Matematik B: Regningen skal betales

Niels Grønbæk,
Københavns Universitet

Britta Jessen,
Københavns Universitet

Carl Winsløw,
Københavns Universitet

Abstract: *Hvad gik galt ved sommereksamen 2019 på det gymnasiale B-niveau i matematik? Var kravene for høje, eller havde eleverne lært for lidt? Hvad skal der gøres fremadrettet? Vi ser på disse spørgsmål på baggrund af Matematikudredningens og Matematikkommissionens anbefalinger, særlig de som (endnu) ikke er fulgt.*

Sommereksamen 2019 i matematik på B-niveau har allerede i skrivende stund fået en vis offentlig opmærksomhed, typisk med overskrifter der handler om katastrofale tilstande i gymnasiets matematik. I offentligheden florerer så de enkle "løsninger": adgangskravene til gymnasiet skal skærpes, timetallet til matematik må sættes op, opgaverne og/eller kernestoffet er for krævende, etc.

Trods nuanceforskelle for de fire gymnasiale uddannelsesformer, er det klart at eksamen ikke er gået særlig godt denne gang: fx har man på STX, Mat. B været nødt til at reducere den andel af opgaverne, som eleverne skal have besvaret korrekt for at få 02, til blot 20,5%. Vi fokuserer i det følgende på STX, Mat. B.

Gennem vores arbejde i Matematikkommissionen (2016) og med den forberedende Matematikudredning (2015) har vi beskæftiget os ret indgående med indhold og udfordringer i den gymnasiale matematik, ikke mindst på B-niveauet. Reformen af læreplanerne blev skrevet og implementeret få måneder efter offentliggørelsen af Matematikkommissionens rapport. Den mere ambitiøse læreplan skulle gennemføres samtidig med en politisk beslutning om at gøre Mat. B obligatorisk for nye og store grupper af elever, der ellers ville have valgt det fra. Reformen blev alene baseret på anbefalingerne vedr. læreplanernes indhold, mens man tilsyneladende valgte at ignorere Matematikudredningens kortlægning af andre centrale udfordringer, som allerede fandtes i 2015, fx vedr. overgangsproblemer og efteruddannelsesbehov, og som også refereres i Matematikkommissionens rapport. En mere detaljeret redegørelse herfor skal forholde sig til hele den empirisk baserede udredning af problemerne som allerede er publiceret for 4 år siden. Det falder uden for denne kommentars rammer.

Den aktuelle situation er imidlertid ikke overraskende. Man har fra politisk hold afgivet en stor ordre uden at se på regningen. Man har forlangt mere matematik til større elevgrupper uden investering i den nødvendige understøttelse af lærerarbejdet. Manglen på matematikundervisere og de store sparerunder på gymnasierne har endda yderligere vanskeliggjort lærernes vilkår for at løfte den større opgave. Endelig har man heller ikke undersøgt hvilke tiltag, der er nødvendige i folkeskolens matematikundervisning, for at understøtte det politiske ønske om at flere elever skal have matematik på et højere niveau. Som vi skal se, er indgangsniveauet i matematik i hvert fald en del af udfordringerne i gymnasiet. Og der en uheldig politisk tendens til at betragte og behandle folkeskole og gymnasium som om de var uafhængige af hinanden.

Vores anliggende med denne tekst er ikke at anvise snuptagsløsninger, men at pege på nogle af de dybere sider af problemerne, som tilsyneladende er ukendte for beslutningstagerne. Vi tager her udgangspunkt i to af årets opgaver, som på hver sin måde er symptomatiske for disse problemer. De elevresultater vi nævner, bygger på en stikprøve i form af en censorportefølje med 125 besvarelser fra gymnasier fordelt over landet.

Den første er fra Delprøve 1, hvor formelsamling er det eneste tilladte værktøj. Den omhandler reduktion af algebraisk udtryk og kunne også have været en opgave før reformen. Det nye er at den er klassificeret som en mindstekravsopgave. Mindstekravsopgaver er et koncept som Matematikkommissionen har anbefalet. Mindstekravsopgaver peger samlet på hvad der skal til for få mindst 02. Man kan diskutere brugen af begrebet i årets sæt, men det er et faktum at eleverne i år kunne bestå uden at løse mindstekravsopgaverne.

Opgaven giver op til 5 point (af 200 mulige). I stikprøven opnår eleverne gennemsnitligt 2,16 point, svarende til 43% af den mulige pointscore.

Opgave 2
Reducerer udtrykket $(a + b)^2 - b \cdot (2a + b)$

Opgavens løsning kræver brug af algebraiske basisregler (kvadrat af toleddet størrelse, distributive lov mv). De fleste mister points ved kun at kunne dette delvist, fx ved at glemme det dobbelte produkt eller lave fortegnsfejl ved hævning af minusparenteser, men en del elever besvarer opgaven vha. transformationer som er helt frit opfundne, eksempelvis $(a+b)^2 - b \cdot (2a+b) = a^2 + b^2 - 2a + b = 2a + 2b - 2a + b = 3b$ $(a+b)^2 - b \cdot (2a+b) = a^2 + b^2 - 2a + b = 2a + 2b - 2a + b = 3b$. Kun 24 % af stikprøvens 125 elever kan gøre dette fejlfrit.

Opgaven kunne i princippet være stillet ved folkeskolens afgangsprøve (og tilsvarende, typisk lidt enklere opgaver, stilles da også der). Der er klart tale om en færdighed, som i hvert fald i et vist omfang burde have været opnået i folkeskolen. Af data fra folkeskolens afgangsprøve (færdighedsregning, 9. kl.) fremgår, at kun ca. 60% af eleverne ved folkeskolens afgangsprøve behersker de allersimpleste operationer med brøker. I parentes bemærket gælder det ca. 95% af eleverne ved tilsvarende tests efter 6. klasse i Japan. Og der er stærk forskningsevidens for, at grundforudsætninger for succes med gymnasial matematik etableres tidligt i skoleforløbet, og fx er elevernes færdigheder i brøkregning omkring 5./6. klasse en stærk prædiktor for succes med matematik på gymnasialt niveau, også når der korrigeres for andre faktorer som køn, social baggrund, osv. (se fx Siegler et al., 2012). En af forklaringerne er, at brøkregningen indeholder de aritmetiske grundprincipper, som efterfølgende skal bruges i den basale algebra (bogstavregning). Resultatet viser sig tydeligt her, hvor vi endda taler om elever som har valgt og er blevet optaget på STX, og som derefter har haft matematik gennem yderligere to år i gymnasiet.

Problemet, som elevresultaterne i Opgave 2 udstiller, er meget alvorligt. Der er meget lidt af gymnasiematematikkens opgaver og teori som ikke i et eller andet omfang bygger på basal algebra af den art som opgaven tjekker elevernes greb om. Algebraiske grundfærdigheder er uundværlige i al videregående uddannelse der i blot mild form bygger på matematik (herunder matematiske modeller). Der er derfor helt utvivlsomt behov for en ny og langt mere eksplicit fokus på basal algebra både i skolematematikken, i gymnasiematematikken og på de tilsvarende læreruddannelser. En del af denne indsats handler om at udvikle en mere kritisk og vidensbaseret brug af CAS-værktøjer i matematikundervisningen på alle niveauer af uddannelsessystemet.

Opgave 10

Et lykkehjul består af 25 felter. Det antages, at sandsynligheden for at lykkehjulet stopper på et vilkårligt felt, er den samme for alle felter. En spiller formoder, at lykkehjulet stopper oftere på felt nr. 1 end på ét af de øvrige felter. Ved en optælling af resultatet af 490 spil stoppede lykkehjulet 30 gange på felt nr. 1.

a) Opstil en nulhypotese, der kan bruges til at teste, om spilleren har ret i sin formodning.

b) Benyt et binomialtest til at undersøge, om man kan forkaste nulhypotesen på et 5% signifikansniveau.

Den anden opgave (opgave 10 i delprøve 2) omhandler "hypotesetest i binomialfordelingen", som fra 2017 er en del af kernestoffet på dette niveau (Undervisningsministeriet, 2017b). Selvom der er tale om et nyt emne ved skriftlig eksamen har det formentlig været på dagsordenen i en del klasser før reformen, fordi der var krav om at behandle både chi-i-anden testen og "yderligere mindst én anden statistisk eller sandsynlighedsteoretisk test" (Undervisningsministeriet, 2013).

Opgaven er delt i to delspørgsmål, begge til 10 point. I stikprøven var den gennemsnitlige score hhv. 34% og 28%.

En del elever har blandet spillerens formodning sammen med den nulhypotese, man skal opstille i a). Eleven skal også bestemme sandsynlighedsparameteren p for basiseksperimentet, og afklare den alternative hypoteses sammenhæng med $p > p_0$, $p < p_0$, $p \neq p_0$, svarende til højre, venstre og tosidig test. Delspørgsmål b) løses med brug af computer. Teknisk set drejer det sig om korrekt indtastning i diverse kommandoer (afhængig af matematikværktøj, men typisk ret simpelt). Hvor let det er for eleverne, afhænger naturligvis af om deres lærer har set behovet for at træne denne type opgaver med eleverne. Men man kan næppe stille en mere "standardiseret" opgave i emnet hypotesetest end denne.

Man kan argumentere for, at hvis denne type opgave fremadrettet bliver en fast del af de skriftlige eksamener, vil de gå bedre fordi de bliver trænet mere intensivt. Et af de grundproblemer, som udpeges i Matematikudredningen, var dog netop træning af standardopgaver som kan løses med CAS-kommandoer uden indsigt i den bagvedliggende betydning og teori. Som en lærer formulerede det (Jessen, Holm & Winsløw, 2015, s. 13): "man skal som lærer være idealistisk for at holde fanen højt og undervise sine elever, så de bliver gode til matematik, når eleverne kan klare sig lige så godt til eksamen ved en undervisning, der er fokuseret på CAS-kommandoer og modelbesvarelser".

Det vil dog stride mod helt fundamentale mål i reformen at stille de samme typeopgaver ved hver eksamen, med risiko for at undervisningen reduceres til træning af standardteknikker og skabelonbesvarelser. Netop sandsynlighedsteori og statistik er betonet, fordi de kan bruges til at modellere mange vigtige fænomener. At lære det kræver dog en undersøgelsesorienteret tilgang (jf. Artigue & Blomhøj, 2013), hvor man ikke kun træner standardmetoder, men også får indsigt i disses betydning og teoretiske baggrund. Undersøgelsesorienterede tilgange stiller langt større krav til lærerne end undervisning i standardmetoder og -beviser. Der er specielt behov for efteruddannelse i direkte tilknytning til nye og forskningsbaserede undervisningsmaterialer som de, der er udarbejdet i europæiske projekter som MERIA[1] (2019) og

1 Dette projekt blev gennemført med støtte fra ERASMUS+ af forskere og matematiklærere fra flere lande i Europa. Fra Danmark deltog Matematiklærerforeningen og artiklens forfattere.

PRIMAS (Garcia et al., 2013), hvor man bl.a. kan finde omfattende og veldokumenterede undervisningsmaterialer, samt synteser af forskningslitteratur som kan give lærerne fast grund under fødderne i det videre arbejde med at tilpasse materialet og udvikle nyt. Det er også klart, at der er behov for initiativer som sikrer at elevernes tekniske grundlag fra folkeskolen er på plads, herunder at eleverne behersker aritmetikkens basale love og kan bruge dem til elementær bogstavregning. Ganske vist indfører reformen en screeningtest i slutningen af grundforløbet i 1.g. Screeningen skal danne baggrund for elevernes valg af niveau (C, B, A) og klargøre om eleven har de nødvendige forudsætninger i beredskab. Der findes vejledende screeningstest fra ministeriet, men reelt er det helt op til den enkelte skole at udforme testen, evaluere elevernes præstationer og drage konsekvenser af testresultatet. Det er åbenbart at denne øvelse er resursekrævende og kan falde meget uensartet ud for de forskelige gymnasier. Men vigtigere er det, at kravene om Mat. B til meget brede elevgrupper betyder, at målrettede styrkelser i folkeskolens matematik er påkrævede, hvad resultaterne i Opgave 2 som sagt allerede illustrerer.

Problemet med det aktuelle eksamenssæt er altså ikke at nogle af de "nye" opgaver endnu ikke er blevet så velkendte standardopgaver, at alle elever har trænet dem tilstrækkeligt til at bestå. Sættet afspejler reformens intentioner og opgavestoffet må ikke standardiseres yderligere end tilfældet er nu. Det er vigtigt at fastholde læreplanernes faglige ambitionsniveau.

Hovedudfordringen er rent faktisk at gennemføre reformens ambitioner om, at eleverne lærer matematisk teori og praksis i sammenhæng og på et niveau, hvor de kan løse opgaver de ikke har set mage til før. Forhindringerne er i vidt omfang kendte (nogle er nævnt ovenfor, flere i Matematikudredningen) – men der er ikke for alvor taget fat på dem, hvilket nu har vist sig. Man kan ikke forlange en dyrere ret til flere gæster, og forvente at regningen forbliver den samme.

Referencer

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ZDM, 45(6), 797-810.

García, F. J. (Ed.) (2013). Guide for professional development providers, Primas – Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe. Retrieved from: file:///Users/lpz728/Downloads/FINAL_WP4_Guide_PD_providers_licence_150708.pdf

Jessen, B. E., Holm, C., & Winsløw, C. (2015). *Matematikudredningen: Udredning af den gymnasiale matematiks rolle og udviklingsbehov.* Copenhagen: Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet (IND's Skriftserie nr. 42).

MERIA (2019). The Project MERIA. Retrieved from: https://meria-project.eu/

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M., Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. Psychological Scien-ce, 23(7), 691-697.

Undervisningsministeriet. (2013) Bilag 36, Matematik B – stx, juni 2013. København: Undervisningsministeriet. https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=152507#Bil36

Undervisningsministeriet. (2017a). *Matematikkommissionens rapport*. København: Undervisningsministeriet. Retrieved from https://www.uvm.dk/aktuelt/nyheder/uvm/udd/gym/2017/jan/170116%20anbefalinger%20skal%20styrke%20matematikundervisningen%20i%20gymnasiet

Undervisningsministeriet. (2017b). Bilag 112, Matematik B – stx, august 2017. file:///Users/lpz728/Downloads/Matematik-B-stx-august-2017%20(9).pdf