Erfaringer med træning af symbolforståelse

Jingyu She, Næstved Handelsgymnasium – ZBC

Kommentar til Marit Hvalsøe Schou: "Hvad sker der i matematikundervisningen? Om overgangen fra grundskole til gymnasium", MONA, 2018-2.

Kommentaren er inspireret af Marit Hvalsøe Schous (MHS) forskningsspørgsmål: *"Hvilket kendskab og hvilke erfaringer med brug af symboler medbringer eleverne fra grundskolens matematikundervisning, og hvordan møder man dem i gymnasiet?".* Undervisningsministeriet har i de seneste vejledninger gjort en dyd ud af at bringe opmærksomhed på netop introduktionen af symbolbrug og notation: *"Derudover viser erfaringen, at noget af det allersværeste ved overgangen fra grundskole til gymnasium er vores udstrakte brug af symboler [ ] De kan ganske enkelt ikke læse de bøger, der anvendes i undervisningen"* (Styrelsen for Undervisning og Kvalitet, 2018, s. 23).

Artiklen gav anledning til følgende undren: "Hvad er med til at danne "den gode matematikelev" der kan håndtere overgangen til gymnasiet?" Dette vil undertegnede reflektere over gennem et tænkt scenarie hvor der undervises i et af eksemplerne nævnt i MHS' artikel: den pythagoræiske læresætning. Vi konkluderer med at diskutere hvordan en manglende frygt for det ukendte kan forbedre kvaliteten af elevers matematiske læringsproces.

Er det Pythagoras?

MHS undersøger problemstillingen gennem klasserumsobservationer og en analyse af symbolernes rolle i undervisningen. Hun konkluderer at matematik i grundskolen tager udgangspunkt i en konkret situation hvor der regnes med givne tal. I kontrast hertil tager gymnasieundervisningen udgangspunkt i beviset eller opskrivningen af et generelt udtryk som derefter benyttes ved indsættelse af talværdier. Dette, kombineret med hyppigere brug af omformninger af symboludtryk og formelle beviser i gymnasiet, fremlægges som årsag til overgangsproblemer i matematikundervisningen.

Den teoretiske ramme i artiklen af MHS lægger vægt på symbolers forskellige roller samt Steinbrings epistemologiske trekant: Symboler får først betydning i samspil med en kontekst og et begrebsapparat. I en ideel verden opererer vi med elever der forstår dette samspil. Mine egne erfaringer ligger dog nærmere følgende:

Erfaring 1: Grundskolen

To måneder efter et forløb om geometri skriver matematikunderviseren følgende på tavlen:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Da rækker den gode matematikelev hånden op og svarer: "Er det Pythagoras?" Eleven roses for sin opmærksomhed og går glad fra timen.

Erfaring 2: Gymnasiet

Den velmenende gymnasieunderviser gør et forsøg på at skabe genkendelsens glæde ved at skrive følgende på en tom tavle:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

"Hvad står der her?" spørger underviseren ud i lokalet. En elev rækker hånden op og svarer: "Er det Pythagoras?" Hertil tænker underviseren: "*Nej, og det er heller ikke Bent eller Knud. Pythagoras var en obskur græsk filosof der levede 500 år f. Kr.*" I stedet siger underviseren: "Godt husket!", så eleven går glad fra timen.

Plads til forbedring

I begge ovenstående situationer belønnes eleven for evnen til at "genkalde matematiske fakta". Dog kræver minimumskravene inden for gymnasiematematik en lidt større indsats end ovenstående. Eleven føler blot at der er noget trygt vedkommende kan genkende, og svarer: "Er det Pythagoras?" Denne tryghed kan endda være til hindring for læringsprocessen da den behagelige fornemmelse af at "vide hvad der foregår", kan forhindre yderligere granskning af tavlen. Jeg vil nu komme ind på to måder underviseren kan omgå denne risiko på og sætte gang i elevernes tænkeproces.

Demonstrer at kært navn har mange børn

Underviseren starter med at skrive $a^2 + b^2 = c^2$ på en tom tavle. "Passer det her?" spørger underviseren. De fleste nikker. Det ligner noget de har set før. Dernæst tegner underviseren en retvinklet trekant hvor kateterne navngives a og b. Hypotenusen navngives c.

"Hvis vi lader *a* og *b* betegne længderne på kateterne og lader *c* betegne længden af hypotenusen, så har jeg skrevet Pythagoras' sætning op," siger underviseren. Klassen nikker med.

Nu bytter underviseren navnene på siderne om. Hypotenusen er nu navngivet *b*, mens formlen på tavlen er uændret. "Passer det her?" spørger underviseren. Klassen diskuterer. Nogle stykker har stadig svært ved at se hvorfor det ikke skulle passe. Underviseren prøver at hjælpe dem på vej ved at sætte tal ind. Underviseren afslutter diskussionen ved at lægge vægt på at det samme symbol kan sættes på mange forskellige objekter. Fx i linjens ligning hvor *a* og *b* optræder i anden sammenhæng. Derfor er det vigtigt at klarlægge hvad et symbol står for.

Demonstrer at kært barn har mange navne

I stedet for "standardformlen" med *a, b* og *c* starter underviseren med at tegne en retvinklet trekant og navngiver kateterne x og y, mens hypotenusens længde betegnes z. På tavlen skrives:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Underviseren opfordrer nu klassen til at tænke over hvad der står på tavlen.

Dernæst skriver underviseren

$$x = \sqrt{z^2 - y^2}$$

på tavlen og spørger om hvorfor det skrevne udtrykker den pythagoræiske læresætning.

For elever med vane for mere abstrakt notation skriver underviseren:

$$f(x) = x^2, \quad x \in (0, \infty), \ x = f^{-1}\big(f(z) - f(y)\big)$$

Nogle griner, mens alle (bortset fra en enkelt eller to elever) begynder at kigge væk fra tavlen eller ned i tastaturet.

Ødelæggelse og konstruktion af tankeskemaer

Vi forlod ovenstående afsnit med en enkel udfordring. Eleverne mistede interessen da stoffet blev for svært:

$$f(x) = x^2, \quad x \in (0, \infty), \ x = f^{-1}\big(f(z) - f(y)\big)$$

Udfordringen ligger i at eleven præsenteres med materiale uden for personens komfortzone. Med et finere ord befinder ovenstående sig ikke i elevens "skémata" eller "kognitive tankeskema" (Koster, 2014). Det er ikke et tankesæt som eleven er rutineret i. Opgaven forbindes derfor med ubehag, og eleven viger bort.

Det uheldige ved dette er at matematik netop går ud på at udsætte hjernen for sådanne situationer. Den ene dag står *a* for en katete, den næste står *a* for linjens hældning. Med hvert nye emne (eller sågar hver nye opgave) er eleven nødt til lægge vanetænkningen til side og forlige sig med ny notation og nye ukendte. Eleven må ligeledes lære at acceptere manglen på "instant gratification" der ellers følger af at nogle opgaver er hurtigt besvaret gennem Google eller opslag i lærebogen: Forskning tyder på at der er korrelation mellem bedre arbejdshukommelse og børns evne til at acceptere "delayed gratification" (forsinket tilfredsstillelse) (Yu et al., 2016).

Det er derfor fordelagtigt at træne hjernen i at finde glæde ved ukendte systemer samt ikke at stole på eksisterende tankeskemaer og rutiner i lige så høj grad som naturen påbyder. Denne træning kan fx igangsættes i grundskolen med basale regneoperationer udført på utraditionelle måder. Jeg har haft stor personlig glæde af at benytte nedenstående tabel i undervisningen i 4. klasse (grundskole) helt op til regnetimer på bachelorkurser på Københavns Universitet.

Oprindelse	**Addition**	**Subtraktion**
Ægyptiske hieroglyffer	Et par ben, som at "gå til"	Et par ben, som at "gå fra"
Diofant fra Alexandria	Talstørrelser sidestilles	Tegnet ⋔ sættes foran subtrahend[1]
Hinduer	Talstørrelser sidestilles	Prik over subtrahend
Kinesere	Addend farves rød	Subtrahend farves sort
Europa før 16. århundrede	$\bar{p}$ i stedet for +	$\bar{m}$ i stedet for –

Tabel 1. *Matematisk tegnsprog gennem tiderne (udledt af la Cour, P., 1888, s. 333).*

I hver addition/subtraktionsmetode må eleven sætte sig ind i et nyt system. Til gengæld er systemerne relativt simple. Underviseren kan eksempelvis lave to opgaver til hver celle. For elever der har svært ved opgaven, kan øvelsen med fordel gøre brug af eksempler. Opgaven kan udvides ved at lade elever opfinde og beskrive deres egne systemer – på denne måde kan eleverne langsomt omstilles til at finde glæde ved nye, ukendte systemer.

1 Diofantes skabte tegnet som en forkortelse af det græske ord for "manglende/fratrukket", kaldet leipsis (ΛΕΙΨΙΣ).

Referencer

Koster, R. (2014). *A Theory of Fun for Game Design* (2. udg.). USA: O' Reilly Media, Inc.

la Cour, P. (1888). *Historisk Mathematik: Et Indledende Kursus*. København: P.G. Philipsens Forlag.

Styrelsen for Undervisning og Kvalitet (marts 2018). Vejledning til lærerplanen i Matematik A/B/C, hhx. Undervisningsministeriet. Lokaliseret på https://uvm.dk/-/media/filer/uvm/gym-vejledninger-til-laereplaner/hhx/matematik-a-b-c-hhx-vejledning-2018.pdf?la=da.

Yu, J., Kam, C.-M. & Lee, T.M.C. (2016). Better Working Memory and Motor Inhibition in Children Who Delayed Gratification. *Frontiers in Psychology*, 7, 1098. Lokaliseret på https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4955289/pdf/fpsyg-07-01098.pdf.