Hvad sker der i matematik-undervisningen?

Om overgangen fra grundskole til gymnasium

Marit Hvalsøe Schou,
Laboratorium for sammenhængende uddannelse og læring,
SDU

Abstract: *I denne artikel undersøges overgangen mellem grundskolens og gymnasiets matematikundervisning på baggrund af klasserumsobservationer. Undersøgelsen har fokus på hvordan matematikfaget præsenteres for eleverne gennem de handlinger hvor symboler indgår. Ved at analysere disse handlinger med hensyn til symbolernes roller i undervisningen træder nogle af de udfordringer elever oplever ved overgangen, frem. En kategorisering af symbolets rolle som enten etikette, i omformning af udtryk, ved opstilling af matematiske påstande eller som deltager i et rollespil viser at præsentationen af matematikfaget grundlæggende ændrer karakter ved overgangen.*

Introduktion

At overgangen mellem grundskole og gymnasium er svær, er velkendt og har været genstand for utallige undersøgelser (Blomhøj & Jensen, 2007; Ebbensgaard, Jacobsen & Ulriksen, 2014; Lindenskov, Enggaard, Andersen & Sørensen, 2009; m.fl.). Eleverne oplever at overgangen i særlig grad er vanskelig i matematik. Et område der især volder eleverne vanskeligheder, er gymnasiematematikkens udstrakte brug af algebraiske symboler. Vi skelner her mellem et *numerisk* symbol som er et tal, og et *algebraisk* symbol – et bogstav der enten repræsenterer et konkret tal eller et objekt, fx en funktion. Flere af de udtalelser elever og lærere kommer med, henviser til områder der i særlig grad trækker på matematiske symboler. Fx "at *x* og *y* mere og mere erstatter tallene" (Ebbensgaard et al., 2014, s. 71) og "… i formlerne [er der] tit et bogstav, som betyder noget bestemt, men når man så skal lære en ny formel, så kan et af bogstaverne i den forrige formel godt blive brugt igen uden at betyde det samme" (Michelsen, 2001, s. 137). Dette ligger helt i tråd med resultaterne fra SOS-projektet hvor Blomhøj og Jensen (2007) identificerede og afgrænsede matematisk symbolkompetence som en væsentlig udfordring ved overgangen. Der er altså grund til at formode at der ved overgangen sker et skifte i den måde symbolerne optræder på i undervisningen, som kan være en medvirkende årsag til nogle af de udfordringer eleverne oplever. Det vil vi se nærmere på i denne undersøgelse.

Hvor tidligere undersøgelser har benyttet sig af spørgeskemaundersøgelser og (gruppe)interviews af lærere og elever, eventuelt suppleret med elevbesvarelser og enkelte klasseobservationer (Ebbensgaard et al., 2014; Lindenskov et al., 2009) samt analyser af styredokumenter (Dahl, 2009), har der været et forholdsvis begrænset fokus på hvad der rent faktisk sker i klasseværelset i elevernes sidste tid i grundskolen og i begyndelsen af gymnasiet. Den her beskrevne undersøgelse forsøger ud fra konkrete observationer at beskrive typiske mønstre i undervisningen der kan have betydning for elevernes oplevelser af matematikfaget. Forhold der ikke nødvendigvis kommer frem ved benyttelse af de ovenfor nævnte metoder, men som kan bidrage til en mere nuanceret diskussion af overgangsproblematikken i matematik.

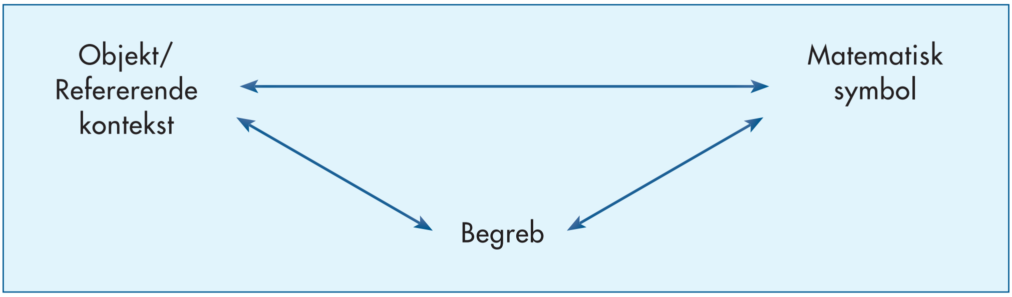
Det empiriske grundlag for undersøgelsen baserer sig på observationer af *undervisningen* på de to niveauer, dvs. på de valg der træffes og udføres af læreren. Derimod gås der ikke nærmere ind på elevernes læring eller deres individuelle oplevelser af undervisningen, ligesom lærerne ikke får mulighed for at forklare de valg der foretages.

Som teoretisk ramme benyttes Steinbrings (2006) epistemologiske trekant der beskriver hvordan et tegn bliver til et meningsfyldt matematisk symbol gennem de relationer symbolet indgår i. Med en semiotisk tilgang er det muligt først at identificere forskellige roller symboler spiller i denne proces, og dernæst analysere empirien med hensyn til forekomsten af disse roller. Herfra kan undervisningen karakteriseres mht. de muligheder eleverne har for at skabe mening i symbolerne, hvorved nogle af de forskelle og potentielle udfordringer eleverne oplever ved overgangen fra grundskole til gymnasium, træder frem.

Teoretisk ramme

Matematiske symboler og deres betydning i matematikfaget

Udviklingen af semiotiske repræsentationer i matematik er en fundamental betingelse for at man overhovedet kan udvikle matematiske tanker (Duval, 2006). Symboler er essentielle når det drejer sig om at skabe ny viden, generalisere, anvende og kommunikere resultater i matematik. Den tyske matematikdidaktiker Steinbring (1999; 2006) har opdelt disse egenskaber i to grundlæggende funktioner: Dels er et matematisk symbol 'noget der står for noget andet', den *semiotiske* funktion, og dels er matematisk viden indlejret i og båret af sådanne symboler, den *epistemologiske* funktion der omhandler tilblivelsen og karakteren af viden. Matematisk viden kan ikke eksistere uden et system af tilhørende symboler som ikke i sig selv har nogen betydning, men først tillægges mening gennem forbindelsen til den kontekst symbolet refererer til. For at symbolet kan blive et ægte matematisk symbol, kræves samtidig at der skabes relationer til kontekstens bagvedliggende matematiske begreb (Steinbring, 2006). Dette kan illustreres ved den epistemologiske trekant der ses på figur 1. Relationerne afhænger af hvilken rolle det matematiske symbol spiller i den sammenhæng det bliver brugt i. Som eksempel kan vi betragte symbolet f og funktionsbegrebet. Gennem arbejdet med variabelsammenhænge i forskellige situationer samt ved benyttelse af repræsentationer som fx forskrifter $f(x) = ...$, grafer eller tabeller får eleverne mulighed for at erkende (dele af) det generelle funktionsbegreb hvorigennem bogstavet f tillægges en bestemt betydning. Denne betydning er ikke statisk, men ændrer sig i takt med elevernes forståelse og går fra at f betyder en konkret funktion hvis forskrift eller graf man kender, til at kunne stå for en vilkårlig funktion hvis specielle egenskaber ikke behøver at være kendte, men som indgår i matematiske påstande, fx at $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ for funktioner f og g.



Figur 1. *Den epistemologiske trekant (efter Steinbring, 2006, s. 135).*

I den epistemologiske trekant er den semiotiske funktion vist ved en vandret dobbeltpil, men denne forbindelse alene sikrer ikke at symbolet får mening. Først når symbolet ses i forhold til det overordnede begreb (højre dobbeltpil) som objektet/konteksten er indlejret i (angivet ved venstre dobbeltpil), kan det forstås som et matematisk symbol med sin egen betydning. Læseren opfordres til at overveje konkret indhold i den epistemologiske trekant for fx funktionsbegrebet.

For at undersøge hvordan symboler indgår i undervisningen, må vi identificere de roller symbolerne spiller i forskellige sammenhænge. Hertil benyttes Mogens Niss' observationer af gymnasieelevers problemer med symbolbrug foretaget i forbindelse med Matematikvejlederuddannelsen (personlig kommunikation med Mogens Niss, d. 29/11 2016), og som ligger tæt op af de måder Janvier (1996) ser at et algebraisk symbol kan tolkes på. Endvidere læner vi os op ad Kierans GTG-model for symbolsk aktivitet (Kieran, 1992), og endelig inddrages resultater om meningsskabelse i symboler fra den matematikdidaktiske litteratur.

Symbolernes forskellige roller

Steinbring (2006) angiver i den epistemologiske trekant at symboler har en semiotisk funktion som noget der står for noget andet. Relationen mellem et tegn og det objekt tegnet står for, kendes som *et indeks* hos Peirce (1965). Denne semiotiske funktion karakteriserer den første kategori hvor symbolet udelukkende fungerer som en *etikette* eller et label (**L**). Denne etikette kan ændre betydning afhængigt af konteksten, som når bogstavet a sommetider står for den ene katete i en retvinklet trekant, i andre tilfælde er hældningskoefficienten for en ret linje og i atter andre tilfælde er koefficienten foran x^2-leddet i parablens ligning. Eller den kan være fast, som når vi skriver π i stedet for 3,1415.... Selv "faste" etiketter kan dog variere. Således kan divisionsstykket 3 divideret med 4 i grundskolen enten skrives som $3 \div 4$ eller 3 : 4, og resultatet som ¾ eller $\frac{3}{4}$ I gymnasiet vil man stort set udelukkende møde skrivemåden $\frac{3}{4}$ der både opfattes som et divisionsstykke og et resultat. I sin teori om hvordan elever udvikler kompetence til at omgås skrevne symboler, beskæftiger Hiebert (1988) sig med relationen mellem symboler og de "referenter" de refererer til. Når det drejer sig om brugen af talsymboler, er der ofte (mulighed for) en tæt og synlig forbindelse mellem symbol og referent. For et algebraisk symbol kan referenten derimod være et andet (numerisk) symbol, hvorved forbindelsen kan fremstå mindre tydelig.

En stor del af matematikundervisningen beskæftiger sig med omskrivninger af udtryk, fx i ligningsløsning, ved beregninger med tal eller ved manipulationer af bogstavudtryk. Disse omskrivninger følger regler og konventioner for naturlige tal, reelle tal etc. som afgør hvilke omformninger der er tilladte, og hvilke der ikke er det. Nogle af disse regler og konventioner er aksiomatiske, dvs. begrundet af en beslutning. Fx er det besluttet at $a+b+a+b$ kan skrives som såvel $2(a+b)$ som $2a+2b$. I andre tilfælde kommer reglerne fra en analyse fra matematikken, som fx at $\frac{1}{x^2}$ må være det samme som x^{-2} eller at man ikke kan dividere med 0. Gennem en kæde af omformninger opnås nye udtryk med identisk indhold, men som ser anderledes ud, fx $3(x+5)+1-(2x+10) = 3x+15+1-2x-10 = x+6$. Sådanne aktiviteter genfindes i GTG-modellens generationelle aktiviteter (Kieran, 1992). For Hiebert har symbolernes rolle i omskrivninger stor betydning. Den kontekst som symbolerne refererer til, er ofte ikke synlig under omskrivningerne, men har betydning for den efterfølgende fortolkning af resultatet. At kunne foretage sådanne omskrivninger er også en del af det Arcavi (1994) benævner *symbolfornemmelse* hvori han tager afsæt i og udvider begrebet *talfornemmelse*, dvs. viden om tal og størrelser (Greeno, 1991). Symbolfornemmelsen beskrives ved hjælp af forskellige kvaliteter en person kan besidde i omgangen med algebraiske symboler. Arcavi nævner manipulation af symbolske udtryk hvor man ser bort fra symbolernes aktuelle betydning under manipulationerne, men hvor man efterfølgende kan læse de fremkomne symbolske udtryk og derfra kan uddrage mening og yderligere forståelse. Således fører et antal regelbaserede omskrivninger/beregninger til at ligningen $x^2-5x+7=0$ ikke har nogle reelle rødder, og afhængigt af konteksten kan dette give anledning til ny viden, fx at parablen med ligningen $y=x^2-5x+7=0$ ikke skærer x-aksen. Hermed har vi beskrevet den anden kategori der karakteriseres ved de *omskrivninger* (**O**) symbolerne deltager i.

Forståelse for hvordan og hvornår symboler kan eller skal benyttes til at vise relationer samt generalisere og bevise, er en væsentlig del af matematikkens identiet og en anden af Arcavis (1994) symbolfornemmelser. Vi definerer den tredje kategori som den rolle symboler indtager i opstilling og eftervisning af *matematiske påstande* (**P**). Kategorien omfatter Kierans (1992) generationelle aktiviteter. Sandhedsværdien af en matematisk påstand afhænger af den bagvedliggende matematiske substans og kan ikke blot afledes af de symboler der benyttes. I Pythagoras sætning $a^2+b^2=c^2$, hvor a og b er kateterne i en retvinklet trekant, og c står for hypotenusen, er udsagnets sandhedsværdi ikke afhængigt af valget af symboler, men derimod af de underliggende geometriske egenskaber for retvinklede trekanter. Udsagnet er ikke sandt for enhver ligesidet trekant. I ovenstående eksempel er der en tydelig reference til en anden repræsentationsform, nemlig en figur, men dette er ikke nødvendigvis tilfældet. Fx afhænger sandhedsværdien af udsagnet $x^2<x$ af grundmængden.

Matematiske symboler indgår i et sprog med egen syntaks og fungerer som kommunikationsredskab (Steinbring, 1999). Når flere symboler samles, fx i linjens ligning, $y=a\cdot x+b$, indgår symbolerne i et *rollespil* (**R**) som vi vil benytte som den fjerde og sidste kategori. Af udtrykket skal man kunne læse at x og y er variable, og at bogstaverne a og b er konstanter der fastlægger linjens placering, men samtidig at netop disse valg af symboler ikke er essentielle og ingenting siger om karakteristiske egenskaber ved linjen, fx hældningen og skæring med akserne. Havde man i stedet valgt p og q for konstanterne og u og v for de variable, var der tale om præcis det samme matematiske objekt. Symbolernes indbyrdes placering og rækkefølge har betydning for om udtrykket er meningsfyldt, og i givet fald hvilken betydning det tillægges.

Hermed har vi defineret fire kategorier der tilsammen beskriver de roller symboler spiller i undervisningen: (**L**) et label eller en etikette, dvs. noget der står for noget andet, (**O**) omskrivninger af symbolske udtryk der følger regler eller konventioner af primært aksiomatisk karakter, (**P**) optrædende i matematiske påstande hvis sandhedsværdi afhænger af den underliggende matematiske substans, og (**R**) deltager i et rollespil der angives af det manuskript man anvender til at kommunikere matematik med. Ved hjælp af disse kategorier er vi nu i stand til at besvare forskningsspørgsmålet: *Hvilket kendskab og hvilke erfaringer med brug af symboler medbringer eleverne fra grundskolens matematikundervisning, og hvordan møder man dem i gymnasiet?*

Metode

Vi ønsker at uddrage generelle mekanismer fra en konkret case og anvender derfor metoden *instrumental case study* (Johnson & Christensen, 2014). Casen består af matematikundervisningen i 4 grundskoleklasser og 3 gymnasieklasser der tidsmæssigt er placeret omkring overgangen og dermed repræsenterer det *skifte* i undervisning som eleverne oplever – fra arbejde med nyt stof, repetition og eksamenstræning i grundskolen til introduktion af nye faglige emner og metoder i gymnasiet. Den bidrager dermed til belysning af overgangsproblematikken ved at give et detaljeret billede af hvad der rent faktisk foregår i forskellige danske klasselokaler, og hvilket billede af matematikfaget eleverne her præsenteres for.

De 7 klasser er fordelt med tre 9.-klasser og en 10.-klasse samt tre gymnasieklasser. For at indfange variationen i undervisningen er de deltagende skoler udvalgt så forskellige skoleformer repræsenteres (folkeskole/privatskole og alment/erhvervsgymnasium samt by/land). Af de 7 deltagende lærere er der to kvinder og to mænd på grundskoleniveau og to kvinder og en mand på gymnasiet, og på begge niveauer er der både erfarne og mindre erfarne lærere. Observationerne i grundskolen blev foretaget i løbet af de sidste tre måneder inden eksamen i sammenlagt 15 lektioner af 80-90 min., i alt 953 min., mens de tre 1. g-klasser blev observeret i løbet af de første tre måneder af gymnasiet i tilsammen 14 lektioner af 90-100 min., totalt 1.286 min.

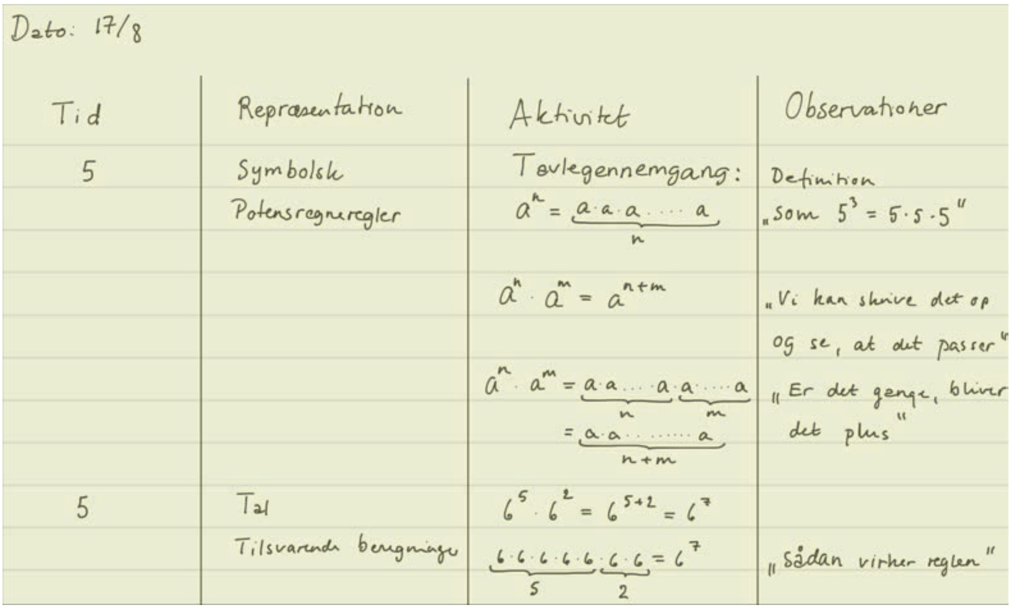
Data består af feltnoter fra klasserumsobservationerne suppleret med udleverede arbejdsark samt benyttede opgave- og lærebøger. Feltnoterne indeholder oplysninger om det matematiske indhold der blev arbejdet med, herunder benyttede repræsentations- og undervisningsformer inklusive konkrete eksempler, opgaver osv. og med angivelse af tidsforbrug. Et uddrag er vist på figur 2.

Ud fra feltnoterne er der opstillet kategorier som beskriver forskellige aspekter af undervisningen. Nogle stammer direkte fra empirien (Michelsen, 2001), mens der er anvendt en kvalitativ indholdsanalyse på baggrund af de fire symbolroller til at identificere undervisningens byggesten (Hsieh & Shannon, 2005). Alle observationer er kodet af forfatteren og valideret af en forsker der kodede ca. 1/3 af observationerne. Resultaterne blev sammenlignet, og dette førte til en justering af kategorierne med en efterfølgende ny kodning. I analysen af de forekomne enheder i undervisningssekvenserne blev der benyttet en visuel inspektion af data hvor forskellige farvekoder fik bestemte mønstre til at træde tydeligt frem (Johnson & Christensen, 2014).

Udvikling af analyseapparat

Hvad sker der egentlig i undervisningen? En første analyse

Da undersøgelsen fokuserer på *undervisning*, benyttes klasserumsobservationer til at undersøge hvordan symboler indgår i sammenhæng med andre repræsentations-



Dato: 17/8

Tid	Repræsentation	Aktivitet	Observationer
5	Symbolsk Potensregneregler	Tavlegennemgang: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$	Definition „Som $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$"
		$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	„Vi kan skrive det op og se, at det passer"
		$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m}$ $= \underbrace{a \cdot a \cdots\cdots a}_{n+m}$	„Er det gange, bliver det plus"
5	Tal Tilsvarende beregninger	$6^5 \cdot 6^2 = 6^{5+2} = 6^7$ $\underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{6 \cdot 6}_{2} = 6^7$	„Sådan virker reglen"

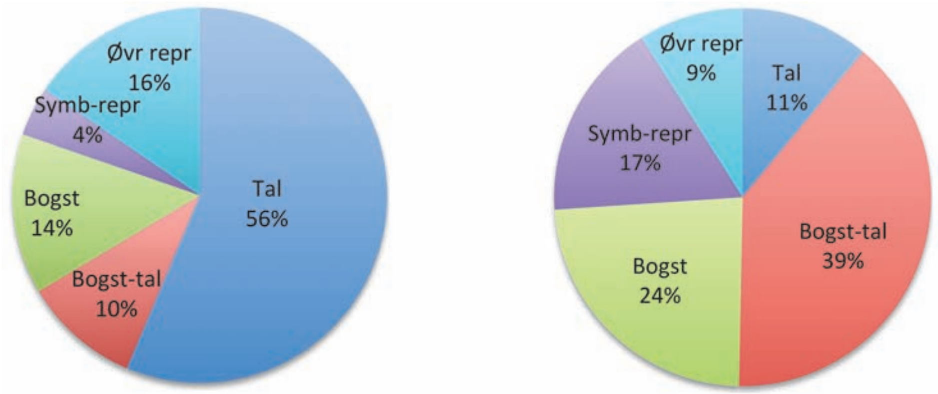
Figur 2. *Eksempel på feltnoter fra en gymnasieklasse.*

former, og hvilke handlinger eller aktiviteter eleverne møder symbolerne i. Hermed opnås en første indsigt i hvilket kendskab til og erfaringer med symboler eleverne har fra grundskolen og mødes med i gymnasiet.

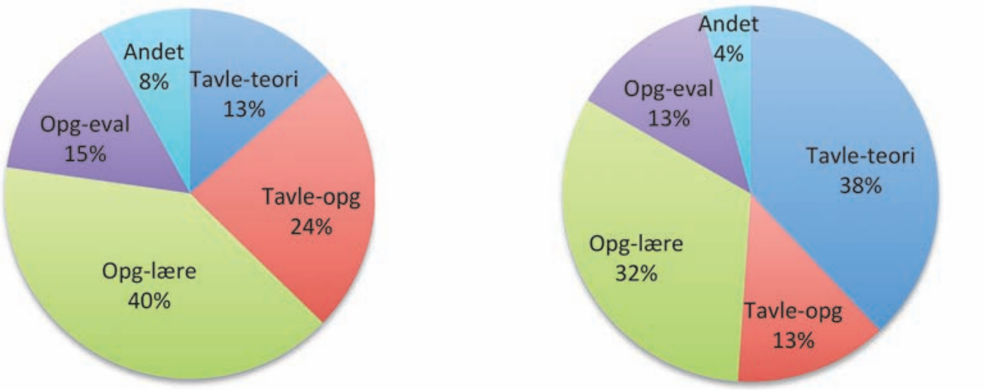
En gennemgang af klasserumsobservationerne viser at visse strukturer går igen. De sammenhænge symbolerne benyttes i, kan beskrives ved: talberegninger og udledninger vha. konkrete tal (tal), bogstavudtryk og -manipulationer uden inddragelse af tal (bogst), en tydelig sammenhæng mellem bogstaver og tal, fx på figurer eller ved indsættelse (bogst-tal), sammenkædning af symboler med andre repræsentationsformer (symb-repr) samt repræsentationsformer som ikke involverer brugen af nogen form for symboler (øvr repr). Benævnelserne i parentes henviser til figur 3 der viser den procentvise fordeling af hvor lang tid eleverne ser de enkelte sammenhænge. Argumentet for at benytte tiden som et mål for brugen er at en repræsentationsform der bruges meget tid på, vil stå tydeligere i elevernes bevidsthed og anses for vigtigere end en der bruges mindre tid på.

Sammenligner man de to diagrammer på figur 3, bemærker man at numeriske og algebraiske symboler benyttes og kombineres med andre repræsentationsformer på meget forskellig måde på de to niveauer i de observerede klasser. Hvor den altovervejende repræsentationsform i grundskolen er tal, er det i gymnasiet de algebraiske symboler der benyttes i langt størstedelen af tiden.

Figur 3 siger imidlertid ikke noget om hvordan man arbejder med symbolerne i undervisningen. Her kan observationerne benyttes til at identificere de aktiviteter



Figur 3. *Fordelingen af repræsentationer i procent af den observerede undervisningstid i grundskolen (tv.) og i gymnasiet (th.).*



Figur 4. *Fordelingen af undervisningsaktiviteter i procent af den observerede undervisningstid i grundskolen (tv.) og i gymnasiet (th.).*

der forekommer: tavleundervisning/-instruktion hvor en lærer instruerer kommende arbejde, præsenterer teori og eksempler eller samler op (tavle-teori), tavlegennemgang af opgaver som eleverne på forhånd har arbejdet med (tavle-opg), opgaveregning for at lære matematik hvor arbejdsprocessen er i fokus (opg-lære), opgaveregning for at evaluere udbytte hvor det er opnåelse af et korrekt resultat der er styrende (opg-eval), samt aktiviteter som ikke kan rummes i ovenstående kategorier (andet). Diagrammerne på figur 4 viser den tidsmæssige fordeling af undervisningsaktiviteter i de observerede klasser i hhv. grundskole (tv.) og i gymnasiet (th.).

Der er flere iøjnefaldende forskelle. I grundskolen benyttes mere end halvdelen af undervisningstiden på at eleverne regner opgaver, mens kun en mindre del anvendes på fælles gennemgang af nyt stof. Omvendt optager gennemgang af teori og opgaver mere end halvdelen af undervisningstiden i de observerede gymnasieklasser. Det tyder på at undervisningens opbygning og afvikling ændrer sig markant ved overgangen, hvilket vi i næste afsnit vil udvikle en metode til at undersøge nærmere.

Undervisningens byggesten

I forrige afsnit identificerede vi forskellige sammenhænge hvor symboler kombineres med andre repræsentationsformer og typer af aktiviteter som læreren benytter sig af. For at undersøge nærmere hvordan symboler indgår i undervisningen, har vi behov for en relation mellem observationer og symbolroller. Klasserumsobservationerne består af en række mindre dele som hver kan karakteriseres af én primær symbolrolle (**L**, **O**, **P** eller **R**). Ved at betragte forekomsten af disse dele eller *undervisningsenheder* kan vi tegne et detaljeret billede af omfanget og måden symboler præsenteres for eleverne på. For at være operationel i analysen skal de enheder vi leder efter, opfylde to krav: På den ene side skal de være store nok til at beskrive en bred vifte af undervisningsaktiviteter der "gør det samme", mens de på den anden side skal være små nok til at kunne angives ved én primær rolle. På baggrund af ovenstående overvejelser er der fra empirien identificeret 10 undervisningsenheder (tabel 1). I venstre kolonne ses enhedens navn, i midten er enheden beskrevet og i nogle tilfælde eksemplificeret, og til højre angives hvilken symbolkategori der karakteriserer undervisningsenheden. Bemærk at der til hver symbolkategori er knyttet flere enheder. Enheden **V** indgår ikke i analysen og er derfor angivet med grå.

Enhed	Beskrivelse	Symbolrolle
A	Angive et symbol på en anden repræsentation (tegning, diagram, tabel, tekst etc.)	**L**
I	Indsætte et symbol i et udtryk, fx $v = 60$ i $\sin(v)$	
D	Definere et matematisk objekt ved en opskrivningsmåde, fx "et andengradspolynomium er defineret som $p(x) = ax^2 + bx + c$"	**R**
N	Introducere matematisk notation, fx $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ eller $a \times a \times a = a^3$	
G	Udvikle ny viden om et symbols betydning vha. et grafisk værktøj, fx Geogebra, som når man ved benyttelse af sliders erkender at b er skæringen med y-aksen i den rette linje $y = ax + b$	
E	Opstille matematiske påstande eller udtryk der samtidig (be)vises ved hjælp af argumenter som afhænger af det bagvedliggende matematiske indhold	**P**
F	Opskrive af en formel fra bogen der kan være, men ikke nødvendigvis er blevet (be)vist	
M	Manipulere, reducere, faktorisere, beregne etc.	**O**
K	Diskutere ny viden fra manipulationer eller beregninger	
V	Benytte et it-værktøj, fx Geogebra, Exel eller Nspire, til konstruktion, manipulationer etc. ved at "klikke sig frem".	**?**

Tabel 1. *Undervisningens byggestene og deres kobling med symbolroller.*

Da vi i forrige afsnit så at forekomsten af symboler i form af hhv. tal og bogstaver er meget forskellig på de to uddannelsesniveauer, skelnes der i kodningen mellem numeriske og algebraiske symboler ved at tilføje et indeks, "n" hhv. "a", til den anvendte undervisningsenhed. Som illustration ser vi på to undervisningssituationer. I den første bliver eleverne bedt om at tegne en skitse af en trekant med angivelse af de længder og vinkler der er angivet i teksten. Hertil benyttes enheden $\mathbf{A}_n$ i kodningen. I den anden introducerer læreren symbolerne *s*, *t* og *v* for afstand, tid og hastighed i gennemgangen af en opgave om bilkørsel, og her anvendes den tilsvarende algebraiske udgave $\mathbf{A}_a$. Som nævnt indgår den nederste type, **V**, ikke i analysen. **V** beskriver instrumentel brug af et matematikprogram uden sammenhæng til det bagvedliggende matematiske indhold. Hermed er det ikke muligt at tolke den tilhørende symbolrolle.

Undervisningens opbygning

Hvert af de 29 moduler (15 i grundskolen og 14 i gymnasiet) blev inddelt i sekvenser der igen bestod af en række undervisningsenheder. Ved en undervisningssekvens forstås en følge af handlinger der hænger sammen. Således vil indførelsen af potensnotation med bogstaver efterfulgt af opstillingen af en generel potensregneregel med argumentation og afsluttet med udførelse af bogstavmanipulationerne opfattes som én sekvens bestående af enhederne $\mathbf{N}_a\mathbf{E}_a\mathbf{M}_a$. De tilhørende feltnoter ses på figur 2. I en anden situation arbejdede en 9.-klasse med udenlandsk valuta, dvs. hvordan man omregner mellem danske kroner og en udenlandsk valuta. De diskuterede hvordan valutatabellen fra deres bog skulle forstås, og kom frem til et udtryk som dette:

$$\text{Beløb i SEK} = 50\ \text{DKK} \times \frac{79{,}07}{100}\ {}^{\text{SEK}}\!/_{\text{DKK}}$$

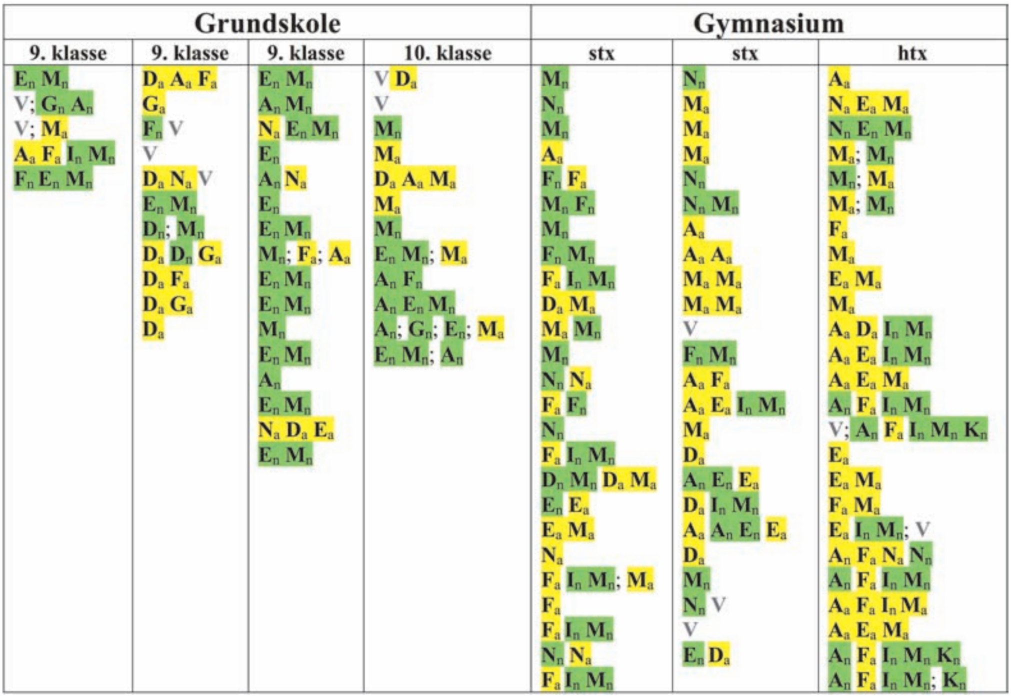
Dette kodes som type $\mathbf{E}_n$ (opstilling af en matematisk påstand eller udtryk fra argumenter om det konkrete matematiske indhold), hvorefter eleverne beregnede resultatet $\mathbf{M}_n$. Tilsammen fås sekvensen $\mathbf{E}_n\mathbf{M}_n$. Hvor to eller flere enheder fandt sted samtidig, som fx når eleverne kunne vælge blandt forskellige typer opgaver, blev dette angivet med et semikolon.

Samtlige forekommende undervisningssekvenser, 45 i grundskolen og 74 i gymnasiet, blev skrevet op i den rækkefølge de forekom i hver enkelt klasse. Der blev foretaget en visuel inspektion af de opskrevne sekvenser for at søge efter eventuelle mønstre. Skønt der var variationer i undervisningens opbygning de enkelte klasser imellem, trådte nogle tydelige forskelle mellem de to uddannelsesniveauer frem, som vi vil beskrive nærmere i det følgende afsnit.

Resultater

Tal og bogstaver i undervisningen

Fra den første analyse af klasserumsobservationerne ved vi at tal er den overvejende symbolform i grundskolen, mens eleverne introduceres for langt flere bogstavudtryk i gymnasiet. Elevers udfordringer ved denne overgang fra aritmetik til algebra er rigt beskrevet i litteraturen (Filloy & Rojano, 1989; Kirshner, 2001; m.fl.). For at synliggøre forskellen i brug af numeriske og algebraiske symboler blev undervisningsenhederne i hver af de opskrevne sekvenser markeret med hhv. grøn eller gul afhængigt af om der var tale om numeriske eller algebraiske symboler. Dette er vist på figur 5. Figuren afslører at det ikke blot er hyppigheden der ændrer sig, men også den rækkefølge de to typer symboler anvendes i, som skifter ved overgangen.



Figur 5. *Undervisningsenheder med brug af hhv. tal (grøn) og symboler (gul).*

I grundskolen er undervisningssekvenserne karakteriseret ved brug af *enten* tal *eller* bogstaver. Der er sjældent en direkte forbindelse mellem de tal og bogstaver som benyttes. Det modsatte er tilfældet i gymnasiet, hvor de fleste sekvenser indeholder begge typer, og der er her et tydeligt mønster i den rækkefølge de forekommer: *Først* benyttes symboler, og *derefter* anvendes tal. Kun i få tilfælde er konkrete tal udgangspunktet for indførelse af generelle symboler, hvilket betyder at eleverne kun sjældent oplever at et generelt resultat kan motiveres eller udledes på baggrund af konkrete beregninger.

Sekvensstruktur

Vi har i et tidligere afsnit set at aktiviteter der involverer opgaver, fylder langt den største del af undervisningen i grundskolen, mens man i gymnasiet endvidere bruger en del tid på teorigennemgang. Vi ved også at tal er den mest forekommende symbolform i grundskolen, så da opgaveregning består af såvel opstilling som udregning af et udtryk, må vi formode at der forekommer sekvenstyper som indeholder $\mathbf{E}_n\mathbf{M}_n$. På figur 6 er samtlige undervisningssekvenser opskrevet, og typen $\mathbf{E}_n\mathbf{M}_n$ er markeret med grå. Vi ser at sekvensen ganske rigtigt er meget hyppig i grundskolen, men stort set fraværende i gymnasiet. Sekvensens grundidé – at man ud fra en konkret situation argumenterer for en sammenhæng der opskrives med de angivne tal og udregnes – er kendetegnende for opfattelsen af matematikfaget i grundskolen.

Grundskole				Gymnasium		
9. klasse	9. klasse	9. klasse	10. klasse	stx	stx	htx
$E_n\ M_n$	$D_a\ A_a\ F_a$	$E_n\ M_n$	$V\ D_a$	M_n	N_n	A_a
$V;\ G_n\ A_n$	G_a	$A_n\ M_n$	V	N_n	M_a	$N_a\ E_a\ M_a$
$V;\ M_a$	$F_n\ V$	$N_a\ E_n\ M_n$	M_n	M_n	M_a	$N_n\ E_n\ M_n$
$A_a\ F_a\ I_n\ M_n$	V	E_n	M_a	A_a	M_a	$M_a;\ M_n$
$F_n\ E_n\ M_n$	$D_a\ N_a\ V$	$A_n\ N_a$	$D_a\ A_a\ M_a$	$F_n\ F_a$	N_n	$M_n;\ M_a$
	$E_n\ M_n$	E_n	M_a	$M_n\ F_n$	$N_n\ M_n$	$M_a;\ M_n$
	$D_n;\ M_n$	$E_n\ M_n$	M_n	M_n	A_a	F_a
	$D_a\ D_n\ G_a$	$M_n;\ F_a;\ A_a$	$E_n\ M_n;\ M_a$	$F_n\ M_n$	$A_a\ A_a$	M_a
	$D_a\ F_a$	$E_n\ M_n$	$A_n\ F_n$	$F_a\ I_n\ M_n$	$M_a\ M_a$	$E_a\ M_a$
	$D_a\ G_a$	$E_n\ M_n$	$A_n\ E_n\ M_n$	$D_a\ M_a$	$M_a\ M_a$	M_a
	D_a	M_n	$A_n;\ G_n;\ E_n;\ M_a$	$M_a\ M_n$	V	$A_a\ D_a\ I_n\ M_n$
		$E_n\ M_n$	$E_n\ M_n;\ A_n$	M_n	$F_n\ M_n$	$A_a\ E_a\ I_n\ M_n$
		A_n		$N_n\ N_a$	$A_a\ F_a$	$A_a\ E_a\ M_a$
		$E_n\ M_n$		$F_a\ F_n$	$A_a\ E_a\ I_n\ M_n$	$A_n\ F_a\ I_n\ M_n$
		$N_a\ D_a\ E_a$		N_n	M_a	$V;\ A_n\ F_a\ I_n\ M_n;\ K_n$
		$E_n\ M_n$		$F_a\ I_n\ M_n$	D_a	E_a
				$D_n\ M_n\ D_a\ M_a$	$A_n\ E_n\ E_a$	$E_a\ M_a$
				$E_n\ E_a$	$D_a\ I_n\ M_n$	$F_a\ M_a$
				$E_a\ M_a$	$A_a\ A_n\ E_n\ E_a$	$F_a\ I_n\ M_n;\ V$
				N_a	D_a	$A_n\ F_a\ N_a\ N_n$
				$F_a\ I_n\ M_n;\ M_a$	M_n	$A_n\ F_a\ I_n\ M_n$
				F_a	$N_n\ V$	$A_a\ F_a\ I_n\ M_a$
				$F_a\ I_n\ M_n$	V	$A_a\ E_a\ M_a$
				$N_n\ N_a$	$E_n\ D_a$	$A_n\ F_a\ I_n\ M_n\ K_n$
				$F_a\ I_n\ M_n$		$A_n\ F_a\ I_n\ M_n;\ K_n$

Figur 6. *Forekomsten af to typiske sekvenstyper (grå og blå).*

At teorigennemgang i gymnasiet indeholder opstilling og eventuelt bevis for generelle udtryk, leder os til at søge efter sekvenser der indeholder $\mathbf{F}_a$ eller $\mathbf{E}_a$, og i eksempler og opgaver efterfulgt af $\mathbf{I}_n$ og $\mathbf{M}_n$. Dvs. sekvenser hvor et algebraisk udtryk opskrives og evt. vises, anvendes ved indsættelse af konkrete tal og til slut fører til et beregnet resultat. På figur 6 er sådanne sekvenser markeret med blå. Vi ser at denne type stort set er fraværende i grundskolen, men ofte forekommende i gymnasiet, særlig hyppigt i perioden *efter* de første ugers introduktion. Undertiden er sekvensen indledt med et $\mathbf{A}_a$, dvs. hvor de benyttede algebraiske symboler præsenteres vha. en anden repræsentationsform, ofte på en figur, og i to tilfælde er $\mathbf{F}_a/\mathbf{E}_a$ erstattet af $\mathbf{D}_a$, dvs. at udgangspunktet for indsættelse er en definition (som fx et andengradspolynomium). Den bagvedliggende idé med sekvensen er hver gang den samme: Man viser eller opskriver et generelt udtryk som derefter benyttes i konkrete tilfælde ved indsættelse af talværdier.

Forekomsten af de fire symbolroller

Vi vender nu tilbage til de fire kategorier der beskriver symbolernes forskellige roller i undervisningen – hvad *hensigten* er med symbolerne: Er det at give et objekt et navn som man derefter kan benytte eller arbejde videre med? Er det at udtrykke relationer? At beregne resultater? At kunne anvende og tolke sådanne resultater? Eller er det kommunikation i formelt matematisk sprogbrug? Alle disse hensigter skal beherskes af eleverne for at opnå de faglige mål i matematikundervisningen (Niss & Jensen, 2002).

Tabel 2 angiver den procentvise andel af hver undervisningsenhed der sammentalt viser hvor ofte de fire symbolroller forekommer. I øverste række findes symbolkategorierne, og nedenunder ses de 9 forskellige enheder der er observeret i undervisningen, og om der er tale om numeriske eller algebraiske symboler. $\mathbf{K}_a$ er udeladt da den ikke blev observeret. I tredje række er frekvensen for hver enkelt enhed i grundskolen angivet og nedenunder talt sammen for hver symbolkategori. Tilsvarende for gymnasiet nederst i tabellen. På grundskoleniveau blev der optalt 88 undervisningsenheder, mens tallet for gymnasiet var 159. Frekvenserne summerer ikke præcist op til 100 pga. afrunding.

Symbol-rolle	**L**				**O**			**P**				**R**					
Enhed	$\mathbf{A}_n$	$\mathbf{A}_a$	$\mathbf{I}_n$	$\mathbf{I}_a$	$\mathbf{M}_n$	$\mathbf{M}_a$	$\mathbf{K}_n$	$\mathbf{E}_n$	$\mathbf{E}_a$	$\mathbf{F}_n$	$\mathbf{F}_a$	$\mathbf{D}_n$	$\mathbf{D}_a$	$\mathbf{N}_n$	$\mathbf{N}_a$	$\mathbf{G}_n$	$\mathbf{G}_a$
Grundskole [%]	10.2	4.5	1.1	0.0	25.0	6.8	0.0	20.5	1.1	3.4	4.5	2.3	10.2	0.0	4.5	2.3	3.4
	15.8				31.8			29.4				22.7					
Gymnasium [%]	4.4	8.8	9.4	0.6	18.9	15.7	1.9	3.1	7.5	3.1	11.9	0.6	4.4	6.3	3.1	0.0	0.0
	23.2				36.5			25.6				14.4					

Tabel 2. *Den procentvise forekomst af symboler i forskellige roller.*

Tabellen viser at alle roller forekommer i såvel grundskole som gymnasium, samt at den oftest forekommende rolle på begge niveauer er omformninger (**O**), dvs. beregninger og symbolske manipulationer. Da forskellene ikke er markante, er det nødvendigt at se på bestanddelene af de enkelte symbolroller i form af undervisningsenhederne. Ser vi først på brugen af etiketter (**L**), består kategorien at to hensigter. Den ene er som et navn for et objekt vist ved en anden repræsentationsform (**A**), og den anden er at erstatte ét symbol med et andet (**I**). I observationerne forekommer den første hensigt omtrent lige ofte på hvert niveau, men hvor navnene fortrinsvist er algebraiske på gymnasiet (**A**$_a$), 8,8 % mod 4,5 % i grundskolen. Derimod er der stor forskel på brugen af etiketter som erstatning for et andet symbol (**I**$_a$ og **I**$_n$) idet en sådan anvendelse stort set kun forekommer på gymnasiet. Dette hænger nøje sammen med forskellene i sekvenstyper, som vi tidligere har set. Hvor man i gymnasiet viser et generelt resultat som derefter anvendes igen og igen ved at indsætte andre værdier (**I**$_a$ og **I**$_n$), vil man i grundskolen i stedet argumentere for det konkrete resultat i hver ny situation. Dog benyttes formler også i grundskolen, og her skal det noteres at disse både kan være generelle (med bogstaver) og konkrete (med tal). Sidstnævnte vil man i gymnasiet kalde et eksempel, men i grundskolen forekommer sådanne formler i formelsamlingen og tillægges dermed mere generel værdi.

Som nævnt er omformninger i form af bogstavmanipulationer og beregninger hyppigt anvendte på begge niveauer, dog med den forskel at bogstavmanipulationerne forekommer langt oftere i gymnasieklasserne. Dette kan forklares med den generelt større brug af algebraiske symboler i gymnasiet som har ført til en tradition for at træne omformninger af algebraiske udtryk ved gymnasiestart.

Benyttelse af symboler i påstande, **P**, udviser ligeledes store forskelle. Dette ses i tabellen bl.a. i forekomsten af **E**$_n$, som er meget hyppig i grundskolen, men kun sjældent ses i gymnasiet. Omvendt arbejder man i gymnasiet med generelle udtryk som eleverne enten ser ræsonnementerne for (**E**$_a$) eller må stole på (**F**$_a$). Dette er to meget forskellige måder at bruge matematikken på: som et redskab til at løse konkrete problemer med eller som et abstrakt fag med generelle metoder til at behandle en bred vifte af problemstillinger.

Endelig er der brugen af symboler hvor det ikke er den bagvedliggende matematiske substans, men derimod skrivemåder og formelt sprog der er i fokus. Her viser tabellen at symbolerne oftere forekommer i denne rolle i grundskolen end i gymnasiet. En af årsagerne kan være at man i de observerede gymnasieklasser – og måske særligt ved gymnasiestart – ikke definerer begreber og skrivemåder i særlig høj grad, men i stedet anvender hvad eleverne allerede har stiftet bekendtskab med i grundskolen. Endelig er tallene i netop denne kategori måske mindre et udtryk for en generel tendens end en enkelt lærers undervisning. Den anden søjle i figur 5 viser nemlig at en enkelt underviser står for 12 ud af 20 forekomster af denne symbolrolle (**D**, **N**, **G**) i grundskolen, som dermed må formodes at være overrepræsenteret i empirien.

Diskussion

Ved at betragte symbolernes rolle i et semiotisk perspektiv kan konkret matematikundervisning karakteriseres og sammenlignes med anden undervisning. I denne undersøgelse har vi anvendt metoden til at belyse overgangen mellem grundskole og gymnasium. Men også i studier af elevers læring, herunder matematikvanskeligheder, kan symbolkategorierne anvendes.

Undersøgelsen udstiller sammenhængsproblematikken i matematikundervisningen:

> Sammenhængsproblemerne består i, at det fag, der bærer navnet matematik i virkeligheden er så forskelligt tænkt, fortolket og realiseret i de forskellige afsnit af uddannelsessystemet, at det kan være svært at få øje på, hvad der er fælles for faget. [...] Af særlig styrke er disse problemer, når det gælder overgangen fra et afsnit til et andet. (Niss & Jensen, 2002, s. 23).

Resultaterne fra den observerede undervisning, se figur 5, indikerer blandt andet at man i grundskolen fortrinsvist løser opgaver ved at argumentere for de opstillede udtryk ud fra en konkret kontekst, mens man i gymnasiet primært først (be)viser generelle formler som derefter kan anvendes i mange forskellige typer opgaver ved at indsætte tal, men uden yderligere argumentation. Undersøgelsen tyder dermed på at argumenter baseret på konkrete tal kun sjældent videreføres til generelle ræsonnementer i grundskolen, mens sådanne generelle ræsonnementer i gymnasiet omvendt kun sjældent tager udgangspunkt i konkrete beregninger/argumenter. Man kan tænke sig at en øget opmærksomhed på begge disse tilgange kan forbinde matematikundervisningen på de to uddannelsesniveauer. Sammenholdes undersøgelsens resultater med internationale studier af overgangen fra aritmetik til algebra (Lins, 2001), tyder meget på at også et større didaktisk fokus på indførelsen af algebraiske symboler og en stilladsering af elevernes arbejde med at skabe mening i symbolerne kan være med til at afhjælpe nogle af de problemer eleverne oplever ved overgangen.

Undersøgelsens empiriske grundlag begrænser sig til 7 klasser, og dette bevirker at især optællingen af undervisningsenheder i tabel 2 er sårbar for enkelte læreres "atypiske" undervisning. Man kan stille spørgsmålstegn ved om det er rimeligt at slå grundskoleundervisningen hhv. gymnasieundervisningen sammen i tabellen. Der er mange andre forhold end uddannelsesniveauet som har betydning for den aktuelle undervisning: det benyttede lærebogssystem, det behandlede matematiske emne etc. Men på baggrund af den visuelle inspektion af data skønnes det rimeligt at foretage denne sammentælling da man ser tydelige mønstre i undervisningen indenfor hvert niveau. Kodningen af observationerne er behæftet med usikkerhed da en tolkning af feltnoterne ikke er entydig. Her forøger den foretagede dobbeltkodning interkoderreabiliteten. Som nævnt ovenfor og i introduktionen ligger mange af undersøgelsens resultater i tråd med andre undersøgelser af overgangen, og dette tyder på at de i en vis udstrækning er generalisérbare, og at man derfor med et semiotisk fokus kan være med til at pege på aspekter af overgangsproblematikken.

Sammenfatning og konklusion

En analyse med fokus på symbolernes rolle i fire folkeskoleklassers og tre 1. g-klassers matematikundervisning omkring overgangen peger på markante forskelle. Dette gælder for såvel den måde matematiske symboler præsenteres og anvendes på, som for de aktiviteter der foregår i undervisningen, og det ses i den måde algebraiske symboler indgår og sammenkædes med andre repræsentationsformer. Hvor der i grundskolen fortrinsvist benyttes tal der fx indgår i opstillingen af udtryk indlejret i en bestemt kontekst, erstattes disse ofte med bogstaver i gymnasiet. Her anvendes de i opstilling og benyttelse af generelle formler der enten (kan) bevises, eller som forekommer i definitioner af abstrakte objekter eller ved indførelse af en bestemt notation. På begge niveauer udføres mange beregninger, mens omformninger af symboludtryk er langt mere almindelig i gymnasiet end i grundskolen, hvor de dog også forekommer. Tilsammen tyder resultaterne på at eleverne oplever et andet billede af matematikfaget og en anden praksis der kan være årsag til en del af overgangsproblemerne i faget.

Tak

En stor tak til de lærere og elever der har medvirket i denne undersøgelse.

Referencer

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2007). SOS-projektet-didaktisk modellering af et sammenhængsproblem. *MONA: Matematik og Naturfagsdidaktik*.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Ebbensgaard, A.H.B., Jacobsen, J. C. & Ulriksen, L. (2014). Overgangsproblemer mellem grundskole og gymnasium i fagene dansk, matematik og engelsk. IND's skriftserie, 37, KU.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education*, 170-218.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational studies in mathematics, 19*(3), 333-355.

Hsieh, H.-F. & Shannon, S.E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research, 15*(9), 1277-1288.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. *Approaches to algebra* (pp. 225-236): Springer.

Johnson, B. & Christensen, L. (2014). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches*. 5th Edition. Sage.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-419.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. In R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83-98): Springer.

Lindenskov, L., Enggaard, K., Andersen, A.M. & Sørensen, H. (2009). Progression i matematik og naturvidenskab fra grundskole til stx – hvordan kan det blive helt forkert i gymnasiet at bruge det, man har lært? I Mathiasen, H. (red.), *Overgangsproblemer som udfordringer i uddannelsessystemet*. Forskningsrapport, Aarhus Universitet (s. 45-80).

Lins, R.C. (2001). The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of Semantic Fields. In R. Sutherland et al. (eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 37-60): Springer.

Michelsen, C. (2001). *Begrebsdannelse ved domæneudvidelse.* (Ph.d-afhandling), SDU, Danmark.

Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark* (Vol. 18): Undervisningsministeriet.

Peirce, C.S. (1965). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce: Edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss*: Harvard University Press and the Belknap Press.

Steinbring. (1999). *How do Mathematical Symbols acquire their Meaning? The Methodology of the Epistemology-based Interaction Research.* Paper presented at the Trabajo presentado en Annual Meeting of the GDM, Bern.

Steinbring. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 133-162.

Søndergaard, B.D. (2009). Progression i matematiske kompetencer? En analyse af systemforventninger for matematik i overgangene mellem grundskolen, det almene gymnasium og universitetet. I Mathiasen, H. (red.), *Overgangsproblemer som udfordringer i uddannelsessystemet.* Forskningsrapport, Aarhus Universitet (s. 114-131).

English abstract

This study looks at the transition from lower to upper secondary mathematics classes by observing actual teaching. The main focus is on how the subject of mathematics is presented to students through the use of symbols. By analysing teacher instruction by means of the role of symbols, some of the challenges facing students in the transition become apparent. A categorisation of symbol roles as: a label, in transformations, in setting up mathematical expressions and as taking part in a role play shows that the characteristics of mathematics change fundamentally at the transition.