Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematik-undervisningen på mellemtrinnet

Dorte Moeskær Larsen,
LSUL, Syddansk Universitet

Bent Lindhardt,
Professionshøjskolen Absalon

Abstract: *I et dansk forsknings- og udviklingsprojekt ved navn KiDM blev der udviklet tre måneders undersøgelsesorienteret undervisning i matematik til 4. og 5. klasse. Undersøgelsesorienteret undervisning i matematik har dog en bred definition, og for at hjælpe lærerne blev der udviklet en kategorisering af forskellige typer af undersøgende aktiviteter i matematik. Denne artikel definerer og beskriver disse fem forskellige kategorier. Herefter udvælges to aktiviteter ("Opdagelsen" og "Grubleren") som bliver undersøgt med fokus på hvilke ræsonnementer der kommer i spil i dialogen i opsamlingsfasen. Der bliver afslutningsvis reflekteret over forskellen på elevernes ræsonnerende virksomhed i de to forskellige aktiviteter.*

Nærværende artikel skal ses som et foreløbigt udkomme af et større ministerielt projekt, Kvalitet i matematik og dansk (KiDM), som blev igangsat i et samarbejde mellem Undervisningsministeriet, Skolelederforeningen og Danmarks Lærerforening. Projektet har forløbet over perioden 2016-2018. Gennemførelsen af projektet blev lagt i hænderne på deltagere fra University College Syd, Professionshøjskolen Absalon, University College Lillebælt, University College Nord, Aalborg Universitet samt Syddansk Universitet og derudover en række matematiklærere fra folkeskolen i såvel udvikling, pilottest og afprøvning.

I ansøgningen til projektet blev der argumenteret for at øget kvalitet i matematik kunne omhandle en øget undersøgende, dialogisk og anvendelsesorienteret undervisning. I projektet omsattes dette til en intervention af en varighed på ca. tre måneder udviklet af såvel forskere som praktikere. Interventionen skulle gennemføres over tre perioder af et halvt års varighed fra efterår 2017 til efterår 2018 med 45 forsøgsskoler med samlet 143 klasser på 4. og 5. klassetrin.

Det er foreløbige overvejelser og resultater fra denne intervention som danner grundlaget for dette tematiske nedslag.

Til trods for det mangeårige fagdidaktiske fokus på undersøgende matematikundervisning er vores erfaring i dialogen med praksis at mange lærere oplever det for kompliceret, risikofyldt og for uforudsigeligt og dermed undlader at inddrage undersøgende matematik i undervisningen (Michelsen et al., 2017). Det kan således synes hensigtsmæssigt at forsøge at dissekere undersøgende matematik ned i mindre, mere overskuelige enheder.

I KiDM-projektet blev der udviklet en kategorisering af fem forskellige undersøgende aktiviteter som vil blive fremstillet og beskrevet i denne artikel. Samtidig er

en central del af den undersøgende matematik potentialet for elevernes ræsonnerende virksomhed; derfor er der udvalgt to af de fem undersøgende aktiviteter som vil blive nuanceret ud fra hvordan elevers og lærers dialog fremstår i opsamlingen. Vores hypotese er at der overordnet set er forskel på elevernes ræsonnerende virksomhed afhængigt af hvilken undersøgende aktivitet der arbejdes med i undervisningen, og at dette kan have implikationer for hvordan en lærer skal gribe klassens opsamling an.

Metode og empiri

For at kunne studere de forskellige undersøgende aktiviteter i KiDM-undervisningen blev der udført klasserumsobservationer i fem forskellige klasser som alle arbejdede med KiDM-materialet. De fem klasser blev observeret og videofilmet 3 × 90 minutter af bl.a. førsteforfatteren til denne artikel. De fem skoler havde alle deltaget i 1. runde og var udvalgt til at repræsentere by-/landskoler og store/små skoler og var geografisk placeret på både Fyn og Sjælland. Ved indsamling af data fokuseredes specifikt på én elev pr. besøg når der blev arbejdet alene eller i grupper. Eleverne blev udvalgt af læreren som værende særligt arbejdsomme og følelsesmæssigt robuste. Disse udvælgelseskriterier blev valgt for at sikre at eleverne ville arbejde med opgaven og ikke blive overvældet af at observatørens kamera fulgte deres arbejde. Alle optagelserne blev efterfølgende transskriberet fuldt ud.

Datakodning begyndte med en åben og undersøgende tilgang til hele datasættet med fokus på elevers argumentationer. Dataene blev læst fra start til slut flere gange, og generelle tendenser blev diskuteret. Derefter udvikledes koder på alle fundne argumenter, først på baggrund af et arguments indhold beskrevet af Stylianides (2007) (fundament, formulering, repræsentation, socialt) og derefter ud fra bl.a. beskrivelser af forskellige bevisskemaer (eksterne, empiriske eller analytiske bevisskemaer) (Harel & Sowder, 1998). Udvalgte lektioner blev kodet sammen hvorefter forskellige udvalgte cases blev kodet individuelt af førsteforfatteren efterfulgt af en fælles diskussion af disse kodninger. Denne kombination af individuelle og dobbelte kodninger blev udført for at undgå subjektiv bias i analysen og for at øge inter-kode reliabiliteten (Johnson, 2014).

Undersøgelsesstrategien lægger sig op ad casestudiet idet formålet er at opnå en detaljeret og specificeret beskrivelse af hvordan interventionen udfolder sig i forskellige cases. Begrundelsen for denne strategi er at et casestudie ses som en typisk strategi til empirisk udforskning af et udvalgt fænomen i den sammenhæng hvor fænomenet udspiller sig, hvorved også fænomenets kontekst kan inddrages i den videre argumentation (Robson, 2011).

Hvad er undersøgende matematikundervisning?

Nogle lærere forestiller sig at for at lave undersøgende matematikundervisning skal eleverne starte fra bunden hvor de selv skal finde på den undersøgende problemstilling og selv skal gennemføre hele undersøgelsen, men dette er ikke den eneste måde at lave undersøgende matematik på. Ifølge Harlen og Allende (2006) findes der ikke en egentlig model for hvordan en undersøgelsesorienteret tilgang skal omsættes til undervisningspraksis. Implementering af metoden i undervisningspraksis vil variere med undervisningens tema, læreren, elevernes alder og ikke mindst hvilke ressourcer der er til rådighed:

> "IBME [Inquiry-Based Mathematic Education] vil sandsynligvis tage en mangfoldighed af former i overensstemmelse med de institutionelle forhold og begrænsninger, hvor den udvikler sig." (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 809, vores oversættelse)

I Danmark taler man typisk om forskellige typer af forløb. Det kan være tematiske forløb (Blomhøj & Skånstrøm, 2006) eller matematiske modelleringsforløb (Blomhøj & Kjeldsen, 2006) eller forløb med undersøgelseslandskaber (Skovsmose, 1999).

Artigue og Blomhøj (2013) argumenterer for at forskellige teoretiske tilgange kan støtte begrebsliggørelsen af IBME og dennes implementering. Yderligere beskriver de hvordan forskellige teoretiske tilgange som Realistic Mathematics Education, Theory of Didactic Situations, Anthropological Theory of Didactics, modellering og Problem-Based Learning alle har deres egen tilgang, men også er overlappende med IBME. IBME bliver således beskrevet som et kalejdoskop mere end en enstrenget struktur.

> "Ligesom i IBSE [Inquiry-Based Science Education] involverer undersøgelsesbaserede metoder inden for matematik forskellige former for aktiviteter kombineret i undersøgelsesprocesserne: uddybende spørgsmål; problemløsning; modellering og matematisering; søge ressourcer og idéer; udforske; analysere dokumenter og eksperimentere med data; opstille hypoteser, teste, forklare, begrunde, argumentere og bevise; definere og strukturere forbindelser, repræsentere og kommunikere." (Artigue & Blomhøj, 2013, s. 808, vores oversættelse)

Blomhøj (2017) fremhæver at et undersøgende undervisningsforløb naturligt kan opdeles i en tredelt struktur med hver deres didaktiske fokuspunkt:

- Iscenesættelse hvor læreren igangsætter
- Aktivitet hvor eleverne har frihedsgrader til at handle undersøgende
- Opsamling og fællesgørelse.

Iscenesættelse
I denne fase introduceres og tydeliggøres den undersøgende aktivitet med henblik på at igangsætte elevernes arbejde. Den didaktiske kontrakt afstemmes så eleverne kan og vil indgå i den rammesatte deltagelsesstyring af den fremlagte problemstilling/opgave.

Aktivitet
I denne fase arbejder eleverne selvstændigt med en anvist problemstilling. I den igangsatte aktivitet kan der indgå forskellige grader af frihed og åbenhed som påvirker elevernes undersøgende arbejdsmåde. Det kan betyde arbejdsprocesser som indebærer en vis uforudsigelighed og usikkerhed, og som kræver fagligt vovemod hos eleverne (og læreren?). Man skal turde agere med risiko for at fejle.

Opsamling og fællesgørelse
I denne fase opsummeres elevernes erfaringer, resultater og refleksioner som grundlag for opbygning af fælles faglig viden i klassen. Læreren er facilitator i processen for at sikre en rettethed mod en generalisering, præcisering, erkendelse osv. af elevernes arbejdsproces og produkter. I dette indgår dialogen som en central størrelse.

Projektet valgte ovenstående tredelte struktur for undervisningen idet det tydeliggjorde forskellen på elevernes eget undersøgende arbejde og den lærerstyrede klassesamtale. Vi har i projektet valgt at skelne mellem den undersøgende undervisning og den undersøgende aktivitet. Den første beskriver lærerens planlægning og struktur for undersøgende undervisningsforløb. Den anden berører elevernes undersøgende arbejdsmåde.

Hvad er undersøgende aktiviteter?
Vi skelner mellem to principielle tilgange til det undersøgende: det eksplorative og det investigerende. Ordene er hentet fra engelsk, "exploration" og "investigation" – to udtryk vi ikke umiddelbart har præcise termer for på dansk.

- Det *eksplorative* består i at være en udforskende, nysgerrig og observerende person som uden indledende problemstilling undersøger et begreb, et fænomen eller en genstand i situationen. Man er således opdagelsesrejsende i det ukendte hvor man undervejs justerer mål og arbejdsproces.
- Det *investigerende* består i at forfølge nogle hensigtsmæssige strategier for at finde et kvalificeret svar. I det investigerende har man en problemstilling som er ledetråden i arbejdsprocessen – en kurssætter som løbende skal sikre styringen mod et kvalificeret svar. Den indbefatter at eleverne etablerer en plan.

For bedre "at se" muligheder og nuancer i det undersøgende har vi forsøgt at klassificere og beskrive fem forskellige typer som på hver sin måde indeholder det undersøgende i form af det investigerende og eksplorative. Udvalget skal ikke opfattes som udtømmende for undersøgende aktiviteter, men have en eksemplarisk karakter.

Derudover indgår der overvejelser om aktiviteters frihedsgrader – om graden af åbenhed knyttet til problemstilling (arbejdsopgave), metodiske valg for at løse problemet/opgaven og de mulige resultater/svar.

Vi har også valgt at skelne mellem et lærerperspektiv og et elevperspektiv idet det tydeliggør forskellen i videnspositioner i den undersøgende aktivitet. Der er således forskel på at kende og guide elever mod en opdagelse af en bestemt begrebsmæssig sammenhæng som man må forvente læreren har et indgående kendskab til, og så at deltage som lærer i et forløb hvor ukendthedsfaktoren er betydelig højere.

En systematisering af ovenstående parametre har resulteret i følgende fem forskellige aktivitetstyper:

Opdagelsen

Hovedhensigten med "Opdagelsen" er at eleverne skaffer sig indsigt i og forståelse af udvalgte matematiske begreber. Åbenheden og det undersøgende består i at eleverne ikke kender de faglige pointer, men selv skal finde frem til dem i en form for erfarings- og eksperimenterende forløb. De skal således få øje på sammenhænge og systemer som kan lede dem mod en generaliseret viden inden for det udvalgte matematiske stofområde. Undersøgelsen er her mere et styret forløb – en afprøvning – hvor der stiles mod en ahaoplevelse hos eleverne. Det er bl.a. det Freudenthal omtaler som "guided reinvention" hvor idéen er at give eleverne mulighed for selv at genopfinde matematik ved at gøre det selv (Gravemeijer, 1999).

Fra et elevperspektiv er problemet/opgaven ofte lukket; metoden og resultatet opleves med forskellige grader af åbenhed. Det åbne består i at eleverne selv arbejder sig undersøgende hen mod et nyt vidensniveau til forskel fra at øve sig på en viden som er formidlet af læreren.

Fra et lærerperspektiv er aktiviteten typisk kendt i alle faser.

Grubleren

Hovedhensigten med denne aktivitet er at eleverne udvikler deres kreativt tænkende og ræsonnerende evner. Det centrale er ikke stoffet, men om eleverne kan og vil gå ind i "hvis ... så"-relationer samt indgå i systematisk undersøgelse af muligheder. Det undersøgende fokus er således på elevens undersøgende metodik – måden man når frem til svaret. Her er svaret ikke det centrale, men de hensigtsmæssige arbejdsmåder der fører eleverne hen til svaret. "Grubleren" har i hverdagen mange navne som "nøddeknækker", "kryptisk opgave", "gåden", "drillepinden" osv. Den findes både iklædt virkelighedens rammer og som rene matematiske problemstillinger.

Fra et elevperspektiv er der en åbenhed i at forstå og tolke problemstillingen idet den ofte er atypisk og uvant. Det samme gør sig gældende for den metode man anvender for at nå et resultat. Det fremgår ikke umiddelbart hvilke løsningsmetoder der vil være hensigtsmæssige, og der skal muligvis nyskabes eller kombineres kendte metoder.

Som ved "Opdagelsen" er læreren bekendt med såvel problemstilling, mulige løsningsmetoder og svar. Der kan dog ligge uforudsigelige løsningsmetoder fra eleverne som læreren må forholde sig til.

Produktet

Hovedhensigten er her at eleverne arbejder med at fremstille et produkt som "virker" – ud fra både funktionelle, men også æstetiske perspektiver. Er det en flyver, skal den kunne flyve ordentligt – er det fx et billede, skal det være smukt. I sådanne fremstillings- og forbedringsprocesser indgår der ofte matematik. Det undersøgende består i at eleverne "tager over" og går længere end til blot at følge en angivet fremstillingsproces. De begynder at eksperimentere og forandre såvel proces som produkt. I dette kan indgå skabende, innovative processer.

Der kan således indgå en "instruktion" til den praktiske udformning af produktet hvor det undersøgende kan opstå når man vil forandre, produktudvikle, forbedre, tydeliggøre, personliggøre m.m. produktet. Man kunne i denne sammenhæng tale om nysgerrighed som bærende element og dermed en mere eksplorativ tilgang til produktet. Instruktionen kan være mere eller mindre lukket – i en gradient fra opfindelse til håndværksmæssig ordentlighed.

Målingen

Hovedhensigten med "Målingen" er at anvende matematik i en naturvidenskabelig ramme ved at foretage "en undersøgelse". Man er således underlagt nogle "videnskabelige krav og retningslinjer" for at gøre undersøgelsen tilstrækkelig pålidelig og gyldig. Det undersøgende består i at resultatet er ukendt for både lærer og elever. Det er således en måde at skabe sig ny viden på. Det kan fx være at man ønsker at undersøge indeklimaet på skolen ved at måle temperaturen på udvalgte steder over tid, det kan være trafiktælling for at undersøge trafiktætheden, det kan være en undersøgelse af elevernes løbepræstationer osv.

Modelleringen

Hovedhensigten med "Modelleringen" er at fremme modelleringskompetencen. Eleverne skal forholde sig til en problemstilling i hverdagen som skal afgrænses og omsættes til en matematisk beskrivelse og analyse. På baggrund af det skal eleverne tolke de svar de får, og forholde sig kritisk til deres model. Her er der mange åbne, ukendte elementer for såvel lærer som elever der fordrer en undersøgende virksomhed. Til trods for at problemstillingen kan være kendt, er den ofte af en kompleks og åben karakter som kræver yderligere præcise spørgsmål eller hypoteser. Der indgår en åbenhed i hvilke variable og størrelser som er relevante for at skabe en anvendelig matematisk model til beskrivelse og analyse af problemet. Der er en åbenhed i mulige resultater som afhænger af de præmisser man har opstillet m.m.

Fra et lærerperspektiv er der en stor grad af ukendthed – og dermed er elever og lærer ofte i samme undersøgende situation.

Aktivitet	Undersøgende sigte	Perspektiv	Problem	Metode	Resultat	Undersøgelses aspekt
Opdagelsen	Afprøve og udlede begrebsmæssige sammenhænge	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt	
		Elever	Lukket	Åbent	Åbent	Investigerende
Grubleren	Forstå problemstillingen og en mulig løsningsmetode	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt	
		Elever	Åbent	Åbent	Lukket	Investigerende
Produktet	Undre sig over funktion eller æstetik ud fra produkt. Mulige ændringer og personliggørelse	Lærer	Kendt	Kendt	Kendt	
		Elever	Lukket /åbent	Lukket /åbent	Lukket /åbent	Eksplorativt
Målingen	En "videnskabelig" undersøgelse af noget gennem måling og beregning	Lærer	Kendt	Kendt	Ukendt	
		Elever	Lukket	Lukket	Åbent	Investigerende
Modelleringen	Udvikle og afprøve matematiske modeller og beskrivelse og analyse af virkeligheden	Lærer	Kendt evt. ukendt	Ukendt	Ukendt	
		Elever	Åbent	Åbent	Åbent	Investigerende

Tabel 1. *Overblik over hvad der tænkes som "åbent", "lukket" eller "kendt" i de forskellige aktiviteter.*

En central del af undersøgende matematik er potentialet for elevernes ræsonnerende virksomhed, men at få eleverne til at ræsonnere i undervisningen kræver mere end blot at stille åbne opgaver eller blot at få dem til at forklare deres tænkning (Ball & Bass, 2003).

I denne artikel har vi valgt at tage udgangspunkt i elevers ræsonnementer i opsamlingsfasen knyttet til to af de undersøgende aktiviteter. Det blev synligt i vores kodninger at langt de fleste ræsonnementer fra eleverne bliver synliggjort i denne fase. Det er ofte når læreren spørger ind at eleverne bliver tvunget til at synliggøre de ræsonnementer de har arbejdet med i løbet af aktiviteten. Når eleven arbejder alene, foregår dette ofte implicit i deres udregninger, og i gruppearbejdet afhænger det meget af gruppens arbejdsproces.

Opsamlingsfasen kan netop afspejle elevernes systematisering og deres udvikling af forståelser i kraft af kommunikationen og de ræsonnementer eleverne fremfører. Det kan fx ske i forbindelse med at de i en opsamling skal give nogle forklaringer på hvad de har gjort, og retfærdiggørelse af hvorfor netop den valgte tilgang eller det udregnede resultat giver mening.

Desuden tydeliggøres det når eleverne forsøger at forstå og udfordre andre elevers og lærerens forklaringer og spørgsmål. Ræsonnementerne i opsamlingen kan her ses både som et middel til at lære at forstå det matematikfaglige indhold (at **lære af** at ræsonnere), og det kan ses som et mål for læringen (**lære at** ræsonnere).

Elevers ræsonnementer ved undersøgende aktiviteter

At kunne ræsonnere matematisk handler både om at kunne følge og bedømme en kæde af argumenter fremsat af andre samt selv at kunne udtænke og gennemføre

argumentation (Niss & Jensen, 2002). I Whitenack og Yackel (2002) beskrives det at ræsonnere i matematik specielt handler om at eleverne skal udvikle matematiske argumenter for at kunne forklare deres idéer til andre. Hanna (2000) fremfører at argumenter kan have en overbevisende styrke og en forklaringsstyrke. Den overbevisende styrke kan fremstå *absolut* som ved deduktive bevisførelser eller *relativ* hvor den i så fald bliver mere personlig og subjektiv. Forklaringsstyrken i et argument ligger i at den kan bidrage med en indsigt i hvorfor noget er sandt.

Elevernes udviklede argumenter kan have mange former. Det kan være faktaerklæringer, resultaterne af et forsøg, et eksempel/eksempler fra praksis, en definition eller sætning, en tilbagekaldelse af en regel, en gensidig tro eller præsentationen af en modsætning.

Stylianides (2007) beskriver at der indgår følgende fire elementer i brugen af argumenter: fundamentet, formuleringen, repræsentationen og den sociale dimension. Fundamentet er de forudgående definitioner, aksiomer, sætninger osv. Formuleringen handler om på hvilke måder argumentet bliver udviklet; er det fx udviklet som en generalisering, som en deduktion eller fra en case? Repræsentationen handler om hvordan argumentet bliver fremført; det kunne fx være mundtligt, skriftligt eller algebraisk. Det sidste element omhandler den sociale dimension, herunder hvem argumentet kommunikeres til, eller fx at lærere kan have forskellige tilgange til hvornår de anser en argumentationsrække for at være lødig i en matematikundervisning.

Der er flere bud på hvordan man kan fjerne eller afvise tvivl og udvikle eller godtage sandheden af et argument (Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 1998). I Harel og Sowder (1998) skelnes mellem tre forskellige typer af (over)bevisskemaer:

- Det eksterne overbevisende skema
- Det empiriske skema
- Det analytiske skema.

Argumentation i det eksterne skema anses som valid på baggrund af en autoritet, som når læreren eller facitlister blot godkender et argument for at være sandt uden yderligere begrundelser (Harel & Sowder, 1998). Argumentation i det empiriske skema valideres på baggrund af empiri hvor fokus er på at anvende fx konkrete eksempler. Det kan fx være induktivt formuleret (Harel & Sowder, 1998). Det analytiske bevisskema omhandler den deduktive argumentation som består af en række argumenter som følger af nogle gældende præmisser, love eller regler. Den deduktive argumentation tager dermed udgangspunkt i allerede bevidste påstande og teoremer og validerer påstande gennem logisk deduktion (Harel & Sowder, 1998).

Matematisk argumentation er dog generelt kendetegnet ved at være et socialt fænomen (Krummheuer, 1995). Hvad der accepteres i klassen, afhænger af klassens normer, herunder både de sociomatematiske normer og sociale normer (Yackel & Cobb, 1996). En overbevisning eller en forklaringsstyrke afhænger af hvem det er der skal overbevises eller forstå en forklaring. En 4.-klasseselev har behov for en anden forklaringsstyrke end eksempelvis en gymnasieelev.

Det er dog vigtigt at fremhæve at der i en matematisk problemløsningsproces ofte er en dynamisk relation mellem forskellige typer af argumenter. Der vil således indgå både bidrag fra empiriske undersøgelser, herunder fx "at prøve sig frem" og mere analytiske tilgange. Begge tilgange anses således som essentielle for at komme frem til løsninger af matematiske problemer (de Villiers, 2010), men det er dog samtidig vigtigt at understrege at det er de analytiske argumentationskæder der generelt anses som lødige i matematikundervisningen, og som samtidig beskrives som mest vanskelige for eleverne at udvikle (Education Committee of the EMS, 2011).

Cases

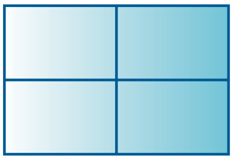
I det følgende har vi udvalgt to cases der illustrerer dialogen og elevernes argumentation i opsamlingerne for henholdsvis "Opdagelsen" og "Grubleren".

Begrundelsen for at det netop er disse to undersøgende aktiviteter der er udvalgt, er at der i empirien var flest observationer af netop disse to aktiviteter. De forskellige typer af aktiviteter er ikke repræsenteret lige meget i første tiltag i KiDM-materialet.

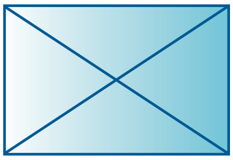
Case, "Opdagelsen"

En af KiDM-aktiviteterne kategoriseret som "Opdagelsen" har navnet "En fjerdedel af hvad?". Formålet med opgaven er at få eleverne til at "opdage" at en fjerdedel af noget er afhængig af helheden. Her indgår fjerdedeling af forskellige størrelser af pizzaer og lasagner (cirkler og rektangler).

I en afsluttende opsamling fremlægger gruppen med Anders og Jens fra 4. a deres arbejde for resten af klassen. Det diskuteres hvilken deling af en rektangelformet lasagne der giver de største stykker, figur 1 eller figur 2:



Figur 1. *Opdelingen af rektanglet med halvering af sidelinjerne.*



Figur 2. *Opdelingen af rektanglet med diagonaler.*

"Anders: Jeg vil helst have den med plustegn [figur 1], for så holder det lidt bedre sammen så det ikke falder fra hinanden.

Lærer: Det er jo fint nok; den ligger pænest på tallerkenen. Men er det størst?

Anders: Nej.

Bo: Det er den der med diagonalerne der er størst [figur 2].

Lærer: Det er en meget spændende udlægning. Prøv lige at fortælle mig lidt om det; kig lige op (henvendt til klassen). Er det der stykke det største stykke? [En elev, Gustav, ryster på hovedet.] Er det større end det der? [Gustav ryster fortsat på hovedet.] Er det større end det der?

Jens: Nej, kan I ikke bare se de er alle sammen lige store.

Lærer: Hvorfor det?

Jens: Fordi lige meget hvad, det er den samme plade fx, og den bliver stadig delt op i fire stykker lige meget hvad, så de er lige store alle sammen.

Gustav: Nej, nej, nej.

Lærer: Du skal ikke sige nej; nu hører vi hvad han siger, så kan du få lov at argumentere for noget andet.

Lærer (hæver stemmen): Fordi det er den samme, det er i virkeligheden den samme plade. Vi skærer den ud i fire lige store stykker. Men vi er enige om at hvis vi havde haft sådan en her, og jeg havde gjort sådan her [læreren laver en meget skæv deling af lasagnen], så er vi ikke i tvivl om hvad for et stykke der var størst, vel?

Jens: Nej."

Som det fremgår, er det lærerens intention at få eleverne til at forstå at man kan dele et rektangel op i fjerdedele på forskellige måder. Typisk valgte eleverne at tegne diagonaler (se figur 2) eller at halvere siderne som et "kors" (se figur 1). Anders' argument er kontekstrelateret og handler om hvordan man vil dele en lasagne derhjemme, men opfattes af læreren som et ikkelødigt matematisk argument da det straks affejes som ligegyldigt her i matematikundervisningen. Bo kommer derimod med en ny påstand om at stykkerne har forskellige størrelser. En påstand som læreren griber og gerne vil høre flere argumenter for. Jens får her lov til at komme med det endelige argument som har en slags ringslutning, og som i princippet ikke handler om om trekanterne i figur 2 er lige store. Alligevel verificerer læreren argumentet med et andet empirisk modargument, og diskussionen lukker.

Case, "Grubleren"

I en anden KiDM-aktivitet, som er kategoriseret som "Grubler", skal eleverne finde ud af hvad fire kasser vejer når de kun er blevet vejet parvis til at være henholdsvis 6 kg, 8 kg, 10 kg, 12 kg, 14 kg og 16 kg. Der findes to løsninger til opgaven: 2, 4, 6 og 10 kg og 1, 3, 5 og 9 kg. I nedenstående opsamling spørger læreren ind til processen:

"Lærer: Oplevede I nogle af de samme problemer som Karla havde med at få de store tal?

Harbon: Jaaa.

Lærer: Fordi 1 og 5, det rammer 6'eren, og så går jeg ud fra at når I så skal ramme 8'eren, så har I sat en 3'er på.

Harbon: Nej.

Lærer: Nej?

Harbon: Der tog vi 7.

Lærer: Der tog I 7 i stedet for 3, okay! Så tog I 7 og den næste …

Harbon: Fordi så gav det 8, og så tog vi 9 i den, fordi så kunne den …

Lærer: Er der nogen speciel grund til at I sprang 3 over?

Harbon: Så kunne den komme højere op."

I aktiviteten "Grubleren" er svaret ikke det centrale, men i højere grad mulige og hensigtsmæssige veje der kan føre eleverne hen til svaret. Opsamlingen bliver derfor en retfærdiggørelse af elevernes proces og ikke en overbevisning af resultatets validitet. Processens retfærdiggørelse og argumentation har også forskellige niveauer. I den følgende samtale kan man konstatere hvordan læreren undlader at udfordre et meget subjektiv argument:

"Lærer: Men da I prøvede det, prøvede I så automatisk de ulige tal?
Peter: Ja.
Lærer: Hvorfor?
Peter: Det føles bare bedst.
Lærer: Det føles bare bedst … okay. Jeg kunne godt tænke mig, læg lige blyanterne fra jer, og kig herop … [læreren går videre]."

Udfordringen er her at eftersom læreren ikke afviser argumentet i matematikundervisning, men blot går videre, vil nogle elever måske efterfølgende tro at denne type af argumentation anses som tilfredsstillende validt i matematikundervisningen.

På en anden skole med samme aktivitet ser vi følgende:

"Lærer: Hvorfor var I optagede af tallet 12?
Caroline: Det var bare fordi 12, den havde vi bare haft med mange gange, og den kunne vi lave både 16 og sådan noget ud af …"

Caroline beskriver de argumenter hendes gruppe har udviklet i deres søgen efter et svar. Argumentet for at vælge tallet 12 understøttes af et empirisk argument.

I en anden opsamling til samme "Grubler" diskuteres det hvad det betyder at lægge lige og ulige tal sammen da gruppen har fundet frem til at de to løsninger adskiller sig ved henholdsvis at indeholde lige tal og ulige tal:

"Lærer: Vilfred?
Vilfred: Grunden til det er jo at et lige tal … hvis man fx har et lige tal, så vil det jo når man plusser en til, så bliver det et ulige tal, men hvis man plusser to ulige tal, så er der jo ligesom to tilovers fra det lige tal, og to er jo et lige tal så … [lidt uklart pga. han snakker lavt].
Lærer: Det er super godt forklaret, hvis vi fx tager vores 3'er og vores 5'er herover, så er det et lige tal, med en i overskud, og det her ovre er også et lige tal med en i overskud. Og hvis vi lægger de to sammen, så bliver de to overskydende til et lige tal.
Vilfred: Så har du faktisk tre lige tal.
Lærer: Det er så godt forklaret! Sindssygt godt! Er I med?"

Det er tilsyneladende vigtigt for Vilfred at kunne argumentere for hvorfor alle tallene i én løsning enten skal være lige eller ulige. Læreren griber argumentet og prøver at udvide forklaringen og udtrykker samtidig begejstring for argumentet som måske kan siges at nærme sig det mere analytiske bevisskema (Harel & Sowder, 1998).

Diskussion

I casen om "Opdagelsen" tydeliggøres lærerens målrettethed mod at konkludere ny viden om matematiske sammenhænge og begreber. Den tydeliggør også at denne målrettethed indebærer at lærerens iver for at nå det rigtige resultat kan medføre at han bliver den aktivt argumenterende part frem for eleverne. I casen med Jens ser vi at læreren ikke får italesat analytiske argumenter, men stopper ved de empiriske argumenter og via sin egen autoritet prøver at overbevise eleverne om den foreslåede påstand. Det bliver derfor det eksterne overbevisende skema (Harel & Sowder, 1998) der afgør tvivlen og godtager argumentet.

Generelt i de øvrige observationer af "Opdagelsen" (fem andre klasser hvoraf kun tre indeholder en opsamling) ser vi ligeledes at læreren altid har en vigtig pointe som han/hun vil have overbevist eleverne om i den afsluttende opsamling således at der måske gås lidt på kompromis med de anvendte argumenters lødighed. Dialogen kan derfor få et fokus på "det rigtige og forkerte" frem for at eleverne selv får mulighed for at opbygge en kæde af argumenter som afprøves og vurderes.

I aktiviteter med "Opdagelsen" bliver argumenterne fremført af både læreren og eleverne. Læreren inddrager ofte tavlen til at fremme visse argumenter. Elevernes argumenter bliver alle repræsenteret i et hverdagssprog, og de inddrager både deres empiriske erfaringer og deres fælles antagne viden til at argumentere for de forskellige påstande. Fundamentet i de forskellige argumenter bunder derfor ikke altid i en matematisk praksis.

I casen "Grubleren" kan vi generelt se at der i opsamlingen bliver sat fokus på elevers forklaring af deres proces. Eleverne udtrykker mange forskellige typer af argumenter i denne forklaring, lige fra meget subjektive holdninger til mere analytiske tilgange. De endelige svar til opgaven bliver der derimod ikke argumenteret for i nogle af de observerede klasser. Overordnet kan vi se at de argumenter der bliver fremført, alle afholdes i et mundtligt hverdagssprog. Vi ser ingen steder et mere analytisk sprog anvendt. Argumenterne trækker alle på elevernes tidligere praksisser og deres fælles antagne viden, mens de inddrager deres egne empiriske erfaringer fra processen hvor fundamentet er placeret.

I udsagn fra de deltagende lærere fra forsøgsskolerne i KIDM-projektet nævnes det ofte at der er behov for at elevens uformelle sprog formaliseres og gøres mere matematisk korrekt – med særlig fokus på korrekte matematiske termer. Man ser i observationerne meget forskel på hvilket fokus læreren har på det formelle sprog, og også her hvad der accepteres som lødigt i undervisningen.

Den sociale dimension påvirker argumentationen i begge cases, og læreren bliver her også en vigtig spiller.

Opsamling

Som det tidligere er omtalt, er vores hensigt med artiklen at se flere nuancer og detaljer i forståelsen af undersøgende matematikundervisning. Vores tese er at ved at opdele billedet af undersøgende matematik til mindre, mere operationelle enheder er der mulighed for større overblik for læreren og dermed større gennemslagskraft i den daglige undervisning. Forskellige valg af fx typer af undersøgende aktiviteter har dog følgevirkninger som bør undersøges nærmere. Vi har her illustreret hvordan valg inden for de to undersøgende aktiviteter "Opdagelsen" og "Grubleren" kan have forskelle i det dialogisk argumenterende samspil der er mellem elever og lærer. En forskel man skal være bevidst om i valgsituationen og undervejs i undervisningen.

Referencer

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*(6), 797-810.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children, 216*, 235.

Ball, D.L. & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27-44.

Blomhøj, M. (2017). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *ZDM, 38*(2), 163-177.

Blomhøj, M. & Skånstrøm, M. (2006). Matematik Morgener – matematisk modellering i praksis. *Kunne det tænkes*, 7-23.

de Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. I: *Explanation and Proof in Mathematics* (s. 205-221). Springer.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1-2), 5-23.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III*, 234-283.

Harlen, W. & Allende, J. (2006). Report of the working group on international collaboration in the evaluation of Inquiry-Based Science Education (IBSE) programs. *Santiago: FEBA*.

Krummheuer, G. (1995). *The ethnography of argumentation*: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Michelsen, C., Dreyøe, J., Hjelmborg, M. D., Larsen, D. M., Lindhart, B. K., & Misfeldt, M. (2017). Forskningsbaseret viden om undersøgende matematikundervisning. Undervisningsministeriet.

Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18). Undervisningsministeriet.

Skovsmose, O. (1999). Undersøgelseslandskaber. Centre for Research in Learning Mathematics.

Stylianides, A.J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

Whitenack, J. & Yackel, E. (2002). Making mathematical arguments in the primary grades: The importance of explaining and justifying ideas. *Teaching Children Mathematics, 8*(9), 524.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 458-477.

English abstract

In a Danish development project named KiDM, a 3 months intervention of inquiry-based mathematics teaching was developed. Since inquiry-based teaching is broadly defined, to help the teachers focus their understanding of this concept a categorization of various investigative activities was developed; this article starts by defining and describing this categorization. Two of the mathematical activities – "The Brooder" and "The Discovery" – are described with special focus on students' reasoning in whole-class discussion. In the conclusion some reflections are made about how the students reason in these two activities.