Afledte aktiver skrevet på rentestrukturen

Den model, der med succes anvendes til prisfastsættelse af optioner på aktier, kan ikke anvendes til prisfastsættelse af optioner på obligationer.

Af Kristian R. Miltersen

Resumé

Denne artikel tager sit udgangspunkt i Black-Scholes modellen til prisfastsættelse af optioner på aktier. Artiklen argumenterer udfra en række interne konsistenskrav for, hvorfor det ikke, trods en række succesfulde generalisationer af Black-Scholes modellen, er muligt at anvende denne model til prisfastsættelse af optioner på obligationer. Som alternativ præsenteres en anden model, Heath-Jarrow-Morton modellen, der opfylder de interne konsistenskrav, der fældede Black-Scholes modellen. Artiklen opsummerer ideer og resultater fra min licentiatafhandling: "A Model of the Term Structure of Interest Rates".

Indledning

Interessen for prisfastsættelse af afledte aktiver skrevet på rentestrukturen, herunder call- og put-optioner skrevet på kuponobligationer, er vokset markant i de senere år. Specielt i Danmark har der været efterspørgsel efter sådanne modeller siden oprettelsen af Garantifonden for Danske Optioner og Futures d. 2. juli 1987. Garantifondens oprettelse muliggjorde en standardisering af kontrakterne dels m.h.t. kontraktvariable og dels m.h.t. juridiske forhold i forbindelse med afregningen. Denne standardisering er en forudsætning for at få et likvidt marked, og den banede derved vejen til en of-

Afledte aktiver skrevet på rentestrukturen

Den model, der med succes anvendes til prisfastsættelse af optioner på aktier, kan ikke anvendes til prisfastsættelse af optioner på obligationer.

Af Kristian R. Miltersen

Resumé

Denne artikel tager sit udgangspunkt i Black-Scholes modellen til prisfastsættelse af optioner på aktier. Artiklen argumenterer udfra en række interne konsistenskrav for, hvorfor det ikke, trods en række succesfulde generalisationer af Black-Scholes modellen, er muligt at anvende denne model til prisfastsættelse af optioner på obligationer. Som alternativ præsenteres en anden model, Heath-Jarrow-Morton modellen, der opfylder de interne konsistenskrav, der fældede Black-Scholes modellen. Artiklen opsummerer ideer og resultater fra min licentiatafhandling: "A Model of the Term Structure of Interest Rates".

Indledning

Interessen for prisfastsættelse af afledte aktiver skrevet på rentestrukturen, herunder call- og put-optioner skrevet på kuponobligationer, er vokset markant i de senere år. Specielt i Danmark har der været efterspørgsel efter sådanne modeller siden oprettelsen af Garantifonden for Danske Optioner og Futures d. 2. juli 1987. Garantifondens oprettelse muliggjorde en standardisering af kontrakterne dels m.h.t. kontraktvariable og dels m.h.t. juridiske forhold i forbindelse med afregningen. Denne standardisering er en forudsætning for at få et likvidt marked, og den banede derved vejen til en officiel notering af optioner og futures på Københavns Fondsbørs fra d. 22. sep. 1988. Man valgte at lægge ud med at notere optioner og futures med den dengang toneangivende obligation 9% 2006 realkreditobligationen[1] som underliggende aktiv. Valget af netop dette underliggende aktiv skyldes hensynet til likviditeten og volumenet af det underliggende aktiv, som optioner og futures blev skrevet på. Som bekendt er det danske obligationsmarked relativt stort, hvorimod det danske aktiemarked er relativt lille, så det var ikke tilfældigt, at det blev en obligation, som blev det første underliggende aktiv for de standardiserede options- og futureskontrakter. Senere er flere underliggende aktiver kommet til: 9% 2000 statsobligationen, et såkaldt FUTOP-obligationsindeks[2], et statsobligationsindeks, KFX-indekset for danske aktier og nu også enkeltaktier. Det er denne udvikling, der har dannet grundlag for efterspørgslen efter teoretiske prisfastsættelsesmodeller til prisfastsættelse af afledte aktiver generelt.

Hvad angår prisfastsættelsesmodeller, hvor det underliggende aktiv er enkeltaktier og indeks af aktier - og valuta for den sags skyld - har der eksisteret bemærkelsesværdigt gode og robuste teoretisk udledte formler og metoder til prisfastsættelse af afledte aktier i en årrække, startende med Black-Scholes formel fra først i 70'erne, jf. Black & Scholes (1973). Trods mange forsøg er det ikke rigtigt lykkedes at overføre Black-Scholes resultatet til modeller med obligationer som underliggende aktiv. Kort fortalt er de fundamentale forskelle for store mellem aktier og obligationer til, at resultaterne kan overføres. I de senere år er man så gået andre veje, idet man har indset, at det er nødvendigt at inkorporere hele rentestrukturen for at opnå intern konsistens i modellen. Den første af den slags modeller er Ho-Lee modellen fra midt i 80'erne, jf. Ho & Lee (1986). Senere er en tilsvarende model udarbejdet i kontinuert tid, i lighed med Black-Scholes modellen, i Heath, Jarrow & Morton (1992). At hele rentestrukturen nødvendigvis inkorporeres i modellen, komplicerer selvsagt udregningerne, således at man ikke længere, i modsætning til i Black-Scholes tilfældet, kan komme frem til et lukket formeludtryk. I stedet må man ty til forskellige numeriske løsningsmetoder.

I denne artikel vil vi først kort se på Black-Scholes tilfældet i afsnit 2, hvorefter vi i afsnit 3 redegør for de fundamentale forskelle, der gør, at Black-Scholes resultatet ikke kan bruges til at prisfastsætte afledte aktiver skrevet på obligationer på en konsistent måde, endelig præsenteres kort en model, som på konsistent vis prisfastsætter afledte aktiver skrevet på obligationer i afsnit 4 og denne sammenlignes med Black-Scholes modellen.

Black-Scholes modellen

Den økonomiske model, hvori Black-Scholes prisfastsættelsesresultatet er udledt, bygger på flg. grundantagelser:

1. Det underliggende aktiv er en ikke-udbytte-

[1] *Helt konkret var der tale om et vægtet gennemsnit af Danmarks Kreditforening, Nykredit og BRF's udgaver af denne obligation.*

[2] *Dette indeks er ikke længere i brug.*

betalende aktie, hvis prisudvikling følger en log-normalfordeling. S_t betegner aktieprisen til tid t.

2. Alternativet til at investere i det underliggende aktiv er at sætte pengene i banken subsidiært låne penge i banken til en rentestyrke på r, som er gældende i hele optionens løbetid. Rentestyrken, r, gælder ikke kun for indskud/lån over hele perioden men også for indskud i vilkårlige delperioder indtil optionens udløb. Desuden er det den samme rente, der afregnes efter, *både* for indskud og lån. Renten beregnes kontinuert.

3. Der er kontinuert handel i hele optionens løbetid, hvilket vil sige, at investorerne har mulighed for at omlægge deres porteføljer på alle mulige tidspunkter.

4. Der er ingen kort-salgs-restriktioner på det underliggende aktiv. Investorerne kan altså have negative positioner af aktien i deres portefølje.

5. Der er ingen transaktionsomkostninger - hverken ved handel eller ved at gå i korte positioner.

Grundantagelse 1. samt antagelse 3. om kontinuert handel fører til, at aktieprisen, S_t, kan beskrives som en løsning til den såkaldte stokastiske differentialligning

(1) $$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t,$$

hvor μ og σ er konstanter, og W_t er en såkaldt Wiener-proces eller en Brownsk bevægelse. Ligning (1) beskriver blot formelt aktiens drift og volatilitet. Man kan fortolke ligning (1) som, at ændringen i aktieprisen, dS_t, over en ultra kort tidsperiode, dt, dels består af et deterministisk led, $S_t \mu dt$, der angiver trenden, samt et stokastisk led, $S_t \sigma dW_t$, der angiver tilfældige udsving fra trenden. Det stokastiske element kommer ind i modellen gennem Wiener-processen, W_t, der for et givet t er en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi nul og varians t. En konsekvens heraf er, at afkaststyrken[3] af det underliggende aktiv er normalfordelt

$$\log (S_t/S_0) \approx N(\mu t - (\sigma^2 t/2), \sigma^2 t),$$

hvorfor σ kan fortolkes som spredningen på afkaststyrken af det underliggende aktiv over en tidsperiode med længde én. Log-normalfordelingsantagelsen, i form af ligning (1) implicerer flg. egenskaber for aktieprisudviklingen:

1. Prisen kan ikke blive negativ, og skulle den gå hen og blive nul, vil den forblive nul i al tid fremover. Dette er i overensstemmelse med en antagelse om begrænset hæftelse på aktien.

2. Uanset prisniveauet er der lige stor sandsynlighed for en procentvis stigning i prisen af en given størrelse og tilsvarende lige stor sandsynlighed for et procentvis fald af en given størrelse. Dette er i overensstemmelse med en antagelse om fuldt fleksible priser,

[3] *Afkaststyrken over tidsperioden t_1-t_2 beregnes som* $\log(S_{t_1}/S_{t_2})$.

og at al relevant information øjeblikkeligt indarbejdes i priserne.

Vi ønsker at prisfastsætte en europæisk call-option på tidspunkt 0. Call-optionen er karakteriseret ved en aftalekurs, K, og et udløbstidspunkt, t_0. Som bekendt giver en europæisk call-option ret til at købe det underliggende aktiv på udløbstidspunktet mod at betale aftalekursen - men man er som køber ikke forpligtet til at indgå handlen. På udløbstidspunktet må optionens pay-off, og dermed dens pris, derfor være

$$C_{t_0} = \max\{0, S_{t_0} - K\}.$$

Med de opstillede forudsætninger viser det sig, at man, ved kontinuerligt at omlægge en portefølje udelukkende indeholdende det underliggende aktiv og lån i banken, kan kopiere pay-off'et på call-optionen fuldstændigt. Optionen er altså et såkaldt redundant (overflødigt) aktiv.

Antages nu yderligere, at der ikke eksisterer arbitrage-muligheder[4] i modellen, kan prisen på call-optionen på tidspunkt 0 bestemmes som startværdien af den portefølje, der ved kontinuerlig omlægning kopierer optionens pay-off. (Idet vi husker forudsætning 5. om ingen transaktionsomkostninger.) Optionen prisfastsættes til

$$C_0 = S_0 N(d) - e^{rt_0} K N(d - \sigma\sqrt{t_0}),$$

hvor

$$d = (\log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t_0)/(\sigma\sqrt{t_0})$$

hvilket er den omtalte Black-Scholes prisfastsættelsesformel. Det bemærkes, at drifts-parameteren, μ, fra prisudviklingsligningen (1) ikke optræder i prisudtrykket (2), idet den nuværende pris på det underliggende aktiv, S_0, og spredningen på afkaststyrken på det underliggende aktiv er tilstrækkelig information til at kunne prisfastsætte optionen. For en mere detaljeret gennemgang, inklusiv en gennemgang af den tilsvarende diskret-tids model i form af den såkaldte binomialmodel, jf. Christensen & Klausby (1988).

På trods af de restriktive modelforudsætninger 1.-5. for udledningen af Black-Scholes modellen viser det sig, at selve resultatet er temmeligt stabilt, selvom antagelserne slækkes på flg. punkter:

1. Ved at udskifte S_0 med

   $$S_0 - PV\text{(udbyttebetalinger inden } t_0)$$

   kan Black-Scholes formlen korrigeres for udbyttebetalinger i optionens løbetid[5]. Udbytter ud over optionens løbetid giver ingen ændringer i formlen.

2. Black-Scholes formlen kan også bruges til valuta-optioner, idet renten i den udenlandske valuta opfattes som udbytte på det underliggende aktiv. Det er den såkaldte Garman-Kohlhagen formel, jf. Garman & Kohlhagen (1983).

[4] *Ved en arbitrage-mulighed forstås en portefølje sammensat således, at den giver et positivt pay-off i dag, samtidig med at der ikke er nogen fremtidige forpligtigelser - altså udelukkende ikke-negative pay-off i fremtiden.*
[5] *Hvor PV(·) angiver nutidsværdien.*

3. σ og r behøver ikke være konstanter.

a) Hvis de stadig er deterministiske, altså kendte på tidspunkt 0, udskiftes de blot med deres aritmetiske tidsgennemsnit.

b) Hvis de tillades at være stokastiske, ændres formlen, idet deres sam-variation med det underliggende aktiv kommer til at spille ind på resultatet. For stokastisk rente jf. f.eks. Merton (1973), og for stokastisk σ jf. f.eks. Cox & Ross (1976) og Hull & White (1987). I det sidste tilfælde opnås ikke et lukket formeludtryk.

4. Andre fordelingsantagelser på underliggende aktiv, herunder mulighed for ikke-kontinuerte hop i kursudviklingen, vil selv sagt give et ændret formeludtryk, men de væsentlige dele i udledningen er de samme.

Generelt kan man sætte spørgsmålstegn ved antagelsen om den log-normalfordelte prisudvikling. I den forbindelse er der to kategorier af argumenter imod antagelsen:

1. Antagelsen er modelteknisk inkonsistent. Dette er ikke tilfældet for Black-Scholes modellen anvendt på aktier eller valuta. Hvorimod det vil være tilfældet, hvis Black-Scholes modellen skulle anvendes til prisfastsættelse af optioner på obligationer. Vi vil komme nærmere ind på årsagen til dette i afsnit 3.

2. Forskellige empiriske undersøgelser har sandsynliggjort, at antagelsen om den log-normalfordelte prisudvikling ikke er i overensstemmelse med, hvad der kan observeres på de finansielle markeder.

Det er min (subjektive) opfattelse at indvending 1. er væsentligt mere substantiel end indvending 2.

De fundamentale forskelle mellem aktier og obligationer

Årsagen, til at Black-Scholes modellen ikke umiddelbart kan transformeres over til en teori for obligationer, skyldes mest af alt flg. fundamentale forskelle mellem aktier og obligationer:

a) Obligationer har et fast udløbstidspunkt - som ydermere normalt er kendt på tidspunkt 0.

b) Pay-off på en obligation er deterministiske og ligeledes kendt på tidspunkt 0.

c) Antages ikke-negative forward-renter, er prisen på en obligation opadtil begrænset af summen af de ikke-tilbage-diskonterede fremtidige pay-off fra obligationen. P.g.a. begrænset hæftelse er prisen på en obligation ligeledes nedadtil begrænset af 0.

d) Volatiliteten af obligationsprisen må forventes at være tidsafhængig såvel som prisniveauafhængig. Tidsafhængigheden er en naturlig konsekvens af, at volatiliteten må konvergere mod nul henimod udløbstidspunktet. Desuden må volatiliteten nærme sig nul, når obligationens pris nærmer sig sine nedre og øvre grænser.

e) Man kan forsvare at antage, at forskellige aktiers prisudvikling har et rimeligt element af uafhængighed, således at det ikke vil forbedre mulighederne for at kopiere optionsprisudviklingen ved også at modellere beslægtede aktier. Derimod er obligationer med forskellig løbetid nære substitutter, således at man må forvente, at obligationspriserne er kraftigt relaterede. Relationen hedder rentestrukturen.

Prisrelationerne mellem de enkelte obligationer er bestemt således, at der ikke eksisterer arbitrage-muligheder ved sammensætning af obligations-porteføljer, hvilket er ækvivalent med eksistensen af ikke-negative forward-renter.

Mange metoder har været taget i anvendelse i forsøget på at formulere en intern konsistent model for prisudviklingen af obligationer byggende på punkterne (a)-(e). En sådan model vil kunne danne basis for en teori til prisfastsættelse af afledte aktiver på obligationer. Og det er netop en sådan model, vi skal se nærmere på i afsnit 4.

Heath-Jarrow-Morton modellen

Som vi så i punkt (e) i afsnit 3, må vi nødvendigvis modellere hele rentestrukturen. Det kan gøres på tre ækvivalente måder:

1. Vi kan modellere prisudviklingen på samtlige nul-kupon-obligationer, dvs. $P(t, T)$, som udtrykker prisen på tidspunkt t på et aktiv, der med sikkerhed udbetaler én krone på tidspunkt T. Det er nu klart, at enhver obligation[6] kan dannes som en portefølje af disse nul-kupon-obligationer.

2. Vi kan modellere udviklingen i de effektive renter på samtlige nul-kupon-obligationer, $y(t,T)$, som udtrykker den effektive rente til tid t på nul-kupon-obligationen, der udløber på tidspunkt T. Som det ses af flg., er de to beskrivelser ækvivalente

$$P(t,T) = e^{-y(t,T)(T-t)}.$$

3. Endelig kan vi modellere udviklingen i forward-renten, $X(t,s)$, der beskriver forward-renten til tid s observeret på tid t. Hvilket også er ækvivalent med de to første beskrivelser

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T X(t,s)ds}.$$

Det viser sig, at det rent modelteknisk er nemmest at få inkorporeret alle arbitrage-mulighederne, hvis vi benytter forward-renten som basal model-byggesten. Derfor vil vi, i lighed med ligning (1), modellere forward-renten ved hjælp af en stokastisk differentialligning

$$(3) \qquad \begin{aligned} d_t X_{(t,s)} = f(s) + \sigma(t, s, X_{(t,s)}) \cdot dW_t \\ + \mu(t, s, X_{(t,\cdot)})dt, \end{aligned}$$

hvilket er den såkaldte Heath-Jarrow-Morton model. Der knytter sig nogle bemærkninger til ligning (3):

[6] *Herved forstås standardobligationer uden risiko for at den udstedende institution går fallit. Desuden ses bort fra konverterbarhed og konvertibilitet.*

1. $f(s)$ beskriver forward-renten, som den kan observeres på tidspunkt 0. (Observeres er måske så meget sagt, men med de rette økonometriske værktøjer kan den estimeres.)

2. Bemærk at den konstante σ-faktor fra ligning (1) er skiftet ud med en σ-funktion, der både er afhængig af begge tidsparametre og af den nuværende forward-rente. For at opnå en modelspecifikation, der både kan undgå alle arbitrage-muligheder mellem alle obligationerne med forskellig løbetid samt indskud/lån i banken og ligeledes undgå negative forward-renter, er det nødvendigt at tillade en så generel σ-funktion. Vi vil ikke her komme yderligere ind på, hvordan σ-funktionen skal specificeres for at opfylde alle de specificerede krav. Dog skal det nævnes, at der findes et sæt af tilstrækkelige betingelser, som på en gang sikrer, at de ovenfor nævnte krav opfyldes.

3. Den konstante μ-faktor fra ligning (1) er skiftet ud med en μ-funktion, der både er afhængig af begge tidsparametre og af hele den nuværende forward-rentefunktion.

4. Den konstante rente, r, fra Black-Scholes modellen er inkonsistent med en stokastisk forward-rentemodel. I vores nuværende model må vi altså også have en stokastisk beskrivelse af spot-renten, der erstatter r. Denne beskrivelse er faktisk allerede indeholdt i ligning (3), idet vi vil opfatte $X_{(t,t)}$ som spotrenten.

For at forstå ligning (3) bedre vil vi sammenligne den med den tilsvarende Black-Scholes ligning (1). Den stokastiske differentialligning (1) beskriver den stokastiske prisudvikling på det underliggende aktiv i form af S_t. På tidspunkt 0 er S_t, en stokastisk variabel for alle $t > 0$, og efterhånden som tiden går, afsløres stokastikken løbende i form af, at mere og mere af aktieprisprocessen bliver kendt. F.eks. på tidspunkt t_1 vil S_t være kendt, for $t \leq t_1$, mens S_t stadig vil være stokastisk, for $t > t_1$. Helt tilsvarende beskriver $X_{(t,s)}$ den stokastiske udvikling af forward-renten, og dermed også priserne på alle nul-kupon-obligationerne. På tidspunkt 0 er $X_{(0,s)} = f(s)$ kendt, mens de fremtidige forward-rentefunktioner i form af $s \rightarrow X_{(t,s)}$, stadig er stokastiske, for alle $t > 0$. Tager vi nu igen tidspunkt t_1, så vil alle forward-rentefunktionerne $s \rightarrow X_{(t,s)}$ for alle $t \leq t_1$, nu være kendte, mens forward-rentefunktionerne, for $t > t_1$, stadig vil være stokastiske.

Og hvordan prisfastsættes afledte aktiver så i modellen? Helt tilsvarende til Black-Scholes tilfældet viser det sig, at pay-off på de afledte aktiver i princippet kan kopieres ved en kontinuerlig omlægning af en portefølje af forskellige obligationer og indskud/lån til spot-renten, $X_{(t,t)}$. Grundet de uendeligt mange obligationspriser, vi har modelleret[7], er det desværre kun lykkedes at udtale sig om eksistensen af en sådan kopierende portefølje, hvorimod det ikke er lykkedes at finde den. Derfor kan man nu finde en numerisk metode til prisfastsættelse af afledte aktiver på rentestrukturen i mod-

[7] *Vi har modelleret prisprocessen for nul-kupon-obligationer med alle tænkelige udløbstidspunkter, $T \in [0,\Gamma]$, hvor Γ er en fast tidshorisont for modellen. Vi kan kalde Γ for verdens ende, eller blot udløbstidspunktet for den længstløbende obligation i modellen.*

sætning til Black-Scholes modellen, hvor man fandt frem til et lukket formeludtryk. Det vil være for pladskrævende at komme yderligere ind på denne numeriske metode i denne artikel. I korte træk går metoden ud på, at man ved hjælp af en computer og en random number generator numerisk genererer en masse løsninger til den stokastiske differentialligning (3) og derefter prisfastsætter optionen numerisk ved en form for gennemsnitsberegning. I stedet vil vi lige sammenligne "inputs" for de to modeller. Black-Scholes modellen kræver den nuværende pris på det underliggende aktiv, S_0, spredningen på afkaststyrken på det underliggende aktiv, σ, og spot-renten, r. Helt analogt er 'inputs' til Heath-Jarrow-Morton modellen den nuværende forward-rentefunktion, $f(s)$, der jo er ækvivalent med de nuværende priser på alle nul-kupon-oblitationerne og som desuden indeholder den nuværende spot-rente i form af $f(0)$, samt volatilitetsfunktionen, σ. Driftsfunktionen, μ, kommer derimod ikke til at optræde i den numeriske procedure - igen helt analogt til at Black-Scholes formel ikke afhænger af μ.

Endelig vil vi knytte en kort bemærkning til den modelkritik, som også er nævnt sidst i afsnit 2: Den her opstillede model for udviklingen af de fremtidige obligationspriser er internt konsistent modelleret forstået på den måde, at de fremtidige prisudviklinger ikke giver anledning til arbitrage-muligheder og ikke giver negative forward-renter. Dvs. at modellen ikke strider imod indvending 1. Hvorvidt de fordelingsantagelser, som den stokastiske differentialligning (3) implicerer, er i overensstemmelse med, hvad der kan observeres på det finansielle marked, kan kun fremtidige økonometriske arbejder afgøre. Det er således et åbent spørgsmål, om den her præsenterede model strider imod indvending 2.

Summary

The basis of this article is the Black-Scholes model for price fixing of share options. Based on a number of internal consistency demands, the article argues against the applicability of the Black-Scholes model for price fixing of bond options, in spite of the series of successful generalisations of this model. As an alternative, another model is presented, the Heath-Jarrow-Morton model, which fulfils the internal consistency demands that rejected the Black-Scholes model. The article summarises ideas and conclusions of the author's doctoral thesis: A Model of the Term Structure of Interest Rates.

Litteratur

Black, F. and M. Scholes: »The Pricing of Options and Corporate Liabilities«, *Journal of Political Economy*, 81(3):637-654, 1973.

Christensen, P.O. og J. Klausby: »Prisfastsættelse af optioner og futures«, *Ledelse & Erhvervsøkonomi*, (3):105-130, 1988.

Cox, J.C. and S.A. Ross: »The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes«, *Journal of Financial Economics*, 3:145-166, 1976.

Garman, M.B. and S.W. Kohlhagen: »Foreign Currency Option Values«, *Journal of International Money and Finance*, 2:231-237, 1983.

Heath, D., R. Jarrow, and A.J. Morton: »Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation«, *Econometrica*, 60(1):77-105, 1992.

Ho, T.S.Y. and S.-B. Lee: »Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims«, *The Journal of Finance*, XLI(5), 1986.

Hull, J. and A. White: »The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility«, *The Journal of Finance*, XLII(2): 281-300, 1987.

Jensen, B.A. and J.A. Nielsen: *»Optioner og deres prisdannelse«*, Jurist- og Økonomforbundets Forlag, Charlottenlund, Danmark, 1989.

Merton, R.C.: »Theory of Rational Option Pricing«, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141-183, 1973. Reprinted in Merton (1990, Chapter 8).

Merton, R.C.: *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell Inc., Padstow, Great Britain, 1990.

Miltersen, K.R.: *A Model of the Term Structure of Interest Rates*, Ph.D. dissertation, Department of Management, Odense Universitet, 1992.