Varighedsbaseret Prisfastsættelse af Optioner på Obligationer

Varighed – Basisrisiko

Af Peter Løchte Jørgensen og Odile Collignon*

* *Forfatterne ønsker at takke Michael Christensen samt en anonym* referee *for omfattende kommentarer og talrige forslag til forbedringer. Peter Honoré skal takkes for en række kritiske spørgsmål, der skærpede vores opmærksomhed omkring de numeriske resultater. Tilbageværende fejl og mangler er forfatternes ansvar alene.*

Resumé

Denne artikel indeholder to pointer. Den første drejer sig om obligationsanalysens anvendelse af varighedsbegrebet. Vi advokerer for brugen af stokastisk varighed frem for de traditionelle statiske varighedsdefinitioner. Den anden pointe vedrører prisfastsættelse af optioner skrevet på kupon-obligationer. Med udgangspunkt i den stokastiske varighed anviser vi en simpel og meget præcis metode til approksimation af optionspræmier.

Introduktion

Varighedsbegrebet er et for længst anerkendt redskab til vurdering af obligationers og obligationsporteføljers basisrisiko[1] (renterisiko). For analytikere, som beskæftiger sig med de finansielle markeder, hører varighedsbegrebet og dets definition hjemme i mængden af tilværelsens få faste holdepunkter. Der er da også skrevet så meget om dette risikomål og om modifikationer heraf, siden Macauley for næsten 60 år siden introducerede begrebet, at læseren muligvis allerede er ved at trættes ved udsigten til at skulle læse endnu en artikel om emnet. Det er der nu ingen grund til. Vi vil ikke ulejlige læseren med at introducere endnu en påstået forbedret udgave af varighedsmålet, men blot minde om

Varighedsbaseret Prisfastsættelse af Optioner på Obligationer

Varighed – Basisrisiko

Af Peter Løchte Jørgensen og Odile Collignon*

* *Forfatterne ønsker at takke Michael Christensen samt en anonym* referee *for omfattende kommentarer og talrige forslag til forbedringer. Peter Honoré skal takkes for en række kritiske spørgsmål, der skærpede vores opmærksomhed omkring de numeriske resultater. Tilbageværende fejl og mangler er forfatternes ansvar alene.*

Resumé

Denne artikel indeholder to pointer. Den første drejer sig om obligationsanalysens anvendelse af varighedsbegrebet. Vi advokerer for brugen af stokastisk varighed frem for de traditionelle statiske varighedsdefinitioner. Den anden pointe vedrører prisfastsættelse af optioner skrevet på kupon-obligationer. Med udgangspunkt i den stokastiske varighed anviser vi en simpel og meget præcis metode til approksimation af optionspræmier.

Introduktion

Varighedsbegrebet er et for længst anerkendt redskab til vurdering af obligationers og obligationsporteføljers basisrisiko[1] (renterisiko). For analytikere, som beskæftiger sig med de finansielle markeder, hører varighedsbegrebet og dets definition hjemme i mængden af tilværelsens få faste holdepunkter. Der er da også skrevet så meget om dette risikomål og om modifikationer heraf, siden Macauley for næsten 60 år siden introducerede begrebet, at læseren muligvis allerede er ved at trættes ved udsigten til at skulle læse endnu en artikel om emnet. Det er der nu ingen grund til. Vi vil ikke ulejlige læseren med at introducere endnu en påstået forbedret udgave af varighedsmålet, men blot minde om

Cox, Ingersoll & Ross' (CIR) *stokastiske varighed*[2] (Cox, Ingersoll & Ross (1979)). Denne tilsyneladende noget oversete alternative definition af varighed er efter vor mening det hidtil bedste bud på et risikomål for obligationers basisrisiko *i en dynamisk sammenhæng*. Vi illustrerer med en række eksempler problemerne med de statiske varighedsmål baseret på f.eks. effektiv rente eller estimerede nulkuponrenter.

CIR's stokastiske varighed danner udgangspunkt for artiklens andet formål, som er at anvise en nemt anvendelig og meget nøjagtig metode til at approksimere priser og *hedge ratios* for obligationsbaserede optioner. Eftersom metodens grundlag er en dynamisk rentestrukturmodel, er det teoretiske fundament betydelig mere solidt end for konkurrerende metoder, der baserer sig på modifikationer af Black-Scholes' aktieoptionsmodel. Idéerne bag denne del af artiklen er først undfanget af Wei (1995).

Stokastisk varighed

CIR's stokastiske varighed udspringer af en standardmodel for usikkerheden i et obligationsmarked. Det antages, at obligationspriserne er bestemt ud fra tilstandsvariablen »renten«, $r(t)$, og tiden, t, og at renten udvikler sig i henhold til en stokastisk proces af følgende form

$$dr(t) = \mu(r)dt + \sigma(r)dz(t). \qquad (1)$$

$\mu(r)$ er processens driftled, der angiver den forventede ændring i renten pr. tidsenhed. Usikkerheden er indført gennem $z(t)$, som er en standard Brownsk bevægelse – et støjled. $\sigma(r)$ er volatiliteten, dvs. $\sigma^2(r)$ er processens øjeblikkelige varians. [3]

Lad nu $P(r,t)$ betegne en obligations pris på tidspunkt t og ved renten r. Ligning (1) leder, via en anvendelse af Itô's lemma, til, at udviklingen i obligationspriserne er givet ved processen

$$\frac{dP(r,t)}{P(r,t)} = m(r,t)dt + \sigma(r)\,\frac{P_r(r,t)}{P(r,t)}\,dz(t), \qquad (2)$$

hvor $m(r,t)$ er det forventede afkast pr. tidsenhed, og P_r betegner den partielt afledte af obligationsprisen med hensyn til renten.

Af ligning (2) ses det, at obligationens prisfølsomhed over for ikke-forventede ændringer i renten er bestemt af størrelsen $\sigma(r)P_r/P$. Bemærk, at $\sigma(r)$, der hidrører fra renteprocessen, er generel for hele obligationsmarkedet, mens P_r/P er specifik for den obligation, der betragtes. Størrelsen P_r/P indeholder således den relevante information om obligationens risiko/kursfølsomhed. Vejen herfra og til et risikomål, der på konsistent vis kan benyttes til sammenligning af obligationers kursfølsomhed, og som kan måles i enheden »tid«, f.eks. »år«, er ikke lang. CIR definerer stokastisk varighed således:

Den stokastiske varighed for en (kupon-) obligation defineres som løbetiden for dén nulkupon-obligation, der har samme kursfølsomhed, som den (kupon-) obligation, der betragtes.

Senere i artiklen, når vi får brug for yderligere matematisk præcision, indfører vi funktionen $f(\tau)$ for nulkupon-obligationens løbetidsafhængige kursfølsomhed. I overensstemmelse med ovenstående verbale definition kan stokastisk varighed for en hvilken som helst obligation derfor defineres analytisk som $f^{-1}(x)$, hvor x betegner obligationens kursfølsomhed, jf. ovenfor. For en given dynamisk rentestrukturmodel er det derfor i første omgang et spørgsmål om at få identificeret den funktionelle form for $f(\cdot)$. I appendix har vi illustreret fremgangsmåden for én af de to meget udbredte rentestrukturmodeller, som vi i resten af artiklen koncentrerer os om. Disse er Vasicek-modellen (Vasicek (1977)) og CIR's kvadratrodsmodel (Cox, Ingersoll & Ross (1985)).

Det er på sin plads at indskyde, at Vasicek- og CIR-modellerne har været hårdt kritiseret siden deres introduktion. Kritikere har blandt andet fokuseret på den meget simple én-faktor specifikation samt på valget af den korte rente som faktor, jf. fodnote 3. Ikke desto mindre anvendes modellerne vel som aldrig før, og det er også stadig i vidt omfang disse modeller, som akademikere vender tilbage til, når der for eksempel søges analytiske løsningsudtryk for priser på nye finansielle renteafhængige instrumenter. Vi tillader os at flyde passivt med denne strøm og lukker diskussionen af med en akademisk floskel: Et egentligt test af modellernes forklaringsevne over for udsving i obligationspriser over tid ligger uden for denne artikels rammer. Den særligt interesserede henvises til speciallitteraturen. Et godt sted at starte er Gibbons & Ramaswamy (1993).

Både Vasicek- og CIR-modellen er specialtilfælde af den mere generelle model i (1). Specialtilfældene udkrystalliseres fra (1) ved båndlæggelse af $\mu(r)$ og $\sigma(r)$, som angivet i nedenstående tabel.

	Vasicek	CIR
$\mu(r)$	$\kappa(\theta-r)$	$\kappa(\theta-r)$
$\sigma(r)$	σ	$\theta\sqrt{r}$

Af tabellen fremgår det, at driftleddet i begge modeller er specificeret således, at renteprocessen bliver *mean-reverting* omkring niveauet θ. Parameteren κ bestemmer styrken, hvormed renten trækkes imod sit langsigtsniveau, og kaldes derfor ofte for *the mean-reversion rate*. I Vasicek-modellen er rentevolatiliteten, σ, konstant (hvilket desværre kan afføde negative renter), mens volatiliteten i CIR-modellen tillades at variere med renteniveauet.

Foruden de tre konstante renteprocesparametre κ, θ og σ samt en startværdi, r_0, behøves for hver af de to modeller endnu en parameter til den fulde specifikation. Denne parameter fastlægger den såkaldte *markedspris på risiko*.[4] I Vasicek-modellen er markedsprisen på risiko givet ved konstanten $\lambda^{Vasicek}$, mens markedsprisen på risiko i CIR-modellen er bestemt ved $\frac{\sqrt{r}}{\sigma}\lambda^{CIR}$, hvor λ^{CIR} er konstant.

Til brug for eksemplerne i resten af artiklen er det nødvendigt med estimater for modellernes parametre. Renteprocessens parametre har vi estimeret efter metoden beskrevet i Jørgensen & Hansen (1995). Den anvendte tidsserie af korte renter er *dag-til-dag renten* fra primo januar 1993 til ultimo november 1995. Dag-til-dag renten offentliggøres i Danmarks Nationalbanks publikation »Finansiel Månedsstatistik«. Parameteren λ blev bestemt simultant med r_0 ved at tilpasse modellerne til markedskurser for det danske obligationsmarkeds ti mest omsatte inkonverterbare statspapirer på børsdagen mandag d. 26.

februar 1996.[5] De opnåede estimater var som følger:

Tabel 1

	Vasicek	CIR
κ	0.3574	0.3421
θ	0.0738	0.0752
σ	0.0265	0.1185
$\lambda^{Vasicek}$	0.2884	-
λ^{CIR}	-	0.1032
r_0	0.0316	0.0356

Med udgangspunkt i de estimerede parametre vil vi først illustrere de forskelle, der kan opstå ved brug af forskellige varighedsdefinitioner. Dernæst vender vi os imod optionsprisfastsættelsen.

I tabel 2 herunder har vi anført modelkurser og markedskurser samt beregnet varigheder i henhold til tre forskellige varighedsdefinitioner for en række danske statsobligationer på børsdagen den 26. februar 1996. V_0 er den i kurslisten opgivne varighed. V_1 er varigheden beregnet med udgangspunkt i obligationens effektive rente ligesom V_0, men hér er modelprisen i henhold til de respektive estimerede modeller lagt til grund for beregningen af den effektive rente. V_2 betegner den nulkupon-baserede varighed, hvor nulkupondiskonteringsfaktorerne er beregnet ud fra de estimerede modeller.[6] Endelig er V_3 CIR's stokastiske varighed svarende til $f^{-1}(x)$, jf. ovenfor.

Flere interessante ting kan observeres i tabel 2. Først og fremmest skal det be-

Tabel 2

			Vasicek-model				CIR-model			
Papir	Børs-kurs	V_0	Model-kurs	V_1	V_2	V_3	Model-kurs	V_1	V_2	V_3
St.lån/stgb										
10% 1996	103.50	0.71	104.14	0.719	0.719	0.719	103.97	0.719	0.719	0.719
9% 2000	110.20	3.99	110.23	4.001	3.987	3.609	110.39	4.001	3.988	3.718
9% 1998	108.50	2.48	108.60	2.490	2.487	2.417	108.56	2.490	2.488	2.438
9% 1996	103.00	0.71	103.45	0.719	0.719	0.719	103.28	0.719	0.719	0.719
8% 2006	102.74	7.33	102.84	7.341	7.232	5.162	102.64	7.338	7.226	5.583
8% 2003	104.55	5.47	104.79	5.476	5.431	4.139	104.89	5.477	5.433	4.464
8% 2001	105.96	4.74	105.74	4.744	4.721	4.101	105.91	4.745	4.723	4.273
7% 2024	85.00	11.70	85.31	11.727	10.973	4.877	83.81	11.600	10.744	5.402
7% 2004	97.20	6.73	97.21	6.742	6.667	4.979	97.16	6.741	6.666	5.364
7% 1998	103.46	1.90	103.61	1.905	1.905	1.893	103.48	1.905	1.905	1.896
7% 1997	102.90	1.40	103.23	1.405	1.405	1.393	103.06	1.405	1.405	1.397
6.25% 1997	101.60	0.95	101.86	0.956	0.956	0.956	101.68	0.956	0.956	0.956
6% 1999	100.52	3.45	99.75	3.462	3.456	3.304	99.84	3.462	3.457	3.350
5.25% 1996	100.30	0.45	100.65	0.456	0.456	0.456	100.52	0.456	0.456	0.456
Serielån										
12% 2001	115.45	2.67	116.06	2.682	2.657	2.338	116.04	2.682	2.659	2.417
10% 2004	112.25	3.77	112.57	3.787	3.712	2.816	112.59	3.787	3.714	3.004
10% 1999	107.25	1.71	108.03	1.722	1.712	1.503	107.94	1.722	1.713	1.560
4.5% 1997	99.90	1.11	99.94	1.115	1.113	1.068	99.79	1.114	1.113	1.081

mærkes, at begge rentestrukturmodeller »fitter« markedet udmærket. Kun i få tilfælde er der tale om fejlprisfastsættelse på over et halvt kurspoint.[7] Målt ud fra summen af de kvadrerede afvigelser udviser Vasicek-modellen – der ofte udskældes i den akademiske litteratur for at tillade forekomst af negative renter – på denne børsdag og for de udvalgte obligationer et bedre *fit* end CIR-modellen.[8]

Bemærk dernæst, at der kun er små afvigelser mellem V_0, V_1, og V_2. Da V_0 og V_1 er beregnet efter samme opskrift, burde de være ens. Der opstår imidlertid en lille afvigelse, da modelprisen er benyttet som udgangspunkt for bestemmelsen af den effektive rente til brug for V_1. Og modelpris og markedspris er, som diskuteret ovenfor, ikke helt ens. Ved normalt forløbende rentestrukturkurver er det også reglen, at forskellen mellem den nulkupon-baserede varighed, V_2, og varigheden baseret på den effektive rente, V_1, er beskeden. Fordelen ved V_2 er som bekendt, at varigheden for en portefølje kan findes som et kursvægtet gennemsnit af de individuelle obligationers varigheder.

Sammenlignes nu V_3 med de andre varighedsmål, ses det, at der er markante forskelle i de beregnede varigheder. Forskellen er særligt udtalt for lange obligationer. Betragtes f.eks. den for tiden toneangivende 8% 2006 obligation, ses det, at de statiske varighedsmål finder varigheder på ca. 7.3 år, mens den stokastiske varighed er 5.16 eller 5.58 år, alt efter om Vasicek- eller CIR-modellen lægges til grund. Dette er afgjort voldsomme forskelle. Helt galt bliver det for det meget lange 7% 2024 stående lån. Varigheden er i dette tilfælde mere end 100% overvurderet, og det bemærkes, at den stokastiske varighed for samme papir beregnet med Vasicek-modellen som grundlag faktisk er *mindre* end den tilsvarende varighed for det stående lån, hvis løbetid er cirka 20 år kortere (7% 2004)!

Der er altså tilsyneladende tale om systematisk overvurdering af obligationers kursfølsomhed ved brugen af statiske varighedsmål. Man kunne fristes til at forklare denne effekt ved at henvise til den særlige *mean-reversion* egenskab, som besiddes af såvel Vasicek-modellen som CIR-modellen. Dette leder nemlig til en naturlig overgrænse for usikkerheden (variansen) omkring det fremtidige renteniveau, hvilket der ikke vil være i modeller uden *mean-reversion*. Dette kunne videre tænkes at lægge en dæmper på den (modelspecifikke) stokastiske varighed. Men den forklaring er ikke tilstrækkelig. Fjernes *mean-reversion* egenskaben, observeres samme *bias*. Vi har også kalibreret modellen med en relativt høj værdi af r_0 (10%) og med de øvrige parametre, heriblandt θ, uændrede. Dette kunstgreb ændrer intet ved de ovenfor diskuterede kvalitative resultater: V_3 er fortsat cirka halvt så stor som V_1 og V_2 for det lange 7% 2024 lån, og V_3 er igen en anelse større for det korte 7% 2004 lån end for 7% 2024 lånet. Der henvises til Cox, Ingersoll & Ross (1979) for yderligere numeriske resultater.

Ovenstående analyse og de rapporterede resultater bør give obligationsanalytikere anledning til at overveje deres anvendelse af varighedsbegrebet. Vores ærinde har således ikke været at påvise noget decideret forkert ved de traditionelle varighedsmål, der baserer sig på enten nulkupon-renter eller effektiv rente. Hvad vi derimod ønsker at påpege er, at det er meget let at anvende disse mål forkert. De statiske varighedsmål er fine, hvis man ønsker et bud på en obligations kursændring som følge af, at *hele* rentestrukturen om et øjeblik forskydes med for eksempel 1% i op- eller nedadgående retning. Men for det første er det et problem, at denne type rentestrukturskift, som altså implicit forudsættes af de statiske varighedsmål, er urealistiske. Det er således blevet vist (Ingersoll, Skelton & Weil (1978) (ISW)), at varighed med udgangspunkt i den effektive rente kun er et brugbart og sammenligneligt risikomål i dynamisk sammenhæng, hvis rentestrukturen altid er flad. Tilsvarende viser ISW, at den nulkupon-rentebaserede varighed kun er teoretisk holdbar, såfremt rentestrukturskift kan antages at ske ved parallelforskydninger.[9] For det andet er det tvivlsomt, om dét, obligationsanalytikere ønsker, er information af ovennævnte karakter. Det er nok i højere grad sammenligninger af kursfølsomhed/risiko på tværs af kurslisten, som er interessante, og ovenstående numeriske eksempler har illustreret – givet at rentestrukturens dynamik er velbeskrevet ved én-faktor modellerne – at de statiske varighedsmål kan føre til en endog meget forkert gruppering af obligationer i forskellige risikoklasser.

Opsummerende kan man sige, at idéen med CIR's stokastiske varighed er, at man med det formål for øje at analysere kursfølsomheden/risikoen for en kupon-obligation (portefølje) i stedet med fordel kan betragte en simpel nulkupon-obligation med samme kursfølsomhed.

I resten af denne artikel vil vi diskutere, hvorledes samme idé kan anvendes i forbindelse med prisfastsættelse og hedging af obligationsbaserede optioner.

Optioner med obligationer som underliggende aktiv

Prisfastsættelse af optioner med kuponobligationer som underliggende aktiv er en kompliceret sag. Dette gælder uanset, om problemet anskues fra en praktisk eller en teoretisk synsvinkel. Årsagen hertil er primært, at man i udviklingen af modeller til prisfastsættelse af renteafledte fordringer som minimum må modellere udviklingen i *hele* rentestrukturen på en måde, som ikke giver anledning til inkonsistens (arbitragemuligheder) over tiden. Hensigten hermed er naturligvis at få en troværdig model for det underliggende aktivs dynamiske udvikling. Først herefter kan man give sig i kast med at fastlægge en fair pris for det afledte aktiv. Nærværende tidsskrifts læsere er bekendt med denne problemstilling fra en artikel af Miltersen (1993).

For de to rentestrukturmodeller, som vi for nærværende har valgt at behandle (Vasicek- og CIR-modellen), er der i litteraturen udledt formler for priser på en række obligationsbaserede europæiske optioner. Jamshidian (1989) har med Vasicek-rentestrukturmodellen som grundlag udledt prisformler for optioner skrevet på både nulkupon-obligationer og kupon-obligationer. I Cox, Ingersoll & Ross' oprindelige artikel fra 1985 fandt forfatterne selv det korrekte udtryk for den europæiske option i tilfældet, hvor det underliggende aktiv er en nulkupon-obligation. CIR-modellens priser for europæiske optioner skrevet på kupon-obligationer blev fundet af Longstaff (1993). Sørensen

(1994) analyserer og sammenligner obligationspriser opnået ved anvendelse af henholdsvis en modificeret udgave af Black-Scholes' formel og Longstaffs formel.

I de tilfælde hvor den underliggende obligation er en kupon-obligation, er formeludtrykkene temmeligt komplicerede. Prisen for optionen vises således at kunne repræsenteres som et særligt vægtet gennemsnit af præmier for optioner på (hypotetiske) nulkupon-obligationer og med snedigt justerede exercisekurser. Evaluering af disse formler kræver decideret programmering og kan være meget tidskrævende. For nulkupon-obligations-optionerne derimod har prisformlerne stor lighed med den velkendte Black-Scholes formel og kan derfor evalueres ved hjælp af en avanceret lommeregner eller et simpelt regneark.

Ovenstående facts har næret idéen om rent beregningsteknisk at approksimere værdien af en option skrevet på en kupon-obligation med præmien for en option skrevet på en nulkupon-obligation med samme basisrisiko. Tilsvarende må optionspræmiens følsomhed over for diverse modelparametre (de såkaldte *Greeks*), herunder *hedge ratio*'en, kunne evalueres/approksimeres ved en betragtning af den således tilsvarende nulkupon-option. Idéen er først skitseret i Cox, Ingersoll & Ross (1979) og senere fulgt op i Wei (1995). Lad os se på detaljerne.

Som udgangspunkt betragtes en kupon-obligation (obligationsportefølje) bestående af N sikre fremtidige betalinger b_i, $i=1...N$. Vore rentestrukturmodeller vil prisfastsætte obligationen i henhold til nutidsværdirelationen

$$P^{Kupon}(r,t) = \sum_{i=1}^{N} b_i P^0(r,t,s_i), \qquad (4)$$

hvor $P^0(r,t,s_i)$ betegner prisen til tid t og ved renten r på en nulkupon-obligation med udløbsdato s_i (svarende til tidspunktet for betalingen b_i). Nulkupon-prisen $P^0(r,t,s_i)$ er givet ved lukkede formeludtryk i både Vasicek- og CIR-modellen (førstnævnte er angivet i appendix).

Betragt nu en europæisk call option med udløbsdato T, exercisepris K og med kupon-obligationen som underliggende aktiv.[10] Optionsprisen på tidspunkt t og ved renten r betegner vi $C^{Kupon}(r,t,T,K)$. I det følgende skitseres henholdsvis den eksakte og den approksimerende metode.

Den eksakte metode

Som nævnt ovenfor er det blevet vist i artikler af henholdsvis Jamshidian og Longstaff, at $C^{Kupon}(r,t,T,K)$.kan udtrykkes som

$$C^{Kupon}(r,t,T,K) = \sum_{i=1}^{N} b_i C^0(r,t,T,s_i,K_i), \qquad (5)$$

hvor $C^0(r,t,T,s_i,K_i)$ betegner præmien på tidspunkt t og ved renten r for en T-års call option på en nulkupon-obligation med udløbsdato s_i og med exercisepris K_i. K_i er givet ved udtrykket $K_i = P^0(r^*,T,s_i)$, hvor r^* er løsning til

$$\sum_{i=1}^{N} b_i P^0(r^*,T,s_i) = K.$$

Som nævnt findes der »Black-Scholes lignende« lukkede formeludtryk for prisen for en option på en nulkupon-obligation i såvel Vasicek- som CIR-modellen (førstnævnte er anført i appendix). Alligevel vil det være en kompliceret opgave at evaluere (5) – især hvis der er et stort antal kuponbetalinger på den underliggende obligation, da r^* skal findes iterativt.

Varighedsbaseret approksimation af optionspriser

Den varighedsbaserede approksimation af optionsprisen følger nedenstående logik. Kursfølsomheden for kupon-obligationen er ifølge (2) givet ved P_r^{Kupon} / P^{Kupon}, der igen er givet ved simple formeludtryk i begge de betragtede modeller. Tilsvarende har vi for nulkupon-obligationen, at kursfølsomheden er givet ved $f(\tau) = P^0_r / P^0)$, hvor afhængigheden af nulkupon-obligationens løbetid er understreget ved indførsel af funktionen $f(\tau)$. For både Vasicek- og CIR-modellen findes simple lukkede formler for $f(\tau)$. Denne funktion bruger vi nu til at bestemme kupon-obligationens stokastiske varighed. Denne er jævnfør tidligere givet ved

$$V_{Stok}^{Kupon} = f^{-1}\left(\frac{P_r^{Kupon}}{P^{Kupon}}\right). \qquad (6)$$

Idéen i den varighedsbaserede optionspris-approksimation er nu ganske enkelt følgende

$$C^{Kupon}(r,t,T,K) = \qquad (7)$$

$$C^{Kupon}_{approx}(r,t,T,K) \equiv \psi \cdot C^0\left(r,t,T,t + V^{Kupon}_{Stok}, \frac{K}{\psi}\right),$$

hvor

$$\psi = \frac{P^{Kupon}(r,t)}{P^0(r,t,t + V^{Kupon}_{Stok})}$$

Udtryk (7) siger, at præmien for call optionen på kupon-obligationen kan tilnærmes ved præmien for et antal tilsvarende call optioner skrevet på nulkupon-obligationer med løbetid V^{Kupon}_{Stok}. Det nødvendige antal optioner på nulkupon-obligationer er bestemt ved brøken $\psi = \frac{P^{Kupon}(\cdot)}{P^0(\cdot)}$, som bestemmer det antal nulkupon-obligationer, der skal til for at opnå en aktuel markedsværdi som for kupon-obligationen.

Vi vender os nu mod et par eksempler, som er inspireret af kontrakter fra det danske FUTOP-marked.

I overensstemmelse med forrige afsnit betragter vi optioner skrevet direkte på obligationen, selvom de optioner, som tilbydes af FUTOP, faktisk har futureskontrakten som underliggende aktiv. Forskellen er (burde være) marginal, når blot vi er opmærksomme på vedhængende renter og eventuelle kuponer i optionens levetid. Helt præcist er det underliggende aktiv i eksemplerne defineret til at være nutidsværdien af de af obligationens kuponer, som falder efter optionens udløbsdato.

De to optioner, som faktisk handles den 26. februar 1996, har henholdsvis det toneangivende 8% 2006 statslån og 7% 2004 statslånet som underliggende aktiver. Optionerne har udløb enten den 18. marts eller den 17. juni. For 8% 2006'eren skal man være opmærksom på, at den har termin den 15.03.1996. Der er altså en mellemliggende kupon, som vi ikke må glemme at »fjerne«. Hvad angår statens 7% 2004, falder den næste kupon den 15. december. Der er altså ingen mellemliggende kuponer.

Vi er nu klar til at se på nogle resultater. I tabel 3 har vi anført både den eksakte optionspræmie (C) og den approksimerede optionspræmie (C_{approx}) beregnet på

Tabel 3

Udløb	K	Vasicek C	Vasicek C approx	Vasicek %-afvigelse	Cox, Ingersoll & Ross C	Cox, Ingersoll & Ross C approx	Cox, Ingersoll & Ross %-afvigelse
8% 2006							
18.03.96			*P* = 102.6238*			*P* = 102.4479*	
	100	2.6463	2.6464	0.0045	2.5049	2.5052	0.0094
	101	1.7375	1.7376	0.0094	1.6341	1.6343	0.0144
	102	0.9795	0.9796	0.0097	0.9176	0.9177	0.0053
	103	0.4525	0.4524	(0.0203)	0.4198	0.4196	(0.0350)
	104	0.1645	0.1643	(0.1047)	0.1467	0.1465	(0.1938)
	105	0.0457	0.0455	(0.2946)	0.0364	0.0363	(0.5010)
	106	0.0095	0.0094	(0.6328)	0.0059	0.0058	(1.1762)
	107	0.0015	0.0014	(1.2938)	0.0006	0.0006	(1.6968)
17.06.96			*P* = 103.5439*			*P* = 103.4441*	
	100	3.7360	3.7369	0.0252	3.8023	3.8038	0.0382
	101	2.9274	2.9283	0.0313	3.0206	3.0218	0.0399
	102	2.2097	2.2104	0.0296	2.3160	2.3167	0.0321
	103	1.6000	1.6002	0.0169	1.7024	1.7025	0.0073
	104	1.1070	1.1068	(0.0165)	1.1902	1.1896	(0.0511)
	105	0.7294	0.7288	(0.0822)	0.7838	0.7827	(0.1470)
	106	0.4566	0.4557	(0.1922)	0.4806	0.4791	(0.3089)
	107	0.2709	0.2699	(0.3553)	0.2703	0.2688	(0.5665)
	108	0.1521	0.1512	(0.5799)	0.1368	0.1355	(0.9631)
	109	0.0808	0.0801	(0.8904)	0.0607	0.0598	(1.5756)
7% 2004							
18.03.96			*P* = 98.7861*			*P* = 98.7561*	
	93	5.7747	5.7747	0.0001	5.7436	5.7436	0.0001
	94	4.7769	4.7769	0.0004	4.7469	4.7469	0.0003
	95	3.7807	3.7808	0.0009	3.7552	3.7553	0.0022
	96	2.7964	2.7965	0.0036	2.7831	2.7833	0.0065
	97	1.8620	1.8621	0.0095	1.8693	1.8696	0.0127
	98	1.0613	1.0614	0.0138	1.0856	1.0857	0.0140
	99	0.4901	0.4901	(0.0067)	0.5130	0.5130	(0.0013)
	100	0.1747	0.1745	(0.0985)	0.1836	0.1833	(0.1342)
	101	0.0463	0.0461	(0.3243)	0.0458	0.0456	(0.4370)
	102	0.0089	0.0088	(0.6855)	0.0072	0.0071	(1.1971)
17.06.96			*P* = 99.6718*			*P* = 99.7164*	
	93	6.6148	6.6151	0.0051	6.6990	6.7000	0.0154
	94	5.6486	5.6492	0.0100	5.7582	5.7594	0.0224
	95	4.7078	4.7086	0.0170	4.8465	4.8479	0.0299
	96	3.8102	3.8112	0.0258	3.9769	3.9784	0.0381
	97	2.9785	2.9795	0.0336	3.1649	3.1663	0.0425
	98	2.2367	2.2375	0.0356	2.4277	2.4286	0.0368
	99	1.6054	1.6058	0.0223	1.7815	1.7818	0.0156
	100	1.0962	1.0960	(0.0140)	1.2391	1.2387	(0.0360)
	101	0.7093	0.7087	(0.0883)	0.8091	0.8080	(0.1317)
	102	0.4335	0.4326	(0.2101)	0.4888	0.4873	(0.2956)
	103	0.2496	0.2486	(0.4049)	0.2688	0.2672	(0.5761)

Note til figuren: For at se, hvornår optionen er *in-the-money* eller *out-of-the-money*, kan man sammenligne exercisekursen med den fremdiskonterede obligationspris til optionens udløbstidspunkt (P^*), hvilket svarer til at sammenligne obligationens værdi i dag med den tilbagediskonterede exercisekurs.

grundlag af henholdsvis Vasicek- og CIR-modellen. Den procentuelle afvigelse af C_{approx} fra »facit«, det vil sige C, er ligeledes anført. Som det ses af tabellen, er der tale om meget små afvigelser. Kun i enkelte tilfælde hvor optionen er *far-out-of-the-money*, sniger fejlen sig op over én procent. Der forekommer imidlertid et vist mønster i afvigelserne. Når optionen er *in-the-money* (se note til tabel 3), er den approksimerede optionspræmie systematisk større end den eksakte og omvendt, når optionen er *out-of-the-money*.

Systematikken i disse afvigelser skyldes først og fremmest, at der alene er approksimeret ud fra en matching af varigheden. Der blev ikke taget hensyn til højere ordens led, herunder konveksiteten. Med andre ord: Kupon-obligationens volatilitet blev matchet med nulkupon-obligationens volatilitet, men volatilitetens rentefølsomhed blev ikke matchet.

Det er muligt at matche både volatiliteten og dens rentefølsomhed ved at tage udgangspunkt i to nulkupon-obligationer med forskellig løbetid, men vi henviser blot interesserede til Wei (1995) for en nærmere diskussion af dette. Resultaterne ved kun at kigge på volatiliteten (varigheden) er så tilfredsstillende, at vi vil stoppe her og glæde os over den simple og præcise approksimation. Optionspræmiens følsomhed over for modelparametre, herunder *hedge ratio*'en, kan nemt approksimeres ud fra samme princip, og approksimationen er igen meget præcis.

Afslutning

I denne artikel har vi præsenteret et alternativ til de traditionelle varighedsmål, som obligationsanalysen betjener sig af. Den stokastiske varighed udmærker sig ved at være brugbar til konsistente sammenligninger af obligationers og obligationsporteføljers basisrisiko i en dynamisk verden. De traditionelle varighedsmål baseret på effektiv rente eller estimerede nulkuponrenter fejler på dette punkt, fordi de implicit forudsætter urealistiske rentestrukturskift over tiden.

Gennem en række eksempler har vi demonstreret, at obligationsanalytikeren kan få ganske forskellige opfattelser af risikogrupperingen af forskellige papirer, alt efter hvilket varighedsmål som anvendes. Vore eksempler illustrerede, at man ved ukritisk anvendelse af klassiske varighedsdefinitioner risikerer kraftigt at overvurdere risiko og kursfølsomhed for lange obligationer.

Ulempen ved den stokastiske varighed er, at definitionen er modelspecifik. Før man »kan få et tal ud«, skal der således vælges en model, som efterfølgende skal estimeres. Drømmen om stokastisk varighed som en oplysning i kurslisten er således formentlig næppe realiserbar.

I artiklens anden del anviste vi med udgangspunkt i den stokastiske varighed en simpel og anvendelig metode til beregning af priser for optioner skrevet på obligationer. Metoden er meget nøjagtig og minder i anvendelsen meget om en Black-Scholes beregning, jf. appendix. Derudover er metoden betydeligt bedre teoretisk funderet end andre udbredte varianter af Black-Scholes' formel.

Summary

This article has two points. The first concerns the applicability of the concept of duration to bond analysis. We advocate the use of stochastic

duration rather than the traditional definitions of duration. The second point concerns the pricing of options written on the coupon bonds. On the basis of the stochastic duration we suggest a simple and exact method of approximation of option premiums.

Appendix

I dette appendix anføres en række centrale relationer for obligations- samt optionsprisfastsættelsen inden for rammerne af Vasicek's rentestrukturmodel.

Nulkupon-pris:

Nulkupon-obligationspriserne er givet ved

$$P^{o}(r,t,s) = \exp\left\{\frac{1}{\kappa}(1-e^{-\kappa\tau})\,(\theta+\frac{\sigma\lambda}{\kappa}-\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}-r)-(\theta+\frac{\sigma\lambda}{\kappa}-\frac{\sigma^2}{2\kappa^2})\,\tau-\frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1-e^{-\kappa\tau})^2\right\}, \quad \text{(A1)}$$

hvor $\tau=s-t$.

Basisrisiko:

Risikofunktionen $f(\tau) = \dfrac{P^{o}{}_{,r}(r,t,s)}{P^{o}(r,t,s)} = y$ findes let ud fra (A1) som

$$f(\tau) = -\frac{1}{\kappa}(1-e^{-\kappa\tau}) = y\,, \quad \text{(A2)}$$

og dermed har vi

$$f^{-1}(y) = \tau = -\frac{\ln(\kappa y+1)}{\kappa}\,. \quad \text{(A3)}$$

Optionspræmie:

Jamshidian's formel for præmien for en option på en nulkupon-obligation er følgende:

$$C^{o}(r,t,T,s,K) = P^{o}(r,t,s)N(d_+) - KP^{o}(r,t,T)N(d_-), \quad \text{(A4)}$$

hvor

$$d_{\pm} = \frac{\ln\big(P(r,t,s)/(P(r,t,T)K)\big)}{(\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa(s-t)}))^{\frac{1}{2}}(1-e^{-\kappa(s-T)})/\kappa} \pm \frac{1}{2}(\tfrac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa(s-t)}))^{\frac{1}{2}}(1-e^{-\kappa(s-T)})/\kappa\,. \quad \text{(A5)}$$

$N(\cdot)$ betegner den kumulerede normalfordelingsfunktion.

Noter

1. Basisrisiko *er rentestrukturlitteraturens betegnelse for en obligations relative prisændring som følge af ikke-forventede ændringer i rentestrukturen. På terminsmarkederne benyttes samme betegnelse til beskrivelse af forskelle mellem spot- og futureskurser, men der er ingen sammenhæng i øvrigt.*
2. *Det kan diskuteres, om betegnelsen* stokastisk varighed *er velvalgt. Betegnelsen må ikke forstås derhen, at varigheden går hen og bliver en umålelig og diffus størrelse. Den stokastiske varighed er nemlig* ikke *stokastisk på målingstidspunktet/tidspunkt nul. Men de fremtidige varigheder bliver stokastiske som følge af specifikationen af en stokastisk rentestrukturmodel. Således opfyldes nemlig ønsket om at få tilført varighedsdefinitionen et* dynamisk element. *Man kunne derfor alternativt bruge betegnelsen* dynamisk varighed. *Denne er imidlertid også uheldig, dels selvfølgelig fordi CIR nu en gang* har *valgt en anden betegnelse, og dels fordi mindst én anden forfatter allerede* har *taget patent på betegnelsen »dynamic duration« i beslægtet sammenhæng (se Christensen (1996)).*
3. *Det er ikke disse stærkt forenklende antagelser, som leder til de senere opnåede resultater. Vi kunne f.eks. lige så godt specificere en mere bredt favnende multi-faktor model eller en forwardrente-baseret model à la Heath, Jarrow & Morton (1992). Men forenklingen hér er naturligvis foretaget for at fremhæve den egentlige pointe. For yderligere analyse af stokastisk varighed i Heath, Jarrow & Morton-modellen henvises til Au & Thurston (1995).*
4. *Markedsprisen på risiko er givet ved*

$$\lambda(r,t) = \frac{m(r,t) - r(t)}{-\sigma(r)\frac{P_r(r,t)}{P(r,t)}}$$

   – et forhold, der skal være ens for alle handlede obligationer.

5. *Detaljerne kan rekvireres ved henvendelse til forfatterne.*
6. *Se f.eks. Christensen (1995) for en glimrende beskrivelse af de forskellige statiske varighedsdefinitioner. Jensen (1996, kap. 13) indeholder en alternativ og mere matematisk detaljeret gennemgang.*
7. *Vi har ingen viden om, hvornår de enkelte obligationer er handlet i løbet af dagen – en mulig fejlkilde.*
8. $SSE_{Vasicek}$=*2.84 og* SSE_{CIR}=*3.37 (SSE* = Sum of Squared Error*). Den sædvanlige* χ^2 *-teststørrelse for* Goodness-of-fit *udregnes til henholdsvis* $\chi^2_{Vasicek}$ = *0.027 og* χ^2_{CIR} = *0.035. Ingen af modellerne forkastes ved normalt anvendte signifikansniveauer. Testet skal dog tages med stort forbehold. En stor del af* SSE_{CIR} *hidrører i øvrigt fra en relativt stor fejlprisfastsættelse af den lange 7% 2024 obligation. CIR-modellens »fit« er bedre end Vasicek-modellens, hvis denne obligation udelades.*
9. *Det bemærkes, at en parallelforskydning af strukturen af kontinuert beregnede nulkupon-renter (additivitet) er ækvivalent med proportional ændring af de diskret beregnede nulkupon-renter (multiplikativitet).*
10. *Helt præcist gælder, at det underliggende aktiv er ejendomsretten til de kuponbetalinger, som ligger senere end optionens udløbsdato, T. I det følgende antages for overskuelighedens skyld, at alle kuponbetalinger ligger senere end tidspunkt T. Dermed er det også uproblematisk at anvende put-call pariteten til udledning af de europæiske put optionspræmier.*

Litteratur

Au, K.T. & D.C. Thurston: A New Class of Duration Measures, *Economics Letters*, 47, pp. 371-375, 1995.

Cox, J., J. Ingersoll & S. Ross: Duration and the Measurement of Basis Risk, *Journal of Business*, Vol. 52, No. 1, pp. 51-61, 1979.

Cox, J., J. Ingersoll & S. Ross: A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, March, pp. 385-407, 1985.

Christensen, M.: *Obligationsinvestering*, Jurist- og Økonomforbundets Forlag, 1995.

Christensen, M.: Dynamic Duration – One Further Duration Measure, i Y. Desportes (ed), *Research Papers in Finance*, Editions ESKA, Paris, 1996.

Gibbons, M.R. & K. Ramaswamy: A Test of the Cox, Ingersoll, & Ross Model of the Term Structure, *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 3, 1993.

Ingersoll, J., J. Skelton & R. Weil: Duration Forty Years Later, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, No. 4, pp. 627-650, 1978.

Jamshidian, F.: An Exact Bond Option Formula, *Journal of Finance*, Vol. XLIV, No. 1, March, pp. 205-209, 1989.

Jensen, B.A.: *Rentesregning*, Jurist- og Økonomforbundets Forlag, 1996.

Jørgensen, P.L. & M.B. Hansen: Den korte renteproces, rentestrukturmodellering og optionsprisfastsættelse, *finans/invest*, nr. 3, pp. 23-27, 1995.

Longstaff, F.: The Valuation of Options on Coupon Bonds, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 17, pp. 27-42, 1993.

Miltersen, K.: Afledte aktiver skrevet på rentestrukturen, *Ledelse & Erhvervsøkonomi*, nr. 1, pp. 35-44, 1993.

Sørensen, C.: Prisfastsættelse af optioner på 8% St. lån 2003: Kan Black-Scholes formel anvendes?, *Working Paper*, Handelshøjskolen i København, 1994.

Vasicek, O.:, An Equilibrium Characterization of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177-188, 1977.

Wei, J.:, A Simple Approach to Bond Option Pricing, *Working Paper*, University of Saskatchewan, 1995.

duration rather than the traditional definitions of duration. The second point concerns the pricing of options written on the coupon bonds. On the basis of the stochastic duration we suggest a simple and exact method of approximation of option premiums.

Appendix

I dette appendix anføres en række centrale relationer for obligations- samt optionsprisfastsættelsen inden for rammerne af Vasicek's rentestrukturmodel.

Nulkupon-pris:

Nulkupon-obligationspriserne er givet ved

$$P^o(r,t,s) = \exp\left\{\frac{1}{\kappa}(1-e^{-\kappa\tau})\left(\theta+\frac{\sigma\lambda}{\kappa}-\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}-r\right)-\left(\theta+\frac{\sigma\lambda}{\kappa}-\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right)\tau-\frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1-e^{-\kappa\tau})^2\right\}, \quad \text{(A1)}$$

hvor $\tau=s-t$.

Basisrisiko:

Risikofunktionen $f(\tau) = \dfrac{P^o{}_r(r,t,s)}{P^o(r,t,s)} = y$ findes let ud fra (A1) som

$$f(\tau) = -\frac{1}{\kappa}(1-e^{-\kappa\tau}) = y\,, \quad \text{(A2)}$$

og dermed har vi

$$f^{-1}(y) = \tau = -\frac{\ln(\kappa y+1)}{\kappa}\,. \quad \text{(A3)}$$

Optionspræmie:

Jamshidian's formel for præmien for en option på en nulkupon-obligation er følgende:

$$C^o(r,t,T,s,K) = P^o(r,t,s)N(d_+) - KP^o(r,t,T)N(d_-), \quad \text{(A4)}$$

hvor

$$d_\pm = \frac{\ln\big(P(r,t,s)\,/\,(P(r,t,T)K)\big)}{\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa(s-t)})\right)^{\frac{1}{2}}(1-e^{-\kappa(s-T)})\,/\,\kappa} \pm \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa(s-t)})\right)^{\frac{1}{2}}(1-e^{-\kappa(s-T)})\,/\,\kappa\,. \quad \text{(A5)}$$

$N(\cdot)$ betegner den kumulerede normalfordelingsfunktion.