

Udgange på undersøgende matematik



Mie Engelbert Jensen,
UC SYD



Rune Hansen,
UC SYD

Abstract: I denne artikel præsenteres og analyseres udvalgt empiri knyttet til opsamling og fællesgørelse af elevers undersøgende arbejde i matematik på mellemtrinnet. Empirien er indsamlet i projektet "Kvalitet i Dansk og Matematik" (KiDM) som gennem et pilotforløb og tre interventionsforløb på 45 skoler har tilrettelagt særlige undervisningsforløb af et halvt års varighed hvor der har været fokus på undersøgende og dialogisk matematikundervisning. Gennem projektet har vi indsamlet empiri både under besøg på skolerne, via referater fra faggruppemøder og gennem opsamlingsmøder i regionerne. I denne artikel kategoriserer og analyserer vi lærernes vanskeligheder ved at samle op på elevernes undersøgende arbejde.

Indledning

I nyere dansk matematikdidaktik har der i flere omgange været en særlig opmærksomhed mod undersøgende matematik (Blomhøj, 2013; Dreyøe et al., 2017; Hansen & Hansen, 2013; Skovsmose, 2003). Artiklen her tager afsæt i projektet "Kvalitet i Dansk og Matematik" (KiDM) der bl.a. fokuserede på etablering af undersøgende tilgange gennem tre faser i matematikundervisningen: *iscenesættelse*, *aktivitet* og *fællesgørelse* (Larsen & Lindhardt, 2019). I lærervejledningerne på projektets hjemmeside beskrives de tre faser med reference til Blomhøj (2013) hvor *iscenesættelse* omhandler hvordan aktiviteten introduceres, motiveres og igangsættes. *Aktivitet* relateres til elevers frihedsgrader i det undersøgende arbejde hvor læreren bør være varsom med at overtage styringen. *Fællesgørelse* er den opsamlende fase hvor elevers erfaringer, resultater og refleksioner danner grundlag for opbygning af fælles faglig viden i klassen. Vendingen *undersøgende matematikundervisning* henviser i denne artikel ligesom i KiDM-projektet til en deltagerstyret, problem- og undersøgelsesbaseret undervisningsmetode hvor udgangspunktet er fælles åbne spørgsmål eller problemstillinger som eleverne alene og/eller i mindre grupper søger at finde en løsning på ved hjælp af forskellige former for undersøgelser. Undervejs støttes og guides eleverne af deres lærer.

Med afsæt i KiDM-projektet præsenterer og analyserer vi empiri knyttet til opsamling og fællesgørelse af elevers undersøgende arbejde på mellemtrinnet. Vi søger at besvare følgende spørgsmål:

- Hvad karakteriserer de involverede matematiklæreres vanskeligheder i fællesgørelsen af elevernes undersøgende arbejde i KiDM?
- Hvilke didaktiske tiltag kan imødegå de identificerede vanskeligheder?

I artiklen rettes opmærksomheden mod fasen om fællesgørelse da denne fase viser sig at være skueplads for den modsigelse der ligger imellem individ og fællesskab. Dvs. at eleverne konstruerer individuelle meninger samtidig med at meningsfuld læring finder sted i en social kontekst (Sfard, 1998). I vores empiri er der indikationer på at det er svært at få eleverne til at dele og udtrykke deres erfaringer og refleksioner, samt at det er vanskeligt for læreren at tilrettelægge en klasserumssamtale der både skal tydeliggøre og anerkende de unikke og forskellige undersøgelsesmetoder og samtidig skal samle elevernes forskellige bidrag til enkelte faglige pointer.

Undersøgende matematikundervisning

I en undersøgende matematikundervisning er undersøgende arbejde et didaktisk redskab for matematiklærere i forbindelse med at tilrettelægge undervisnings- og læringssituationer hvor elever har mulighed for at udvikle relationel forståelse (Skemp, 2002) og forskellige grader af autonomi (Artigue & Blomhøj, 2013; Hansen & Hansen, 2013). Med relationel forståelse og autonomi mener vi at eleverne i en vis grad selv tager styringen med matematikken og arbejder med at forstå både *hvad* der foregår i matematikken, og *hvorfor* det sker. Undervisningsstrukturerne i en undersøgende matematikundervisning er ofte anderledes end i en formidlingsorienteret undervisning da elever arbejder og taler sammen i små grupper. Samtidig ændres lærerens rolle da vedkommende ikke længere skal indtage en formidlende rolle, men derimod gennem stilladsering skal kunne hjælpe og støtte elevernes arbejde. Den undersøgende matematikundervisning retter opmærksomheden mod etablering af dialog-baseret matematiklæring der er kendetegnet ved en diskurs hvor parterne så vidt muligt er ligeværdige (Alrø & Skovsmose, 2006). Når eleverne samarbejder i grupper med undersøgende aktiviteter, opstår der muligheder for at gruppens medlemmer kan kommunikere gennem dialoger der udspringer af deres nysgerrige arbejde med matematikken. Samtidig skaber undervisningsstrukturen rum for at grupperne kan interagere med hinanden i enten kortere eller længere sekvenser hvor de fx kommer med forklaringer, reformulerer deres tanker, stiller spørgsmål eller udfordrer hinandens forståelser (Alrø & Skovsmose, 2006).

KiDM-projektet er baseret på tre teser eller principper som er knyttet til elevernes

udbytte af undersøgende og dialogbaseret matematikundervisning (EMU, Information om KiDM-projektet, 2019):

- En undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger effekten af elevens forståelse for matematiske begreber og udvikler hensigtsmæssige arbejdsmåder.
- Motivationen øges hvis eleverne oplever indholdet meningsfuldt både med udgangspunkt i faget selv og i fagets anvendelse.
- En undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning med rum til elevdeltagelse øger muligheden for at implementere de matematiske kompetencer.

Teserne var styrende for projektet både i ansøgningsarbejdet, gennem interventionerne og nu i den afsluttende fase hvor resultater fra projektet samles og beskrives af projektmedarbejderne. Hver af de involverede skoler har fået præsenteret og forklaret teserne, og de har også været tydelige i interventionernes tiltag som bestod af grundige lærervejledninger og nøje udvalgte elevaktiviteter der emnemæssigt var knyttet til tal og algebra, geometri og måling samt statistik og sandsynlighed.

Undersøgelsesaspektet er centralt for læringen, men der lægges også vægt på (Michelsen et al., 2017, s. 6):

- at eleverne konstruerer mening
- at meningsfuld læring finder sted i en social kontekst
- at læring understøttes af meningsfulde kontekster
- at læring er en dialogisk proces.

I undersøgende matematikundervisning bør der være forskellige grader af elevstyring og medbestemmelse (Blomhøj, 2013; Hansen & Hansen, 2013). I nogle af tiltagene i KiDM er der en helt central og snæver matematisk pointe med det undersøgende arbejde, fx undersøgelse af trekantsuligheden gennem en rebtrekant, og i de tilfælde kan for meget elevstyring modarbejde vigtige erkendelser hos eleverne. Derfor kan sådanne undersøgelser stilladseres med præcise spørgsmål og instrukser til eleverne. I andre af KiDM's tiltag kan læreren vurdere at ikke alle elever eller grupper er kognitivt klar til at håndtere de selvstændige arbejdsformer som ligger i den undersøgende matematikundervisning. I disse situationer må læreren løbende justere undervisningens rammer så eleverne efterhånden oplever små eller store glimt af at kunne handle på egen hånd i mødet med de undersøgende aktiviteter. I KiDM-projektet placeres den mest åbne aktivitet i slutningen af forløbet ud fra en formodning om at både elever og lærere først skal øve sig på det undersøgende arbejde før de kastes ud i en helt åben tilgang.

I forlængelse af projektets fokus på elevdeltagelse og læring som et socialt fænomen har vi i forbindelse med fællesgørelsen af elevernes undersøgende arbejde med

matematik søgt teoretisk fundament hos Towers, Martin og Heater (2013). I deres forskning anbefaler de at matematiklæreren både arbejder med organisering i klassen og med læringsfællesskabets syn på hvordan matematik læres. Den undersøgende undervisning kan organiseres på en måde hvor elever tager på lynvisit i andre grupper og ser deres arbejde og vender hjem igen med nye idéer. Samtidig er det centralt at matematiklæreren tydeliggør for eleverne at "ny matematik" er blevet konstrueret i fællesskabet. Matematik er ikke statisk – det er derimod en dynamisk størrelse der udvikles i klassefællesskabet. Når en gruppe har løst et matematisk problem, er løsningen indgang til den fælles klassesdiskurs, og gruppens arbejde skal ikke "rettes" eller bedømmes. Når man gennem en undersøgende tilgang gør sig erfaringer med matematik, skal det understøttes af fællesskabet, hvilket kræver at eleverne forstår at for at deltage i den undersøgende matematikundervisning må de selv bidrage til en frugtbar dialog (Towers, Martin & Heater, 2013).

I et review om den undersøgende matematikundervisning beskriver Pedaste et al. (2015) den afsluttende fase (fællesgørelsen) ved at skelne mellem to typer af refleksioner som er knyttet enten til resultater af en åben udforskning baseret på mere eller mindre autonome og nysgerrige spørgsmål eller til resultater fra mere afgrænsede hypotesedrevne eksperimenter. De argumenterer for at eleverne i den undersøgende undervisning anvender refleksion-i-handling (Schön, 2001) når de forholder sig vurderende til deres undersøgende proces i en af undersøgelsens igangværende faser. Ved afslutningen på en undersøgelse er der i KiDM fokus på fællesgørelsen hvor matematiklæreren skal udfordre eleverne til både at forholde sig til pointer fra deres undersøgelser og til deres undersøgende proces (Pedaste et al., 2015).

Ovenstående har dannet baggrund for den undersøgende matematikundervisning som blev gennemført i KIDM-projektet. Denne artikel er en delundersøgelse hvor vi zoomer ind på netop fællesgørelsen knyttet til de tiltag som blev gennemført i projektet.

FAKTABOKS:**KiDM-projektets arbejdsgang på helt kort form:**

- Regionale opstartsmøder for alle deltagende lærere på forsøgsskolerne
- Starttest af elever (specielt udviklet test)
- Faggruppemøde med speciel dagsorden knyttet til fasen iscenesættelse
- Specielt undervisningsforløb knyttet til tal og algebra, varighed ca. 4 uger
- Faggruppemøde med speciel dagsorden knyttet til fasen aktivitet
- Specielt undervisningsforløb knyttet til geometri og måling, varighed ca. 4 uger
- Faggruppemøde med speciel dagsorden knyttet til fasen fællesgørelse
- Specielt undervisningsforløb knyttet til statistik og sandsynlighed, varighed ca. 4 uger
- Sluttest af elever (specielt udviklet test)
- Regionale afslutningsmøder for alle deltagende lærere på forsøgsskolerne.

Baggrunden for artiklen

KiDM-projektet blev initieret af Undervisningsministeriet og gennemført i 2015-2018 i flere klasser på forsøgsskoler og interventionsskoler samt kontrolskoler fordelt over hele Danmark. Idéen i projektet er at matematiklærere gennem forskerudviklet undervisningsmateriale og grundige lærervejledninger forpligter sig på at gennemføre en undersøgende matematikundervisning i deres klasser over en periode på ca. 6 måneder. Elevernes læringsudbytte blev målt gennem specielt udviklede tests før og efter interventionerne. De specialudviklede tests blev gennemført både på forsøgsskolerne og på kontrolskolerne, og efterhånden som vores data fra disse tests bliver analyseret, er der håb om at vi i forskningsgruppen kan finde ud af om undersøgende matematik kan have en gavnlige effekt på elevernes testresultater. Den specialudviklede test var computerbaseret og blev udviklet af Dorte Moeskær Larsen og andre medarbejdere i KiDM-gruppen på baggrund af grundige artikelstudier. Testen bestod både af opgaver der måler begrebsforståelse, og opgaver der måler på undersøgende elementer af de matematiske kompetencer, og var en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver med plads til elevernes skriftlige tekstbesvarelser. Her er et eksempel på en opgave med krav om tekstbesvarelse. Opgaven tester elevens spontane begreber inden for statistik og har også et fokus på ræsonnementskompetencen idet de skal begrunde deres svar:

Temperaturen er blevet målt i to forskellige uger i december og i januar

December:

Dag	temperatur
Mandag	4
Tirsdag	0
Onsdag	2
Torsdag	7
Fredag	2
Lørdag	0
Søndag	6

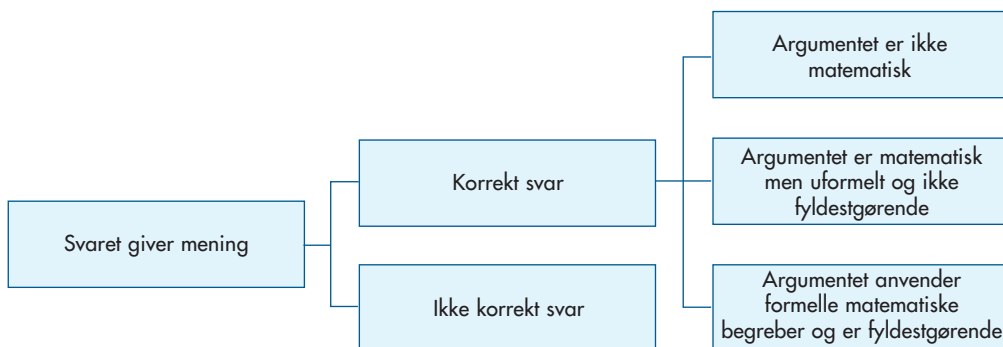
Januar:

Dag	temperatur
Mandag	10
Tirsdag	1
Onsdag	2
Torsdag	4
Fredag	3
Lørdag	4
Søndag	4

Sammenlign temperaturen i de to uger – hvad kan du sige?

Begrund dit svar.

Hver elevs tekstbesvarelse blev kodet og tildelt point efter en manual der fulgte variationer af dette mønster:



Yderligere eksempler på testopgaver og kvantitative resultater fra elevernes tests bliver offentliggjort som en del af projektets samlede afrapportering som er under udarbejdelse. I denne artikel har vi som sagt fokus på de kvalitative resultater fra projektet.

Parallelt med interventionerne i matematikundervisningen havde projektet også et fokus på hvordan udviklingsprojekter kan skabe forandringer og udviklinger for matematiklærere på længere sigt. For at undersøge det parallelle spor blev der undervejs i interventionsperioden afholdt mindst tre faggruppemøder på forsøgsskolerne hvor de deltagende lærere forholdt sig didaktisk reflekterende til lærervejledningen og materialet. For at blive klogere på hvilke vanskeligheder matematiklærere møder i de afsluttende faser af undersøgende matematikundervisning, havde vi i KiDM-

projektet tilrettelagt et faggruppemøde på alle forsøgsskolerne med overskriften "Fællesgørelse". Denne artikel bygger primært på referater fra disse møder. På mødet blev lærerne bedt om at arbejde med en nøje tilrettelagt dagsorden hvor de bl.a. drøftede følgende temaer i forbindelse med fællesgørelser:

1. Overgangene fra elevernes uformelle sprog til det formelle matematiske sprog
2. Åben strategideling versus pointestyret deling
3. Andre former for elevfremlæggelser
4. Andre idéer til fællesgørelse.

Vi har fået tilsendt alle referater fra disse faggruppemøder og suppleret med skriftlige observationer indsamlet af projektets medarbejdere både fra deltagelse i faggruppemøder på fire forsøgsskoler og fra enkelte besøg i forsøgsklasserne. Med afsæt i disse kvalitative materialer har vi afdækket en række problemfelter knyttet til fællesgørelsen af elevernes undersøgende arbejde i matematik.

Det er her værd at bemærke at kvalitative metoder ofte anvendes når situationen er vanskelig at observere med tal. I vores afdækning har vi både anvendt observationer og referater med specifikke deltagere på bestemte skoler, og derfor er en kvalitativ tilgang mest velegnet. Tilgangen med at undersøge alle referater og udvælge besøg på få skoler har skabt et udgangspunkt for en grundig behandling af materialerne, og vi er opmærksomme på at vi ikke forsøger at behandle vores data med afsæt i et statistisk perspektiv. De kvantitative elementer som muligvis kan spores i vores dataindsamling, er funderet i en kvalitativ tilgang med fokus på at skabe en bedre forståelse for fællesgørelsen af elevernes undersøgende arbejde.

Identificerede problemfelter knyttet til fællesgørelsen

Dette afsnit er opbygget omkring vores didaktiske analyser af observationer på skolerne og referater fra faggruppemøderne i KiDM-projektet hvor vi har identificeret en række udfordringer og problemfelter for fællesgørelsen.

Organisering af og vanskeligheder knyttet til elevernes fremlæggelser

I forbindelse med elevfremlæggelser har vi indtryk af at de involverede lærere deler sig i to grupper der befinder sig i hver sin ende af en didaktisk skala der måler hvem der skal overvære fremlæggelserne i matematiktimerne. Vi har derfor valgt at belyse organisering af og vanskeligheder knyttet til elevernes fremlæggelser i to underafsnit svarende til at nogle matematiklærere mener at læreren skal se alle fremlæggelser, mens andre lærere mener at eleverne kan fremlægge uden at læreren nødvendigvis ser alle fremlæggelser.

Lærerne i den første gruppe pointerer at det er vigtigt med en kvalificeret evaluering

af undersøgelsen som en del af fremlæggelsen. De oplever tit i gruppefremlæggelser at grupperne er for flinke ved hinanden. Gruppe-til-gruppe-fremlæggelser har sjældent tilstrækkeligt fagligt niveau, og der er bekymring forbundet med gruppe-til-gruppe-fremlæggelser – får de sagt det rigtige? Hvem retter deres fejl? Disse lærere mener at hvis læreren ikke er til stede i fremlæggelserne, så falder det faglige niveau da eleverne ikke selv formår at fremhæve matematiske pointer og udfolde fejlelementer i deres klassekammeraters produkter. Lærerne i den anden gruppe har gode erfaringer med at lade eleverne fremlægge for hinanden i grupper og fremhæver gruppefremlæggelser som en særlig styrke i det undersøgende arbejde. I faggrupperne var der tilsyneladende en villighed til at drøfte dette centrale element, og referaterne viser at faggrupperne fint har kunnet håndtere de forskellige positioner i diskussionerne uden nødvendigvis at nå til enighed.

Fremlæggelser for hele klassen

Formålet med klassefremlæggelser er at det giver eleverne mulighed for at høre og reflektere over de forskellige tilgange og mulige løsninger på opgaverne. Med afsæt i vores observationer bliver det tydeligt at de fleste elever ikke formår at gribe denne mulighed. Eleverne har svært ved at holde fokus på andet end deres egen fremlæggelse og stiller ikke spørgsmål til deres kammeraters fremlæggelser. Fx observerede vi at en elev fik en størsteværdi på 12 og en mindsteværdi på 4. Den næste elev fik en størsteværdi på 8 og en mindsteværdi på 3. Hverken læreren eller de elever der var publikum, undrede sig over at de to elever kunne få helt forskellige deskriptorer selvom de havde behandlet det samme datasæt.

Vores observationer underbygges af citater fra faggruppemødernes referater:

- Fremlæggelser fungerer bedst hvis de forskellige grupper fremlægger forskellige undersøgelser – ellers kan det føles “dræbende”.
- At fremlægge i matematik har ellers ikke været brugt så meget – det har mest handlet om opgaveløsning [før KiDM-projektet].
- Det startede lidt op ad bakke med de fremlæggelser.
- Ikke alle elever kommer til orde i fremlæggelserne.
- Eleverne er blevet bedre til ikke kun at fokusere på selve fremlæggelsen, hvordan de står, holder papiret m.m. Efterhånden tør eleverne også at have fokus på det faglige indhold, og eleverne er blevet bedre til at have fokus på det matematiske stof i fremlæggelserne.
- Fællesgørelse for hele klassen er tidskrævende, og det kræver træning for at få et fagligt niveau.

Bemærkningerne peger på at fremlæggelser i matematik kan være ramt af begynder-vanskeligheder. Det tager tid at ændre didaktiske rutiner (Hansen, 2019), og når det

både er nyt at arbejde med fremlæggelser og at arbejde dialogisk og undersøgende, så kan det skabe store udfordringer for den didaktiske kontrakt som skal genforhandles på flere planer samtidig (Hansen, 2019). Matematiklærere skal hjælpes til at håndtere dette så de ikke afskriver en undersøgende og dialogisk undervisningsform på grund af indledende udfordringer som over tid kan imødekommes gennem øvelse og reflekterede overvejelser. I lærervejledningerne hørende til KiDM-materialet er der desuden tydelige eksempler på et større fokus på iscenesættelsen og aktivitetsfasen, hvorimod lærervejledningen til fællesgørelsen af nogle af de undersøgende aktiviteter har været kortfattet og mangelfuld. Det kan være en væsentlig årsag til at lærere betoner denne dimension som en udfordring.

Fremlæggelser som gruppe til gruppe

I vores empiri er der forskellige tilgange til elevernes fremlæggelser. Følgende citat fra et faggruppemøde giver indblik i en særlig udfordring lærere møder i forbindelse med fremlæggelser som gruppe til gruppe:

Hvis læreren ikke lader alle elever fremlægge i klasserne, er det vigtigt undervejs i forløbet at komme godt rundt til alle grupper så der dels er føling med den faglige progression og det faglige niveau, men også så eleverne føler sig set/hørt og får en feedback der kan give anledning til ny undring. Dette kan være en udfordring fordi der netop i den undersøgende matematik er så mange praktiske ting at forholde sig til som lærer.

Vores empiri har givet indblik i at nogle lærere har koblet grupperne sammen parvis og ladet dem fremlægge for hinanden. I disse strukturer er lærerne udfordrede i forhold til at nå at komme rundt til grupperne, bl.a. fordi der er mange praktiske ting at forholde sig til. Under vores observationsbesøg på skolerne noterede vi at fremlæggelser mellem grupper nogle gange fremkaldte meget aktivitet hos publikum, som stillede uddybende spørgsmål, og som gennem deres spørgsmål tvang fremlæggerne til at tydeliggøre deres pointer. Undervejs i disse fremlæggelser blev misforståelser ofte tydelige, og de grupper der fremlagde deres arbejde, var hurtige til at lytte og havde nemt ved at indrømme fejl, der hurtigt blev rettet, fx gennem denne replik: "Nå ja, den løsning havde vi ikke set, den sætter vi lige på her." Denne handling fremkaldte i øvrigt et vigtigt spørgsmål fra publikumsgruppen: "Jamen hvad nu hvis der er endnu flere løsninger som vi bare heller ikke har set?"

En del gruppefremlæggelser gav indblik i at aktiviteter med et facit skabte situationer hvor eleverne havde svært ved at abstrahere fra at gå målrettet efter facit. Når der ikke var et facit, var eleverne bedre til at blive optagede af forskellige løsningsmetoder. Dette tyder på at eleverne måske har et fagsyn om at matematik handler om at løse opgaver rigtigt. Selvom det undersøgende arbejde med gruppe-til-gruppe-

frelæggelser lægger op til en organisering og et fagsyn der minder om deltagelsesperspektivet fra Towers, Martin og Heater (2013), så befinder eleverne og lærerne sig i en sociomatematisk norm præget af en bestemt form for opgaveregning, og der er tilsyneladende en grænse for hvor meget autonomi der er mulighed for at koble ind i matematiktimerne. Her ser vi en slags træghed hos eleverne som i vores erfaring ofte er en betingelse for matematik-didaktisk forskning¹. Det har tilsyneladende stor betydning hvordan eleverne er vant til at arbejde med matematik, hvilket er med til at præge deres tilgange til interventionerne – og selvom der er tale om et langvarigt projekt med undersøgende matematikundervisning, så er det vanskeligt at påvirke elevernes fagsyn både på kort og lang sigt.

I den samme time så vi imidlertid også gruppe-til-gruppe-frelæggelser der blev afviklet helt uden dialoger mellem fremlæggerne og publikum. Vi ser konturer af en virkelighed hvor selv en gennemtænkt deltagelsesorganisering ikke automatisk skaber et nyt syn på hvordan matematik læres. Hvis læreren og eleverne ikke tror på at matematik udvikles og læres i fællesskabet, så kan selv en grundig organisering og nøje udvalgte opgaver falde til jorden.

Frelæggelser for yngre elever

I en del af forsøgsklasserne blev der eksperimenteret med fremlæggelser for yngre elever. I disse situationer fik vi følgende refleksioner fra lærerne:

- De små kunne ikke give den feedback der kan give anledning til nye undringer.
- Yngre elever er tit uden “filter” – de giver feedback der måske ikke er helt saglig, men den er upoleret.
- De yngre elever stiller ofte mange spørgsmål så grupperne er nødt til at have fuld forståelse for pointerne.

Når elever fremlægger for yngre elever, er der gode muligheder for at der opstår tydelig feedback og spørgsmål fra publikum, hvilket vi ikke iagttog ret ofte når der var fremlæggelser på klassen. I vores observationer så vi dog ikke tegn på at disse fremlæggelsesformer gav anledning til en fælles dialogisk matematiklæring. Der er stor forskel på at være ældre fremlægger-elev og på at være yngre publikum-elev, og når der blev arrangeret fremlæggelser for yngre elever, kunne vi ikke umiddelbart observere ligeværdige bidrag til klassens fælles læring.

1 Vi er klar over at vores oplevelser i situationen modsiges af fx Jo Boaler som med succes har arbejdet med at ændre elevers fagsyn og matematiske mod, selv gennem korte MOOC-kurser. Dette område kunne godt fortjene en nærmere undersøgelse i en dansk kontekst.

Organisering af og vanskeligheder knyttet til elevernes filmprodukter

Som et alternativ til fremlæggelser lægger flere af tiltagene i KiDM-projektet op til at elever skal lave små film som afslutning på deres undersøgende arbejde. På faggruppemøderne med fokus på fællesgørelse blev arbejdet med film også nævnt i flere af referaterne.

Lærerne i projektet giver bl.a. udtryk for følgende i forbindelse med film som produktgenre:

- Eleverne kan fastholde deres mundtlighed.
- Eleverne ejede i høj grad deres egne film.
- Det var tydeligt, hvad eleverne havde lært.
- Eleverne havde svært ved at bruge præcise fagord i filmene.

Elevers sprog og holdninger til matematikken udvikles gennem fælles praksisser der er struktureret af lærerens handlinger og forventninger, men i vores empiri er der en uoverensstemmelse mellem lærernes forventninger og elevernes kommunikative beredskab i matematik. Elever har brug for at besidde et ganske særligt ordforråd i matematik så de kan anvende faglige ord og begreber til at forklare, begrunde og kommunikere matematisk. Udviklingen af et matematisk sprog udgør en central dimension i deres matematiske kompetenceudvikling (Hansen, 2019), og sprog er en central dimension i elevers forståelse af matematik (Riccomini et al., 2015), hvilket filmproduktionen retter opmærksomheden mod.

Eleverne tør konstruere deres egne meninger ind i filmene, både i forhold til filmens opbygning og sproget i filmen, men prisen bliver at deres faglige pointer fra det undersøgende arbejde ofte udtrykkes gennem et uformelt og konkret sprog. Flere lærere udtrykker at det kunne være en fordel at arbejde med både en uformel film med hverdagsord og en mere formel film med fagord før filmene kan fungere som produkt knyttet til elevernes læring. Det er dog problematisk for lærerne at finde tid til at se og give præciserende feedback på de første procesfilm. I empirien er der indikationer på at film som produktgenre kan fungere udmærket både som fællesgørelse af elevernes procesrefleksioner og elevernes læringsudbytte knyttet til undersøgende matematikundervisning. Filmprodukter kan gøre det vanskeligt for læreren at håndtere balancer mellem elevernes autonome læringsprocesser og de intendede læringsmål (Hansen & Hansen, 2013), og det kan være vanskeligt at finde tid til at give den nødvendige feedback til de film der er blevet produceret for hurtigt og sjusket både i forhold til form og sprog.

I referaterne er der tydelige indikationer på at lærerne fokuserer på to dimensioner ved elevernes filmproduktion. På den ene side giver filmene eleverne mulighed for at inddrage den mundtlige dimension i deres faglige beskrivelser, og de etablerer et ejerskab for den matematiske proces. På den anden side giver filmene indblik i elever-

nes manglende matematiske sprogbrug, hvilket overrasker en del af de involverede matematiklærere. Det kan være et tegn på at filmproduktion er en ny praksis for flere lærere og elever, eller måske kan det være et tegn på at eleverne ikke er vant til at skulle udtrykke sig mundtligt om matematikken.

Ved at insistere på at fastholde elevernes erfaringer i en film er KiDM-projektet desuden med til at etablere et særligt fokus på forholdet mellem den skriftlige og mundtlige dimension i matematikundervisning.

Organisering af og vanskeligheder knyttet til klassesamtaler

På faggruppemøderne har lærerne drøftet forskellige elementer ved opsamlende klassesamtaler. I vores analyser er der identificeret nogle modsatrettede tendenser som beskrives i det følgende.

- [Vi prøver at] skabe en didaktisk kontrakt så eleverne forstår og føler sig forpligtede på at det er vigtigt at de deltager i både undersøgelser og klassesamtaler.
- Den pointestyrede klassesamtale fungerer bedst sidst i forløbet hvor eleverne var trygge ved arbejdsmetoden og indså at det kunne være en fordel at lytte til andre og lære af andre.
- Der var rigtig gode klassesamtaler hvor fællesgørelsen havde stor betydning, og hvor mange elever bød ind.
- Klassesamtalen er ofte svær fordi den ligger i slutningen af lektionen hvor eleverne mentalt er på vej til pause, og tiden bliver lidt presset.
- Ikke alle klasser magter en interessant og åben diskussion med fokus på strategideling.
- Nogle elever har svært ved at udtrykke deres viden i pointestyrede klassesamtaler.

Drøftelserne i faggrupperne giver indblik i at matematiklærerne har skelnet mellem pointestyrede klassesamtaler og samtaler fokuseret på åben strategideling (Pedaste et al., 2015). Samtaler knyttet til elevernes strategier og arbejdsprocesser har tilsyneladende været nemmere at håndtere end den pointestyrede klassesamtale. Dog giver lærerne udtryk for en del modsatrettede tendenser i forbindelse med de to samtaleformer da nogle lærere fremhæver samtaleens betydning for fællesgørelsen, mens andre lærere giver udtryk for det problematiske ved en afsluttende samtale. Det empiriske materiale giver indblik i at nogle lærere har gjort sig erfaringer hvor eleverne er blevet udfordrede af den åbne samtale med strategideling. Samtidig er flere elever udfordrede når de afkræves aktiv deltagelse i pointestyrede klassesamtaler. Det empiriske materiale giver nogle tydelige indikationer på at flere lærere er udfordrede af forskellige elementer ved en undersøgende matematikundervisning. Nogle af deres udsagn vidner om at der er tale om et brud med den didaktiske kontrakt (Brousseau,

2002) som de har opbygget med deres klasse. Vi tolker det som om den undersøgende matematikundervisning er et brud med den traditionelle organisering af matematikundervisning hvor der ofte anvendes en lærebog til at organisere den enkelte lektion, og hvor klassesamtalen har fokus på opgaverne i bogen. Disse matematikklasser er udfordrede af det nye fokus på dialogiske læringsformer i det undersøgende arbejde da det fordrer en ny didaktisk kontrakt.

I empirien rejser sig to hovedspor i forbindelse med dialogiske samtaleformer i matematik. Nogle matematiklærere vurderer at elevers matematiske læring opstår gennem dialog hvor eleverne får mulighed for at interagere med og engagere sig i hinandens idéer. Klassedialogen i forbindelse med og efter elevernes undersøgende arbejde kan her tilrettelægges sådan at elever ansføres til at deltage aktivt og føler sig forpligtet til at bidrage til den fælles samtale. Hvis matematiklæreren derimod har vanskeligheder ved at spejle sig i en dialogisk tilgang til matematiklæring, så kan det være vanskeligt at tilrettelægge en meningsfuld klassesdiskussion som opsamling på elevernes undersøgende arbejde. Observationer af forskellige matematiklæreres tilgange til det opsamlende arbejde giver indblik i forskellige strategier. På en af skolerne indledte læreren med at stille et lukket spørgsmål: "Hvem kan fortælle mig hvad typetal er?" På en anden skole startede læreren med at stille mere dialoginviterende og pointestyrede spørgsmål, fx: "Nu har vi set film fra tre grupper – er der nogen der kan fortælle om de matematikord der bliver brugt i filmene?"

Bakker, Smit og Wegerif (2015) argumenterer for at det kun er ved at engagere sig i levende dialog, enten med hinanden, direkte med læreren eller ved at lytte til andre i dialog, at eleverne lærer at tænke. Her anses dialog som en forbindelse til formålet med undervisningen hvor eleverne ikke kun skal lære noget som læreren allerede ved, men også skal lære at stille åbne spørgsmål og lære hvordan de lærer nye ting ved at engagere sig i dialoger. I referaterne fra faggruppemøderne kunne vi se at lærernes beskrivelser af klassesamtalerne var meget forskellige, men det er tankevækkende at projektet på enkelte skoler åbenbart har betydet at eleverne efterhånden kunne se en mening med at lytte og kunne se at det i samtalerne kan lade sig gøre at lære af andre. På trods af at denne beskrivelse kun fremgår af et enkelt referat, så er det vores indtryk at faggrupperne fortsat kan arbejde med en nysgerrighed knyttet til både formål, form og indhold for klassesamtalerne.

Vanskeligheder knyttet til uformelt og formelt sprog

Uanset om fællesgørelsen bliver arrangeret som film, som klassesdiskussion eller som fremlæggelser, så er det gennem projektet blevet tydeligt at mange af de involverede lærere mener at der er brug for en eller anden form for lærerstyret undervisning for at eleverne lærer de matematiske begreber. Det er vores indtryk at når lærerne taler om undervisning, så taler de om de sekvenser hvor læreren formidler konklusioner

og samler trådene fra elevernes arbejde. Vi fik disse synspunkter fra faggruppereferaterne:

- Vigtigt med pointer på et tidspunkt, men der må ikke lukkes for tidligt af for de kreative og åbne idéer børnene kan have.
- Min klasse ved hvad jeg mener når jeg siger at de skal prøve at beskrive hvad de så, med matematikord. De ved at der er et særligt matematiksprog.
- Det er en svær balance at stille åbne spørgsmål, mens man faktisk godt ved at de kender matematikordene. De kan bare ikke rigtig få det sagt.
- Man kan lave noget lærerstyret undervisning efter fremlæggelserne for at samle op.
- Før de går i gang, er jeg jo nødt til at sikre mig at de kender ordene.
- Eleverne er både meget tæt på og alligevel også meget langt fra. De bruger hverdagsprog; derfor skal vi knytte undervisning til så de får lært begreberne.
- Mht. spørgsmålene virker det bedst når de tager udgangspunkt i de ord eleverne selv har brugt – de skal så udvikles til fagsprog via spørgsmålene.
- Vigtigt at læreren stiller spørgsmål der kan få børnene til at præcisere deres forklaringer.
- Stop eleverne undervejs når noget nyt opdages. Eleverne forklarer hinanden deres oplevelser.
- Det er jo først når jeg som lærer har holdt opsamlingen og knyttet elevernes undersøgende arbejde til fagbegreberne, at der er sket læring.

Diskussionerne på faggruppemøderne handlede bl.a. om hvorvidt eleverne skal lære fx ordet typetal i 4. eller 5. klasse, men diskussionerne har også været knyttet til faserne i det undersøgende arbejde i KiDM-projektet og har synliggjort holdninger til projektets tese om at elevdeltagelse og undersøgende matematik øger effekten af elevernes begrebsforståelse. Nogle gange giver det mening at definere ord og begreber på tavlen før undersøgelserne, men det kan også lukke ned for nysgerrigheden hvis læreren serverer pointerne fra starten. Andre gange kan lærerne koble de faglige begreber på som præciserende kommentarer, mens grupperne arbejder med de enkelte undersøgelser, eller han kan afbryde gruppernes arbejde og samle hele klassen til en drøftelse undervejs. Disse overvejelser viser at lærerne har været optagede af en dialogisk tilgang til læring og anerkender den store betydning som de gode spørgsmål har for elevernes læring, men for de fleste lærere har det undersøgende arbejde givet anledning til tvivl om hvornår og hvordan der i en lærerstyret opsamling kan kobles fra elevernes uformelle begrebsarbejde til præcis begrebsdefinition.

Andre didaktiske udfordringer ved undersøgende matematikundervisning

I KiDM-projektet udtrykte lærerne ofte en vis frustration i forhold til at få det undersøgende arbejde til at hænge sammen med den almindelige matematikundervisning.

- Det er svært for eleverne at arbejde med metoderne i andre sammenhænge – det bliver let en “ø” i alt det andet vi laver.
- Det er svært at integrere det her nye i de andre matematiktimer når projektet slutter.
- Det er nødvendigt med mere træning hvis begreberne fra det undersøgende arbejde skal hænge fast. Fx fandt eleverne selv formelen for areal af trekanter, men da de så mødte en opgave i bogen om areal af trekanter, så var de helt på bar bund.
- Det er en arbejdsform som vi kan anvende i den fremtidige undervisning, men over flere perioder, fx tre lektioner om ugen med projektarbejde og to lektioner om ugen med færdighedsregning.
- Vi kan genbruge nogle af aktiviteterne i emneugerne, også i de store klasser.
- Børnene træner netop ræsonnementskompetencen når den åbne tilgang møder pointerne, hvis læreren ikke serverer pointerne fra starten.

I KiDM-projektet har der gennem projektets tredje tese været stort fokus på de matematiske kompetencer som mål for elevernes arbejde med aktiviteterne. Derfor er det tankevækkende at faggrupperne kun sjældent bruger ord knyttet til de matematiske kompetencer i deres diskussioner.

I et enkelt referat nævnes ræsonnementskompetencen, men i vores fortolkning er citatet mere knyttet til induktive/deduktive valg end til en tydelig skærpelse af arbejdet med matematiske ræsonnementer.

Citaterne ovenfor viser lærernes udfordringer med at få indhold og metoder fra det undersøgende arbejde til at hænge sammen med matematiktimer uden for eller efter projektet. Referaterne giver indblik i at flere af de undersøgende aktiviteter kan blive brugt igen i fremtiden. Der er indikationer på at flere lærere kan forholde sig til hvordan undersøgende matematikundervisning kan indgå i deres videre arbejde. Der er dog også indikationer på at flere lærere ikke anskuer matematikundervisning som et fag hvor det undersøgende element kan bruges som konsekvent didaktisk ramme for deres planlægning.

Afrunding på de identificerede problemfelter

I forhold til artiklens første spørgsmål, så har vi nu fået afdækket flere udfordringer og dilemmaer knyttet til fællesgørelsen. Vanskelighederne handler dels om at tilrettelægge fremlæggelser og classesamtaler som både anerkender elevernes arbejdsmetoder og samtidig samler deres matematiske pointer, dels om at få eleverne til at udtrykke sig “på matematikprog”. Vi mener dog at disse specifikke vanskeligheder i nogen grad kan være konkrete tegn på mere generelle og principielle problemfelter

som er blevet synliggjort gennem hele KiDM-projektet, og som fremtidens projekter stadig må forsøge at italesætte og bearbejde:

Kompetencebaseret matematikundervisning: Lærerne kender måske navnene på de matematiske kompetencer, men de arbejder ikke med læringsmål knyttet specifikt til de matematiske kompetencer. Her har vi tydeligvis fat i vanskeligheder der kan sættes i relation til KiDM-projektets tredje tese om at undersøgende matematikundervisning med rum til elevdeltagelse øger muligheden for at implementere de matematiske kompetencer. De undersøgende matematikaktiviteter i KiDM-projektet var grundigt behandlet i lærervejledningen hvor bl.a. ræsonnementskompetencen, problemløsningskompetencen og modelleringskompetencen var knyttet på som tydelige læringsmål og med tilhørende tegn på læring, men noget tyder på at det stadig er svært for lærerne at skabe forbindelser mellem lærervejledningens beskrivelser af kompetencerne og de tegn på læring inden for kompetenceområdet som eleverne kan udvise i undervisningen. Når kompetencebegrebet tilsyneladende er så vanskeligt for lærerne at beskrive og bearbejde, så kan vores materiale næppe give den store opbakning til projektets tredje tese.

Begreber: Den mest udbredte vanskelighed handler om hvornår, hvordan og hvorfor matematiklæreren skal koble elevernes uformelle begrebsarbejde med de præcise begrebsdefinitioner. Disse vanskeligheder er direkte knyttet til den første tese fra KiDM-projektet om at en undersøgende matematikundervisning vil øge effekten af elevernes forståelse for matematiske begreber. Vi kan næppe konkludere at undersøgende matematikundervisning øger effekten af elevernes forståelse for matematiske begreber, men vi kan dog fastslå at elevernes begrebsforståelse har været et væsentligt punkt på lærernes dagsorden. Vi ved ikke om lærerne har rykket sig i deres synspunkter om de didaktiske valg knyttet til elevernes begrebsforståelse, men vi fornemmer at diskussionerne om koblingen mellem elevernes uformelle begrebsarbejde og de præcise begrebsdefinitioner er opstået som en konsekvens af projektets interventioner. Det er ligeledes vores indtryk at diskussionerne knyttet til begrebsforståelse kan fortsætte på kommende faggruppemøder på skolerne.

Fagsyn og sammenhænge: Tower, Martin & Heater (2013) anbefaler at bruge specielle organiseringsformer til at fremme et deltagelsesperspektiv på læring, men hvis læreren ikke kan tilslutte sig det demokratiske deltagelsesperspektiv og på troværdig vis skabe et klassefællesskab hvor vi lærer matematik i en social kontekst, så falder de specielle og deltagelsesorienterede organiseringsmuligheder som ligger i en undersøgende matematikundervisning, en smule til jorden. Det kræver desuden ganske særlige didaktiske overvejelser for at finde ud af hvordan undersøgende matematik-

undervisning kan integreres i den daglige eller langstrakte planlægning af matematikundervisning, og det er svært for eleverne at bruge arbejdet fra de undersøgende matematiktimer i andre sammenhænge.

For at imødekomme disse udfordringer er der både ambitiøse og mindre ambitiøse tiltag som matematiklærerne kan benytte sig af. Først og fremmest handler det om at acceptere at al begyndelse er svær. Når man skal lære noget nyt, er det o.k. at tage små skridt og øve sig med en accept af at det er relevant og faktisk ganske vigtigt at famle lidt i starten. Det betyder at matematiklæreren sammen med klassen kan italesætte de nye metoder for fællesgørelse og fx pointere perspektivet på læring som en kollektiv proces som måske vil være ny for eleverne. I den mere ambitiøse ende handler det om udviklingen af ordforrådet hos fagteamet. Vi skal turde tale om de matematiske kompetencer forstået som elevernes mod, refleksion, initiativ og medindflydelse.

Hvilke handlemuligheder kan vi foreslå?

For at få fællesgørelsen af det undersøgende arbejde til i højere grad at lykkes kan vi opfordre forlag og forskere til at forbedre lærervejledningerne knyttet til fællesgørelsen af elevernes undersøgende arbejde, og vi kan opfordre lærerne til at være endnu mere opmærksomme på at tilrettelægge fællesgørelsen lige så grundigt som de tilrettelægger opstartsfasen af det undersøgende arbejde.

Desuden opfordrer vi også lærerne til at tage fat i de matematikdidaktiske begreber og udtryk når de diskuterer fællesgørelse i faggruppen. Der er tendens til at de forskellige elementer af fællesgørelse bliver italesat som meget praksisnær klasseledelse, men som fag er matematik noget særligt, også når det gælder fællesgørelsen, og diskussionerne i faggrupperne må kunne skærpes. Fx kunne det være spændende at følge en faggruppe-diskussion om hvordan man tydeliggør udviklingen inden for elevernes indsigtfulde parathed til at handle i en fællesgørelse, eller hvordan balancer mellem tilegnelse og deltagelse kan justeres i fællesgørelserne. I KiDM-projektet har lærerne diskuteret pointestyret fællesgørelse og fællesgørelse med fokus på strategideling, og det er en god start, men der er masser af andre fagdidaktiske begreber som kan styre faggruppernes diskussioner.

Fra faggrupperne på interventionsskolerne har vi fået konkrete og praksisnære forslag til hvordan fællesgørelsen kan skærpes og forbedres. Disse forslag er knyttet til den praksisnære klasseledelse, men den er jo også en nødvendig del af fællesgørelsen:

- Fællesgørelsen kan placeres i starten af den næste matematiktime i stedet for den time hvor eleverne er trætte.
- Giv eleverne små fokuspunkter som de skal lytte efter i fremlæggelserne.

- En fællesgørelse kan laves med “begrebskort”, evt. videreudbygning af allerede eksisterende begrebskort.
- Giv eleverne roller, og sørg for at der ikke er nogen der kører på frihjul, ved at få eleverne til at reflektere over hvad de har bidraget med i forhold til løsning af opgaven.
- Først gennemfører eleverne en undersøgelse med deres egne uformelle ord, derpå lærer de om begreberne, og efterfølgende gentager de deres undersøgelse, mens de bruger så mange matematikord som muligt.

Disse forslag er umiddelbart interessante for en dialogisk tilgang til fællesgørelsen, men forslagene bærer også præg af at de kunne fungere inden for en række fag uden et specifikt fokus på matematik. Dvs. fra praksisfeltet er der indikationer på en praksisteori der ikke udnytter styrker ved selve matematikfaget. Ved hvert citat kan man med fordel overveje hvad det betyder i forhold til fællesgørelse for undersøgende matematikundervisning.

Referencer

- Alrø, H. & Skovsmose, O. (2006). Undersøgende samarbejde i matematikundervisning – udvikling af IC-modellen. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kunne det tænkes? Om matematiklæring* (s. 110-126). Danmark: Forlag Malling Beck A/S.
- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, 45(6), 797-810.
- Bakker, A., Smit, J. & Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. *ZDM*, 47(7), 1047-1065.
- Blomhøj, M. (2013). Hvad er undersøgende matematikundervisning – og virker den? I: M.W. Andersen & P. Weng (red.), *Håndbog om matematik i grundskolen* (s. 172-189): Dansk Psykologisk Forlag.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Dreyøe, J., Michelsen, C., Hjelmberg, M.D., Larsen, D.M., Lindhart, B.K. & Misfeldt, M. (2017). *Hvad vi ved om undersøgelsesorienteret undervisning i matematik: Forundersøgelse i projekt Kvalitet i Dansk og Matematik, delrapport 2*: Aalborg Universitet, København. Det Humanistiske Fakultet, Institut for Læring og Filosofi. The Center for Applied Game Research ILD.
- EMU. Information om KiDM-projektet, 2019. <https://www.emu.dk/modul/kvalitet-i-dansk-og-matematik-KiDM-forunders%C3%B8gelse>
- Hansen, R. (2019). *Matematikdidaktik – mellem fag og didaktik*. København: Hans Reitzels Forlag.
- Hansen, R. & Hansen, P. (2013). Undersøgelsesbaseret matematikundervisning. *MONA* (4), 36-54.
- Larsen, D. & Lindhardt, B. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematikundervisningen på mellemtrinnet. *MONA* (1), 7-21.

- Michelsen, C., Dreyøe, J., Hjelmberg, M.D., Larsen, D.M., Lindhart, B.K. & Misfeldt, M. (2017). *Forskningsbaseret viden om undersøgende matematikundervisning*. (1. udg.) København: Undervisningsministeriet.
- Pedaste, M., Mäeots, M., Siiman, L.A., de Jong, T., van Riesen, S.A.N., Kamp, E.T. & Tsourlidaki, E. (2015). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review*, 14, 47-61.
- Riccomini, P.J., Smith, G.W., Hughes, E.M. & Fries, K.M. (2015). The Language of Mathematics: The Importance of Teaching and Learning Mathematical Vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, 31(3), 235-252.
- Schoenfeld, A.H. (2017) On learning and assessment, *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 24:3, 369-378.
- Schön, D.A. (2001). *Den reflekterende praktiker: hvordan professionelle tænker når de arbejder*. Århus: Klim.
- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.
- Skemp, R.R. (2002). *Mathematics in the primary school*. Routledge.
- Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I: O. Skovsmose & M. Blomhøj (red.), *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (s. 143-157). Kbh.: L&R Uddannelse.
- Towers, J., Martin, L.C. & Heater, B. (2013). Teaching and learning mathematics in the collective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 424-433.
- Wilson, M. (2009). Assessment from the ground up. *Phi Delta Kappan*, 91(1), 68-71.

English abstract

In this article we present and analyze empirical data related to the recapitulation and evaluation of inquiry based mathematical work of students age 10-12. The data is from the project "Kvalitet i Dansk og Matematik" (KiDM), where special courses based on mathematical inquiry and dialog were constructed and run in 1 test course and 3 interventions in 45 schools, each lasting 6 months. We collected the experiences of the teachers by visiting the schools, reading summaries of teachers' meetings, and of meetings in the region regarding the process. In this article we categorize and analyze the teachers' difficulties in summarizing the students' work with mathematical inquiry