visual and Nonvisual Solution Methods and Difficulty in Elementary Mathematics. *The Journal of Educational Research, 94(4)*, (s. 248-255). https://doi.org/10.1080/00220670109598758.

Ministry of Education (2012). *Mathematics syllabus: Primary one to five*. Singapore: Ministry of Education, Curriculum Planning and Development Division.

Morin, L.L., Watson, S.M.R., Hester, P. & Raver, S. (2017). The Use of a Bar Model Drawing to Teach Word Problem Solving to Students With Mathematics Difficulties. *Learning Disability Quarterly, 40(2)*, (s. 91-104). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1177/0731948717690116.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P. & Hooper, M. (2016). *TIMSS 2015 International Results in Mathematics*. Set 20.03 2020 på http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/.

Ng, S.F. & Lee, K. (2009). Model Method: A Visual Tool to Support Algebra Word Problem Solving at the Primary Level. I: K.Y. Wong, P.Y. Lee, B. Kaur & S.F. Ng (red.), *Mathematics Education. The Singapore Journey* (2, s. 169-203). https://doi.org/doi:10.1142/9789812833761_0008.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet.

Novotná, J., Bartolini Bussi, M.G., Beckmann, S., Inprasitha, M., Kaur, B., Sun, X.H.,... Askew, M. (2018). Professional Development Models for Whole Number Arithmetic in Primary Mathematics Teacher Education: A Cross-Cultural Overview. I: M.G. Bartolini Bussi & X.H. Sun (red.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades: The 23rd ICMI Study* (s. 399-435). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_17.

Osman, S., Che Yang, C.N.A., Abu, M.S., Ismail, N., Jambari, H. & Kumar, J.A. (2018). Enhancing Students' Mathematical Problem-Solving Skills through Bar Model Visualisation Technique. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 13(3)*, (s. 273-279). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.12973/iejme/3919.

Polya, G. (1956). *How to solve it; a new aspect of mathematical method.* (2. udgave). Princeton, NJ, US: Princeton University Press.

Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics, 95(1)*, (s. 53-78). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1.

Skemp, R.R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, (s. 20-26).

Undervisningsministeriet, 2019. *Matematik Faghæfte*. Lokaliseret den 13. 03. 2020 på https://emu.dk/sites/default/files/2020-02/GSK.%20Mat.%20Fagh%C3%A6fte.%20Februar%20 2020.pdf.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54(1)*, (s. 9-35). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc.

Verschaffel, L., Greer, B. & Corte, E. de. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24(3)*, (s. 335-359). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1007/BF03174765.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM, 52(1)*, (s. 1-16). Set 20.03. 2020 på https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4.

Vygotsky, L.S. (1978). Mind and Society: The Development of Higher Psychological Processes. *Harvard University Press*.

English abstract

In mathematics education, visualizations are used as representations to support the development of conceptual understanding and problem solving. One such model is the bar model. Based on Bruner's representations (concrete, visual and abstract), we propose a conceptual model for Representation-based Strategies in Problem Solving. We introduce the bar model, a schema based visual model, and give a brief outline of the international experience with this model. We present here the first experiences from a teacher's and teaching perspective with implementing the bar model in 4th-6th grade in the research project TRACK (Teaching Routines and Content Knowledge).