PRISFASTSÆTTELSE AF OPTIONER OG FUTURES

Peter Ove Christensen og Jes Klausby

Resume.

I denne artikel beskrives de grundlæggende principper for de modeller, der sædvanligvis benyttes til prisfastsættelse af optioner og futures. Det gennemgås, hvordan man prisfastsætter optioner og futures generelt men også, hvordan man med udgangspunkt i en velkendt optionsmodel kan finde teoretiske priser på optioner med danske realkreditobligationer som underliggende aktiv.

Ud fra en simpel og generelt accepteret økonomisk antagelse vises det, at der må være en snæver sammenhæng mellem på den ene side priserne på optioner og futures og på den anden side priserne på de underliggende aktiver. Det er denne sammenhæng, der beskrives og analyseres, først generelt og dernæst mere konkret for optioner og futures på obligationer.

Den grundlæggende økonomiske antagelse er, at priserne er bestemt på en sådan måde, at der ikke er arbitragemuligheder. En arbitragemulighed er til stede, hvis det er muligt at gennemføre en investeringsstrategi, der giver investoren en indbetaling ved starten af investeringen samtidig med, at investeringen aldrig vil give anledning til udbetalinger.

I afsnit 2 udnyttes antagelsen om, at arbitragegevinster er udelukket, til at opstille grænser indenfor hvilke prisen på europæiske optioner skal ligge. Grænserne giver anledning til, at man kan indkredse de faktorer, der er bestemmende for prisen på en option, samt hvordan optionsprisen afhænger af disse. Der udledes desuden en sammenhæng mellem prisen på call optioner, put optioner og deres underliggende aktiv (put-call pariteten). Denne sammenhæng benyttes til at bestemme aftalekursen på en future.

Til at vise disse sammenhænge udnyttes, at en europæisk call option giver anledning til nøjagtig samme fremtidige betalinger som en investering i det underliggende aktiv gearet med et stående lån, for hvilket det underliggende aktiv er stillet som eneste sikkerhed. Præmien, der må betales for kreditrisikoen på lånet, vises at være lig med prisen på en put option, da udstederen af lånet kan afdække kreditrisikoen fuldstændigt ved at købe en put option. Megen intuition for prisfastsættelsen af optioner og anvendelsen af disse opnås, hvis man på denne måde betragter en put option som en forsikring og en call option som en gearet investering i det underliggende aktiv med en vis forsikring mod nedadgående tab. En future kan betragtes som en gearet investering i det underliggende aktiv uden nogen form for forsikring.

Analysen i afsnit 2 udnytter, at arbitragegevinster er udelukket ved køb- og beholdstrategier. I afsnit 3 antages det, at arbitragegevinster ikke er mulige ved dynamiske investeringsstrategier. En dynamisk investeringsstrategi adskiller sig fra køb- og beholdstrategier ved, at en portefølje af værdipapirer kan justeres løbende på baggrund af udviklingen i prisen på det underliggende aktiv. Det bliver derved muligt at bestemme eksplicitte udtryk for prisen på en option (Binomialformlen og Black-Scholes formlen).

PRISFASTSÆTTELSE AF OPTIONER OG FUTURES

Peter Ove Christensen og Jes Klausby

Resume.

I denne artikel beskrives de grundlæggende principper for de modeller, der sædvanligvis benyttes til prisfastsættelse af optioner og futures. Det gennemgås, hvordan man prisfastsætter optioner og futures generelt men også, hvordan man med udgangspunkt i en velkendt optionsmodel kan finde teoretiske priser på optioner med danske realkreditobligationer som underliggende aktiv.

Ud fra en simpel og generelt accepteret økonomisk antagelse vises det, at der må være en snæver sammenhæng mellem på den ene side priserne på optioner og futures og på den anden side priserne på de underliggende aktiver. Det er denne sammenhæng, der beskrives og analyseres, først generelt og dernæst mere konkret for optioner og futures på obligationer.

Den grundlæggende økonomiske antagelse er, at priserne er bestemt på en sådan måde, at der ikke er arbitragemuligheder. En arbitragemulighed er til stede, hvis det er muligt at gennemføre en investeringsstrategi, der giver investoren en indbetaling ved starten af investeringen samtidig med, at investeringen aldrig vil give anledning til udbetalinger.

I afsnit 2 udnyttes antagelsen om, at arbitragegevinster er udelukket, til at opstille grænser indenfor hvilke prisen på europæiske optioner skal ligge. Grænserne giver anledning til, at man kan indkredse de faktorer, der er bestemmende for prisen på en option, samt hvordan optionsprisen afhænger af disse. Der udledes desuden en sammenhæng mellem prisen på call optioner, put optioner og deres underliggende aktiv (put-call pariteten). Denne sammenhæng benyttes til at bestemme aftalekursen på en future.

Til at vise disse sammenhænge udnyttes, at en europæisk call option giver anledning til nøjagtig samme fremtidige betalinger som en investering i det underliggende aktiv gearet med et stående lån, for hvilket det underliggende aktiv er stillet som eneste sikkerhed. Præmien, der må betales for kreditrisikoen på lånet, vises at være lig med prisen på en put option, da udstederen af lånet kan afdække kreditrisikoen fuldstændigt ved at købe en put option. Megen intuition for prisfastsættelsen af optioner og anvendelsen af disse opnås, hvis man på denne måde betragter en put option som en forsikring og en call option som en gearet investering i det underliggende aktiv med en vis forsikring mod nedadgående tab. En future kan betragtes som en gearet investering i det underliggende aktiv uden nogen form for forsikring.

Analysen i afsnit 2 udnytter, at arbitragegevinster er udelukket ved køb- og beholdstrategier. I afsnit 3 antages det, at arbitragegevinster ikke er mulige ved dynamiske investeringsstrategier. En dynamisk investeringsstrategi adskiller sig fra køb- og beholdstrategier ved, at en portefølje af værdipapirer kan justeres løbende på baggrund af udviklingen i prisen på det underliggende aktiv. Det bliver derved muligt at bestemme eksplicitte udtryk for prisen på en option (Binomialformlen og Black-Scholes formlen).

Investeringsstrategien, der anvendes til at udlede disse formler, er en porteføljestrategi bestående af en lang position i det underliggende aktiv samt en kort position i et antal call optioner. Antallet af optioner i porteføljen bestemmes hele tiden sådan, at porteføljens afkast er risikofrit i den efterfølgende periode. Hvis arbitragegevinster er udelukket, må forrentningen på porteføljen være lig med den risikofrie rente, der kan opnås i perioden. Herved relateres prisen på optionen direkte til prisen på det underliggende aktiv og den risikofrie rente.

Det vises desuden i afsnit 3, at prisen på en option noget overraskende ikke afhænger af det underliggende aktivs forventede pris på optionens udløbstidspunkt eller af investorernes præferencer. Forklaringen skal findes i, at disse to forhold allerede er afspejlet i prisen på det underliggende aktiv og i renten.

Ved et eksempel vises det, hvordan prisen på en call option ændres som følge af en ændring i prisen på det underliggende aktiv. Det vises også, hvorledes usikkerheden på en call options forrentning afhænger af prisen på det underliggende aktiv. Denne usikkerhed er altid større end usikkerheden på det underliggende aktivs forrentning. Specielt for lave priser på det underliggende aktiv i forhold til aftalekursen på optionen er en investering i call optioner en meget risikobetonet investering. Dette skyldes som allerede nævnt, at en call option kan sidestilles med en gearet investering i det underliggende aktiv.

I afsnit 4 videreudvikles analysen i de foregående afsnit, således at man med udgangspunkt i Black-Scholes formlen bliver i stand til at prisfastsætte optioner på danske realkreditobligationer. De specielle forhold, der gør det nødvendigt at modificere Black-Scholes formlen, er ydelserne på obligationerne i optionernes løbetid samt de institutionelle regler, der er foreslået for optionerne på det danske marked. En af de foreslåede regler er, at der på grund af konverteringsretten på de underliggende obligationer lægges en øvre grænse ind for afkastet på call optioner. Vi viser ved et eksempel, at det er af afgørende betydning for de teoretiske priser på optioner, at ovennævnte forhold inddrages i analysen.

Modellerne, der præsenteres i denne artikel, bygger naturligvis på restriktive antagelser. Transaktionsomkostninger og beskatningen af afkastet på optionerne og de underliggende aktiver inddrages for eksempel ikke i analysen. Der er derfor ingen grund til at blive overrasket, hvis markedspriserne ikke stemmer overens med de teoretiske priser. Er der store afvigelser mellem disse priser, kan det skyldes, at modellen ikke tager højde for de nævnte forhold, men også at markedspriserne på optionerne eller de underliggende aktiver forekommer over- eller undervurderede. Selv i denne situation vil de investeringsstrategier, der benyttes til at finde de teoretiske priser, kunne anvendes til at reducere risikoen på investeringer generelt såvel som på de investeringer, der tager sigte mod at udnytte eventuelt over- eller undervurderede papirer.

1. Indledning.

Formålet med denne artikel er at give læseren en forståelse for de grundliggende økonomiske faktorer, der er bestemmende for prisdannelsen på optioner og futures. Som på alle øvrige værdipapirer fastsættes markedsprisen selvfølgelig ud fra udbud og efterspørgsel. Ud fra en simpel og generelt accepteret økonomisk antagelse viser vi imidlertid i denne artikel, at der må være en snæver sammenhæng mellem priserne på disse nye finansielle instrumenter og priserne på de underliggende aktiver. Det er denne sammenhæng, vi vil beskrive og analysere, først generelt og dernæst mere konkret for optioner og futures på danske realkreditobligationer.

For at finde den teoretiske pris på optioner og futures må man gøre antagelser om, hvordan markedet fungerer, og om den måde priserne på de underliggende aktiver kan udvikle sig. Den grundlæggende økonomiske antagelse er, at priserne er bestemt på en sådan måde, at *arbitragemuligheder* er udelukket. En arbitragemulighed er til stede, hvis det er muligt at gennemføre en investeringsstrategi, der giver investoren en indbetaling ved starten af investeringen samtidig med, at investeringen aldrig vil give anledning til udbetalinger. Denne antagelse medfører det, der kaldes *loven om samme pris*. Denne fundamentale økonomiske sammenhæng siger, at to finansielle aktiver (eller to investeringsstrategier), der giver anledning til nøjagtigt de samme fremtidige betalinger, skal have den samme pris. Hvis dette ikke er tilfældet, vil enhver investor kunne opnå en øjeblikkelig gevinst ved at sælge den dyreste og købe den billigste uden at pådrage sig fremtidige nettoforpligtigelser. Alle investorer, der blot foretrækker mere fremfor mindre, vil søge at opnå en sådan arbitragegevinst. Efterspørgslen efter det billigste aktiv vil således stige samtidig med, at alle vil søge at sælge det dyreste aktiv. Prisen på det billigste aktiv vil dermed stige, mens prisen på det dyreste aktiv vil falde. Kun når begge aktiver har samme pris, vil efterspørgslen være lig med udbudet for begge aktiver. Det er dette simple økonomiske ræsonnement, der er baggrunden for analysen i denne artikel og iøvrigt baggrunden for alle de modeller, der sædvanligvis benyttes til prisfastsættelse af optioner og futures.

Artiklen er disponeret som følger: I afsnit 2 antages det, at arbitragegevinster er udelukket for køb- og beholdstrategier. Herved kan der opstilles grænser indenfor hvilke, prisen på europæiske optioner skal ligge. Ved hjælp af disse grænser kan man bestemme de faktorer, der er bestemmende for prisen på en option, samt hvordan optionsprisen afhænger af disse faktorer. Vi udleder desuden en sammenhæng mellem prisen på call optioner, put optioner og deres underliggende aktiv (put-call pariteten). Denne sammenhæng benyttes til at bestemme aftalekursen på en future.

I afsnit 3 anvender vi, at arbitragegevinster ikke er mulige ved dynamiske investeringsstrategier. En dynamisk investeringsstrategi adskiller sig fra køb- og beholdstrategier ved, at en portefølje af værdipapirer kan justeres løbende på baggrund af udviklingen i prisen på det underliggende aktiv. Herved får vi en direkte relation mellem prisen på en option og prisen på det underliggende aktiv (Binomialformlen og Black-Scholes formlen).

I afsnit 4 videreudvikles analysen i de foregående afsnit, således at vi med udgangspunkt i Black-Scholes formlen bliver i stand til at prisfastsætte optioner på danske realkreditobligationer. De specielle forhold, der gør det nødvendigt at modificere Black-Scholes formlen, er ydelserne på obligationerne i optionernes løbetid samt de institutionelle regler, der er foreslået for optionerne på det danske marked.

Artiklen afsluttes i afsnit 5 med en diskussion af nogle af de metodiske problemer, der er knyttet til analysen i denne artikel, samt en diskussion af de principielle spørgsmål i forbindelse med transaktionsomkostninger og beskatningens indflydelse på prisdannelsen på optioner og futures.

2. Begrænsninger på optioners pris.

Det er næppe umidelbart klart, hvordan man finder en fair pris på en option. For at finde den teoretiske pris skal man gøre forskellige mere eller mindre restriktive antagelser om markedsforholdene. Man kan derimod med mindre restriktive antagelser udtale sig om, indenfor hvilke grænser prisen på en option skal være. De eneste antagelser er

- at arbitragegevinster er udelukket
- at man har adgang til at låne og udlåne i optionens restløbetid til den samme rentefod, r.

Rentefoden, r, kaldes den risikofri rente, da det antages, at denne er kendt og konstant over optionens restløbetid. I det følgende anvendes såvel diskret som kontinuert rentetilskrivning. Ved kontinuert rentetilskrivning kaldes r for rentestyrken, og diskonteringsfaktoren er på formen e^{-rT}, hvor T er længden af diskonteringsperioden.

For at indsnævre det område, hvori prisen på en option skal ligge, sammensættes porteføljer, som på optionens udløbstidspunkt har enten større, mindre eller de samme betalinger som optionen. Derefter bruges antagelsen om, at arbitragegevinster ikke kan forekomme til at begrænse optionens mulige pris ved hjælp af prisen på den sammensatte portefølje.

Først dannes en portefølje, der giver en nedre grænse for call optioners pris: En investor køber et værdipapir. Det antages, at der på markedet findes både call og put optioner med dette værdipapir som underliggende aktiv. Prisen på værdipapiret er K. Derudover låner investoren et beløb, B, i banken. Lånet er netop så stort, at han skal betale E tilbage ved dets udløb. Banken accepterer, at det købte værdipapir stilles som eneste sikkerhed for lånet.

Selvom der er stillet sikkerhed for lånet, er denne kun delvis, idet værdipapirets pris, på det tidspunkt lånet forfalder, måske ikke er høj nok til at indfri lånet. Er dette tilfældet, vælger investoren at overdrage værdipapiret til banken, og han skal derfor ikke tilbagebetale lånet. Banken kræver derfor en pris, π, udover den risikofri rente for at yde lånet. Investoren får således følgende beløb udbetalt i banken:

(1) $B = E \cdot e^{-rT} - \pi$,

hvor r er rentestyrken pr. periode, og T er lånets løbetid målt i antal perioder.

Investorens betalinger fra ovenstående arrangement på lånets udløbstidspunkt afhænger af prisen på det værdipapir, der er købt, samt af de løbende betalinger, investoren modtager fra værdipapiret (såsom udbytte, hvis det underliggende aktiv er en aktie). Vi vil i dette afsnit og i afsnit 3 antage, at værdipapiret ikke giver anledning til betalinger i lånets løbetid.

Hvis prisen på værdipapiret på lånets udløbstidspunkt, K^*, er større end E, vælger investoren at betale lånet tilbage. Sælger han værdipapiret, får han en nettoindbetaling på $K^* - E$. Er prisen K^* derimod mindre end E, kan det bedst betale sig for investoren at undlade at tilbagebetale lånet. Værdipapiret overdrages derfor til banken. Investoren får ingen nettobetalinger fra arrangementet i denne situation. Betalingen bliver derfor maksimum af 0 og $(K^* - E)$. Betalingsmønsteret fra arrangementet er vist i tabel 1.

	Nu	Ved lånets udløb	
		$K^* < E$	$K^* \geq E$
Køb af værdipapiret	- K	K^*	K^*
Betalinger på lånet	B	$- K^*$	- E
Ialt	- (K - B)	0	$K^* - E$

Tabel 1: Investorens nettoindbetalinger fra arrangementet.

Dette betalingsmønster er det samme som på en call option med aftalekurs E og udløb samme dag, som lånet udløber.

To porteføljer med det samme fremtidige betalingsmønster skal have den samme pris for at udelukke arbitragegevinster. Idet call optionens nuværende pris benævnes med C, vil det derfor gælde, at

(2) $C = K - B = K - E \cdot e^{-rT} + \pi$.

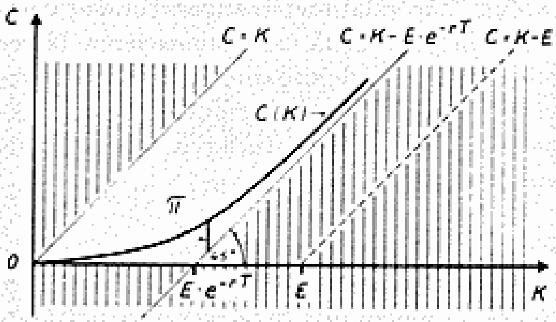
Prisen på en option kan aldrig blive negativ, da optionen ikke indeholder nogen form for forpligtigelse – optionen er en ret. Bankens pris for at løbe kreditrisiko kendes ikke, men den er naturligvis positiv. Sammenholdt med det foregående medfører dette, at

$C \geqslant \max \{0, K - E \cdot e^{-rT}\}$.

Man kan også begrænse call optionens pris opadtil. Havde man blot købt det underliggende aktiv, ville man på tidspunktet for optionens udløb have K^*. Dette er mere end call optionens betalinger på udløbstidspunktet, der er $\max \{0, K^* - E\} \leqslant K^*$. Man har derfor, som følge af, at arbitragemuligheder udelukkes, at

$C \leq K.$

Indtegnes begrænsningerne i et diagram fås, at prisen på call optionen skal befinde sig i det ikke-skraverede område i figur 1.



Figur 1: Begrænsninger på call optioners pris.

Det fremgår af figur 1, at prisen på call optionen før udløb altid er større end dens indre værdi defineret ved max { 0, K - E }, idet $(K - E \bullet e^{-rT}) > (K - E)$. Forskellen mellem optionens pris og dens indre værdi kaldes optionens tidsværdi. Tidsværdien er således positiv. Dette viser bl.a., at det aldrig vil kunne betale sig at udnytte amerikanske call optioner før udløb. Når der er betalinger på det underliggende aktiv i optionens restløbetid, vil det dog i nogle situationer kunne betale sig at udnytte optionsretten før udløb..

I figur 1 er der tegnet et typisk forløb af call optionens pris som funktion af prisen på det underliggende aktiv. Formen på kurven kendes endnu ikke, men i afsnit 3 præsenteres en model, der netop giver forløbet i figuren. Her vil vi nøjes med at give et intuitivt argument for kurvens form. Den lodrette afstand mellem prisen på optionen og linien L givet ved $C = (K - E \bullet e^{-rT})$ er den pris, banken kræver for kreditrisikoen (se ligning (2)), d.v.s. risikoen for at værdipapirets pris ved lånets udløb, K*, er mindre end E. Jo større den nuværende pris er på værdipapiret, desto mindre er sandsynligheden for at værdipapirets pris ved lånets udløb er faldet til under E. Prisen for kreditrisikoen, π, må derfor være mindre, jo større den nuværende pris er på værdipapiret. Prisen på call optionen nærmer sig derfor til linien L, når prisen på det underliggende aktiv stiger. Tilsvarende må prisen på en call option være mindre, jo mindre den nuværende pris er på det underliggende aktiv, idet aktivet skal stige med mere, før call optionen bliver noget værd ved udløb. Prisen på call optionen går dermed mod nul for prisen på det underliggende aktiv gående mod nul.

Er man villig til at acceptere ovenstående intuitive argument, kan man udfra figuren lave en simpel analyse af forskellige faktorers betydning for prisen på call optioner. Man kan således se, at

– prisen på det underliggende aktiv,
– optionens restløbetid,
– optionens aftalekurs,
– den risikofri rente,

alle har indflydelse på call optioners pris.

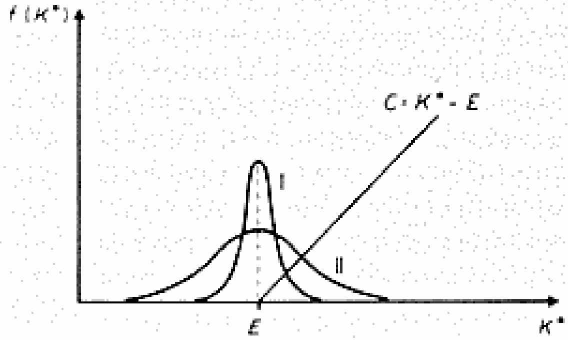
Vi har allerede argumenteret for, at prisen på en call option er en voksende funktion af prisen på det underliggende aktiv. En ændring i call optionens restløbetid, dens aftalekurs og i den risikofri rente vil alle påvirke positionen af $E \bullet e^{-rT}$ og dermed placeringen af linien L. Falder aftalekursen rykker L til venstre og call optionens pris må stige. En stigning i restløbetid og risikofri rente har samme effekt – L rykker mod venstre. Call optionens pris stiger således for voksende restløbetid og voksende risikofri rente.

Det er let at forstå, at call optionen stiger i pris, når aftalekursen falder, idet man derved opnår en ret til at købe det underliggende aktiv til en mindre pris. Derimod er det ikke så umiddelbart indlysende, at prisen på optionen stiger, når restløbetiden stiger. En måde, at se det på, er følgende: Jo længere en call option har til udløb, jo længere tid har det underliggende aktiv også til at stige i pris – hvilket er til fordel for optionsejeren. Jo længere tid optionen løber, jo større er også sandsynligheden for, at prisen på det underliggende aktiv falder meget. Optionsejeren er imidlertid indifferent overfor, hvor meget prisen på det underliggende aktiv falder, når den er kommet ned under aftalekursen – optionen er da i alle tilfælde værdiløs ved udløb.

Alternativt kan man betragte den portefølje, der har samme betalingsmønster som optionen. Porteføljen er en gearet investering i det underliggende aktiv. Gearingen er et lån af en sådan størrelse, at netop optionens aftalekurs skal tilbagebetales ved lånets udløb. Det beløb, der skal tilbagebetales, er således uafhængigt af lånets løbetid og af den risikofri rente. Derimod falder provenuet, B, når disse to størrelser stiger. En call option kan derfor betragtes som en gearet investering i det underliggende aktiv, hvor gearingen aftager, når restløbetiden og den risikofri rente vokser, og dette svarer til en højere pris på optionen.

Udover de allerede nævnte faktorer indgår endnu en i bestemmelsen af en options pris, og det er svingningerne i det underliggende aktivs pris. Størrelsen af disse udsving kaldes volatiliteten og benævnes sædvanligvis ved σ. Jo større volatilitet, jo højere pris på optionen.

En øget volatilitet betyder, at sandsynligheden for, at prisen på det underliggende aktiv stiger eller falder meget i tidsrummet indtil optionen udløber, forøges. Dette kan illustreres ved en ændring i sandsynlighedsfordelingen for aktivets pris ved optionens udløb fra I til II i figur 2.



Figur 2: Ændring i volatiliteten på prisen på det underliggende aktiv.

Selvom en stigning i volatiliteten betyder, at lave priser på det underliggende aktiv bliver mere sandsynlige, anfægter det ikke optionsejeren, idet optionen da under alle omstændigheder vil være værdiløs. Høje priser på det underliggende aktiv og dermed også høje værdier af optionen ved udløb bliver også mere sandsynlige, når volatiliteten stiger. Forøget volatilitet betyder altså, at optionsejeren bliver stillet bedre i nogle situationer og ikke dårligere i de øvrige. Da arbitragemuligheder udelukkes, medfører dette naturligvis, at optionens værdi stiger.

Resultaterne af ovenstående analyse af call optioner kan summeres som følger, idet fodtegnet på call optionens pris angiver den partielt afledede af call optionens pris med hensyn til den pågældende variabel:

$$C \geqslant max \{ O, K - E \bullet e^{-rT} \}$$
$$C \leqslant K$$
$$C_K > O, C_E < O, C_T > O, C_r > O, C_\sigma > O.$$

I (1) udtrykte π bankens pris for kreditrisikoen på et lån med et værdipapir som eneste sikkerhed. Vi vil nu betragte den ydelse, banken sælger.

Hvis værdipapiret, den dag lånet forfalder, har en kurs, K*, der er højere end E, modtager banken beløbet E. Er værdipapirets pris derimod mindre end E, misligeholdes lånet, og banken modtager værdipapiret med værdien K*. Køber banken en put option skrevet på det samme værdipapir, som ligger som sikkerhed for lånet, og med samme restløbetid som lånet og en aftalekurs på E, bliver bankens nettoindbetalinger ved lånets udløb som vist i tabel 2. Størrelsen P angiver put optionens pris.

Banken har således ved at købe en put option fuldstændigt elimineret kreditrisikoen på lånet. Med andre ord, nettopositionen svarer til en situation, hvor banken har ydet et lån uden

	Nu	Ved udløb	
		$K^* < E$	$K^* \geq E$
Køb af en put option	- P	$E - K^*$	0
Ydelse på lånet	- B	K^*	E
Ialt	- P - B	E	E

Tabel 2. Bankens nettoindbetalinger

kreditrisiko. Skal arbitragemuligheder for banken være udelukket, skal det gælde, at

$$P + B = E \bullet e^{-rT}$$

Vi får derfor af (1), at prisen på put optionen præcis er lig med den pris banken kræver for, at værdipapiret er stillet som den eneste sikkerhed for lånet, d.v.s. $P = \pi$. Indsættes dette i (2), får man, at

$$C = K - E \bullet e^{-rT} + P$$

Denne sammenhæng mellem priserne på put optioner, call optioner, det underliggende aktiv og den risikofri rente kaldes *put-call pariteten.*

Idet prisen på put optionen er lig med π, får vi, at put-call pariteten faktisk allerede er illustreret i figur 1, da prisen på put optionen er den lodrette afstand mellem prisen på call optionen og linien L givet ved $C = (K - E \bullet e^{-rT})$. Det følger af figuren, at prisen på en put option er en aftagende funktion af prisen på det underliggende aktiv. Det følger også af put-call pariteten, at prisen på put optionen er en voksende funktion af volatiliteten, idet prisen på call optionen er en voksende funktion af denne variabel. Prisen på put optionen er en voksende funktion af aftalekursen. Dette er indlysende, da en højere aftalekurs giver anledning til, at man får en ret til at sælge det underliggende aktiv til en højere pris.

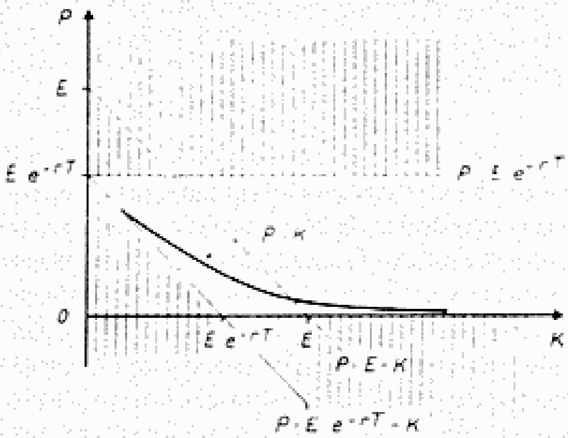
Restløbetidens og den risikofri rentes effekt på put optionens pris er derimod lidt sværere at bestemme. I modsætning til en call option er der en grænse for det maksimale afkast på en put option, fordi prisen på det underliggende aktiv aldrig kan blive negativ. Det maksimale afkast på en put option er således aftalekursen E. Prisen på put optionen kan derfor aldrig blive højere end nutidsværdien af E, d.v.s.

$$P \leqslant E \bullet e^{-rT}.$$

Prisen på en put option kan også begrænses nedefra, ved at benytte put-call pariteten og huske, at priserne på såvel call optioner som put optioner er ikke-negative. Derved fås, at

$$P \geqslant \max \{ 0, E \bullet e^{-rT} - K \}.$$

Tegnes disse grænser ind i et diagram fås, at prisen på put optionen skal ligge i det ikke-skraverede område i figur 3.



Figur 3: Begrænsninger på put optioners pris.

Det fremgår af figur 3, at en længere restløbetid og en større risikofri rente får den øvre grænse til at rykke nedad. Dette skyldes, at nutidsværdien af det maksimale afkast falder. Når put optionens indre værdi er stor, d.v.s. når prisen på det underliggende aktiv er meget lav, vil en længere restløbetid og en højere risikofri rente få prisen på put optionen til at falde. Når optionens indre værdi er nul, har restløbetiden en positiv effekt på put optionens pris. Argumentet herfor er det samme som det, vi benyttede for call optioner. Der gælder, at jo længere restløbetid, desto større er også sandsynligheden for, at prisen på det underliggende aktiv falder meget og dermed for, at afkastet på put optionen bliver stort.

Af figur 3 bemærkes endelig, at i modsætning til call optioner kan prisen på europæiske put optioner falde til under deres indre værdi, da den nedre grænse ($E \cdot e^{-rT} - K$) er mindre end den indre værdi ($E - K$). Det er dette forhold, der gør, at det undertiden kan betale sig at udnytte amerikanske put optioner før udløb i modsætning til amerikanske call optioner.

Ovenstående analyse af put optioner kan summeres som følger:

$$P \geqslant max \{ O, E \cdot e^{-rT} - K \}$$
$$P \leqslant E \cdot e^{-rT}$$
$$P_K < O, P_E > O, P_r < O, P_\sigma > O$$
$$P_T < O, \text{ hvis } K \text{ er meget lav}$$
$$P_T > O, \text{ hvis } K > E$$

I dette afsnits sidste del diskuteres prisfastsættelsen på futures. En future er en aftale om enten at købe eller at sælge et aktiv til aftalekursen på et givet fremtidigt tidspunkt. Aftalekursen fastsættes således, at aftalen kan indgås uden nettobetalinger. En future svarer dermed til en terminsforretning bortset fra, at gevinster og tab afregnes løbende på futures, mens der ikke sker nogen afregning på terminsforretninger før udløbstidspunktet. Vi vil først betragte, hvordan en terminskurs fastsættes.

Hvis man køber en call option og skriver en put option med samme udløbstidspunkt og aftalekurs $E^*(T)$, da svarer denne porteføljes betalinger på optionernes udløbsdag til, at man har indgået en terminskontrakt om at købe det underliggende aktiv til kursen $E^*(T)$ på optionernes udløbstidspunkt. Da terminskursen fastsættes således, at kontrakten kan indgås uden betalinger på investeringstidspunktet, skal vi altså finde den aftalekurs på optionerne, der medfører, at prisen på call optionen er lig med prisen på put optionen. Terminskursen er med andre ord den kurs, der medfører, at værdien af en ret til at købe er lig med værdien af en ret til at sælge det underliggende aktiv til denne kurs på kontraktens udløbstidspunkt. Indsætter vi dette i put-call pariteten, får vi, at terminskursen er bestemt ved

$$(3)\ E^*(T) = K \cdot e^{rT}$$

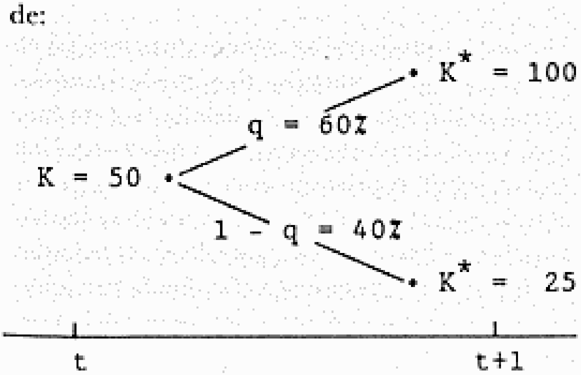
Dette resultat ville man også kunne have fået direkte ved at købe terminskontraktens underliggende aktiv, finansiere købet ved et lån og sælge det underliggende aktiv på termin med udløb på samme tidspunkt som lånet forfalder. Antagelsen om, at arbitragegevinster er udelukket, ville så give, at terminskursen er bestemt ved (3). En terminskontrakt svarer derfor til en gearet investering i det underliggende aktiv med fuld sikkerhed for kreditor.

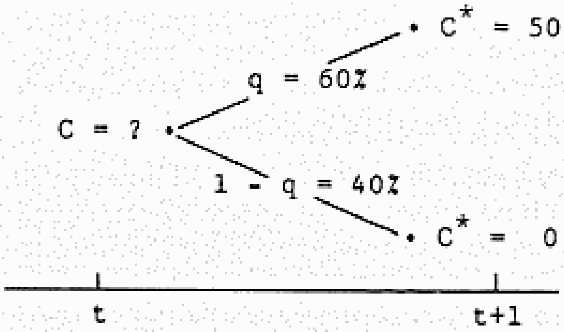
Som allerede nævnt adskiller futures og terminskontrakter sig grundlæggende fra hinanden ved, at futures har løbende afregning af gevinster og tab, mens terminsforretninger først afregnes på udløbstidspunktet. Afkastet på en terminskontrakt bestemmes udelukkende af kursen på det underliggende aktiv på kontraktens udløbstidspunkt. På grund af forrentningen af den løbende afregning på futures er det underliggende aktivs prisudvikling imidlertid også af betydning for futureskontrakters akkumulerede afkast. Det er for eksempel ikke ligegyldigt, om det underliggende aktivs pris stiger først eller sidst i futureskontraktens løbetid. Denne forskel på futures og terminskontrakter medfører, at man ikke umiddelbart kan konkludere, at aftalekurser på futures og tilsvarende terminskurser er lig med hinanden. I næste afsnit viser vi, at når den risikofrie rente er konstant, er den eneste aftalekurs på en future, der udelukker arbitragegevinster ved dynamiske handelsstrategier, lig med terminskursen på en tilsvarende terminsforretning.

3. Dynamiske handelsstrategier.

I forrige afsnit blev det vist, at der er en entydig sammenhæng mellem de teoretiske priser på put optioner, call optioner, det underliggende aktiv og den risikofrie rente (put-call pariteten). Ud fra prisen på en put option, prisen på det underliggende aktiv og den risikofrie rente kan prisen på en call option således bestemmes. I dette afsnit vil vi gå et skridt videre og antage, at arbitragegevinster ikke må være mulige ved dynamiske handelsstrategier. Vi opnår derved, at den teoretiske pris på en call option kan udtrykkes som en funktion af prisen på det underliggende aktiv og den risikofrie rente. Prisen på en put option kan herefter også bestemmes som en funktion af disse to størrelser ud fra put-call pariteten. Vi behandler derfor kun call optioner i dette og det følgende afsnit.

Lad os starte med et lille eksempel. Vi betragter en call option med kun en enkelt periode til udløb. Optionen er skrevet på et finansielt aktiv, der ved optionens udløb kan antage enten prisen 100 med sandsynligheden q = 60% eller prisen 25 med sandsynligheden 1 - q = 40%. Aktivets nuværende pris er 50, og optionens aftalekurs er også 50. Stiger aktivet i pris over perioden til 100, vil optionen således være 50 værd ved udløb, mens optionen vil være værdiløs, hvis aktivet falder i pris. Lad os endvidere antage, at det er muligt at placere penge til en fast rente på 25% over perioden. Vi kan illustrere situationen på følgende måde:





Problemet består i at bestemme optionens pris én periode før udløb. Lad os danne en portefølje bestående af en lang position i to enheder af det underliggende aktiv og en kort position i tre call optioner. Nettoindbetalingerne fra denne portefølje er angivet i tabel 3:

	Nu	Ved udløb	
		K* = 25	K* = 100
Køb af 2 aktiver	- 100	50	200
Salg af 3 optioner	+ 3 C	0	- 150
Ialt	3 C - 100	50	50

Tabel 3: Nettoindbetalinger fra portefølje.

Betalingerne på porteføljen er således 50, uanset om det underliggende aktiv stiger eller falder i pris. Der er med andre ord ikke knyttet nogen risiko til porteføljens afkast. En risikofri placering af 40 over perioden til en rente på 25% vil give nøjagtigt det samme afkast. For at udelukke arbitragegevinster må nettoinvesteringen i porteføljen dermed være en udbetaling på 40,

$$3\ C - 100 = -40,$$

Den eneste pris på call optionen, der udelukker arbitragegevinster, er altså C = 20.

Dette eksempel illustrerer det helt fundamentale princip bag alle modeller til prisfastsættelse af optioner: Der dannes en portefølje af optionen og det underliggende aktiv i et sådant forhold, at porteføljen giver et risikofrit afkast. For at udelukke arbitragegevinster må dette afkast svare til en forrentning lig med den risikofrie rente. Herved relateres prisen på optionen direkte til prisen på det underliggende aktiv og den risikofri rente.

Eksemplet illustrerer også, hvad prisen på en option afhænger af og mindst lige så vigtigt, hvad den ikke afhænger af. For det første fremgår det umiddelbart, at en større nuværende pris på det underliggende aktiv og en større rente medfører, at prisen på optionen også bliver større. For det andet fremgår det af eksemplet, at givet den nuværende pris på det underliggende aktiv og givet den risikofrie rente, afhænger prisen på optionen ikke af

- investorernes præferencer med hensyn til risiko
- det underliggende aktivs forventede pris på optionens udløbstidspunkt.

Det eneste, vi har antaget om investorernes præferencer, er, at alle investorer foretrækker mere fremfor mindre, således at loven om samme pris holder. Investorernes præferencer med hensyn til risiko er på den anden side en af de faktorer, der er med til at bestemme det underliggende aktivs nuværende pris.

I eksemplet er sandsynligheden for, at aktivet stiger i pris, 60%, mens sandsynligheden for, at aktivet falder i pris, er 40%. Aktivets forventede pris ved optionens udløb er således $100 \cdot 60\% + 25 \cdot 40\% = 70$ svarende til en forventet forrentning på 40%. Vi benyttede imidlertid slet ikke disse sandsynligheder til at finde prisen på optionen. Havde sandsynligheden for, at aktivet stiger i pris, været 80% istedet for 60%, ville optionen stadig skulle have en pris på kr. 20. Aktivets forventede pris ved optionens udløb ville imidlertid nu være $100 \cdot 80\% + 25 \cdot 20\% = 85$ svarende til en forventet forrentning på 70%. Umidelbart er dette overraskende, når man erindrer, at call optionen kun giver et positivt afkast, når det underliggende aktiv stiger i pris.

Forklaringen skal findes i, at investorernes præferencer og forventninger til det underliggende aktivs fremtidige prisudvikling allerede er afspejlet i den nuværende markedspris på dette aktiv:

Den for prisen på en option relevante information om investorernes præferencer og forventninger er indeholdt i prisen på det underliggende aktiv og i den risikofrie rente.

Denne egenskab er en af de væsentligste årsager til, at modeller til prisfastsættelse af optioner har vist sig at være meget anvendelige. Baggrunden for modellerne er et meget simpelt økonomisk ræsonnement, der ikke er baseret på restriktive antagelser om investorernes præferencer og forventninger. Så længe investorerne er enige om den risikofrie rente og den nuværende pris på det underliggende aktiv samt om de mulige fremtidige priser på aktivet, vil de også være enige om, hvad der er den rigtige pris på optionen. Dette gælder, uanset om de har forskellige præferencer og forskellige forventninger til den fremtidige prisudvikling på det underliggende aktiv.

Eksemplet er selvfølgelig meget restriktivt med hensyn til antallet af mulige fremtidige priser på det underliggende aktiv. Havde der for eksempel været tre mulige priser på aktivet ved optionens udløb, havde det ikke været muligt at danne en portefølje af optionen og det underliggende aktiv med et risikofrit afkast. I det følgende skitseres en generel model, der tillader mange forskellige priser på det underliggende aktiv ved optionens udløb. Princippet er nøjagtigt det samme som i eksemplet. Det tillades blot, at investorerne justerer porteføljen løbende i hele perioden frem til optionens udløb, således at afkastet hele tiden er risikofrit.

Der er to metoder til at bestemme prisen på en option, når der anvendes dynamiske handelsstrategier. De to metoder adskiller sig fra hinanden ved, hvor ofte priserne ændrer sig. Den ene antager, at priserne kun ændrer sig på bestemte tidspunkter, mens den anden tillader, at priserne kan ændre sig på ethvert tidspunkt. Vi har valgt at gennemgå den første modeltype (binomialmodellen), idet den teknisk er den nemmeste at forstå. Optionsprismodeller, hvor priserne ændrer sig kontinuert over tiden, kan udledes fra binomialmodellen ved at tillade, at priserne ændrer sig stadig hyppigere. Sidst i afsnittet angives optionsprisformlen for denne modeltype (Black-Scholes formlen).

Som i eksemplet ovenfor antages det, at prisen på det underliggende aktiv fra et tidspunkt til det næste enten vil stige eller falde. Hvis prisen på tidskunkt t er K, vil den på tidspunkt t+1 være enten

$$u \cdot K\ ,\ u > 1+r \quad \text{eller} \quad d \cdot K\ ,\ d < 1+r.$$

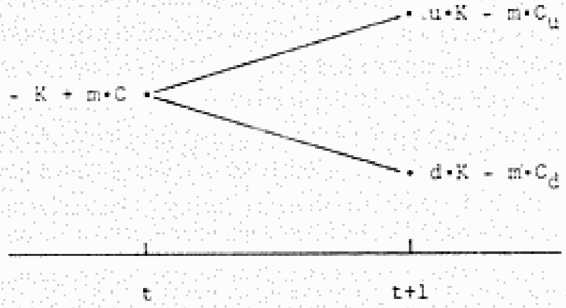
Hvis kursen stiger, vil den stige med (u-1) • 100%. Falder den, er det med (1-d) • 100%. Vi vil nu finde prisen på en call option med aftalekurs E. Vi bestemmer indledningsvis prisen på optionen, når den har én periode til udløb.

Vi er således interesserede i at finde prisen, C, på tidspunkt t på en call option med aftalekurs E, der udløber på tidspunkt t+1. Lad C_u være værdien af call optionen i næste periode, hvis kursen på det underliggende aktiv er u • K. Tilsvarende er C_d værdien af call optionen i næste periode, hvis kursen på det underliggende aktiv er d • K.

Hvis kursen på det underliggende aktiv på tidspunkt t+1 er u • K, og u • K er større end aftalekursen E, vil optionen blive udnyttet, og C_u vil være lig med forskellen mellem prisen på det underliggende aktiv og aftalekursen, u • K - E. Hvis prisen på det underliggende aktiv derimod falder og d • K < E, vil optionen være værdiløs. C_d er da 0.

Prisen på optionen findes ved at sammensætte en portefølje af call optionen og det underliggende aktiv på en sådan måde, at betalingerne fra porteføljen på tidspunkt t+1 bliver de samme uafhængigt af, om prisen på det underliggende aktiv stiger eller falder. En sådan portefølje kaldes en hedgeportefølje. Forrentningen på porteføljen vil da være kendt med sikkerhed på tidspunkt t og skal derfor være lig med den risikofrie rente r for at udelukke arbitragegevinster.

Vi sammensætter nu en portefølje ved at købe én enhed af det underliggende aktiv med prisen K, og skrive m enheder af call optionen med - den pt. ukendte - pris C. Porteføljen har følgende betalinger på tidspunkterne t og t+1:



Betalingerne på tidspunkt t+1 er lige store uafhænigt af, om prisen på det underliggende aktiv er d • K eller u • K, hvis man vælger det antal optioner, m, der skal skrives, så der gælder, at

$$u \cdot K - m \cdot C_u = d \cdot K - m \cdot C_d.$$

Løses ligningen med hensyn til m får man, at

$$(4)\ m = \frac{u \cdot K - d \cdot K}{C_u - C_d}$$

Det antal optioner, m, der skal skrives for at eliminere risikoen, er således bestemt som forskellen mellem de mulige priser på det underliggende aktiv i forhold til forskellen mellem de mulige priser på optionen i den følgende periode. Da hedgeporteføljen med m bestemt ved (4) giver den samme betaling på tidspunkt t+1 uafhænigt af, om kursen på det underliggende aktiv stiger eller falder, og da der ikke må være arbitragemuligheder, skal det beløb, der er investeret i porteføljen, K - m • C, give en forrentning på r i perioden. Der skal derfor gælde, at

$$(K - m \cdot C) \cdot (1+r) = u \cdot K - m \cdot C_u = d \cdot K - m \cdot C_d$$

Alle størrelserne i ligningen er kendte med undtagelse af prisen på optionen, C. Vi kan derfor finde C ved at løse ligningen.

$$(5)\ C = \frac{(1+r-u) \cdot K + m \cdot C_u}{m \cdot (1+r)}$$

Det er muligt at udtrykke optionens pris uden først at finde frem til det antal optioner, m, der blev brugt til at sammensætte hedgeporteføljen. Dette gøres ved at indsætte (4) i (5):

$$(6)\ C = \frac{1}{(1+r)} \cdot \left[C_u \cdot \frac{1+r-d}{u-d} + C_d \cdot \frac{u-(1+r)}{u-d} \right]$$

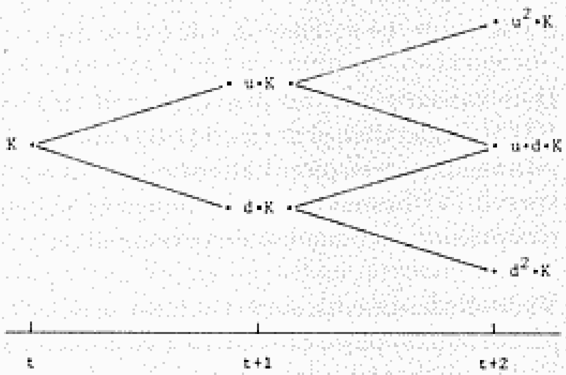
$$= (p \cdot C_u + (1-p) \cdot C_d // (1+r)$$

hvor p er defineret ved $p \equiv (1+r-d) / (u-d)$.

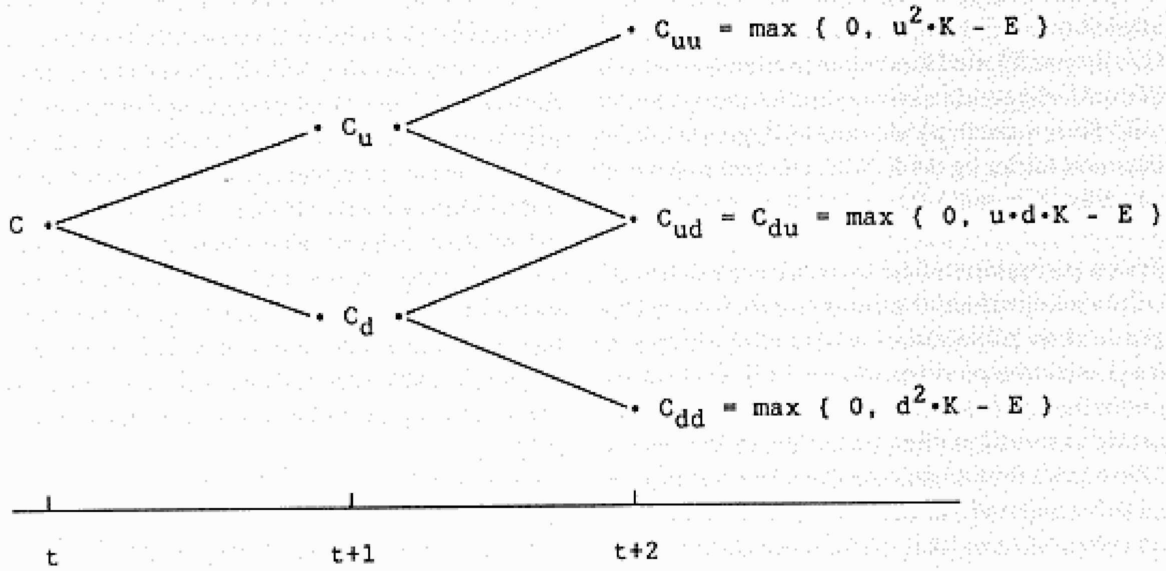
Både prisen på det underliggende aktiv og aftalekursen indgår indirekte i (6) gennem C_d og C_u. Renten optræder direkte i (6). Volatiliteten i det underliggende aktivs pris er repræsenteret i (6) gennem forskellen mellem u og d.

Det næste trin i bestemmelsen af prisen på en option er at finde prisen på en option, der har to perioder til udløb. Vi vil således finde prisen på optionen på tidspunkt t, når den udløber på tidspunkt t+2.

Betragt først det underliggende aktivs prisudvikling. Fra tidspunkt t til tidspunkt t+1 kan kursen enten stige til $u \cdot K$ eller falde til $d \cdot K$. Hvis kursen på tidspunkt t+1 er $u \cdot K$, kan den i næste periode igen enten stige eller falde. Hvis den stiger, vil prisen være $u^2 \cdot K$ på tidspunkt t+2. Falder den, vil prisen være $d \cdot u \cdot K$. Hvis prisen på tidspunkt t+1 er $d \cdot K$, vil den enten være $u \cdot d \cdot K$ eller $d^2 \cdot K$ på tidspunkt t+2. Prisen på det underliggende aktiv kan da antage følgende værdier:



Kender man de to priser, optionen kan have på tidspunkt t+1, C_u og C_d, kan man finde prisen på optionen på tidspunkt t ved at anvende samme hedgeargument som ovenfor. Vi skal derfor blot finde C_u og C_d og indsætte i (6). Hvis prisen på det underliggende aktiv for ek-



sempel faldt fra tidspunkt t til t+1 og steg fra t+1 til t+2 vil prisen på aktivet på tidspunkt t+2 være u • d • K. Optionens værdi ved udløb, C_{ud}, er derfor enten u • d • K - E eller 0 afhængig af, om u • d • K er større eller mindre end aftalekursen E. Da vi har antaget, at u og d er kendte, ved vi også, hvilke værdier optionen vil have ved udløb for de tre mulige priser på det underliggende aktiv: (se nederst side 116)

På tidspunkt t+1 er det kendt, om kursen på det underliggende aktiv er u • K eller d • K, og der er kun en periode tilbage af optionens løbetid. For hver af de mulige priser på det underliggende aktiv kan hedgeargumentet for én-periode situationen derfor benyttes til at finde henholdsvis C_u og C_d. Vi kan således blot indsætte i (6):

$$C_u = (p \cdot C_{uu} + (1-p) \cdot C_{ud}) / (1+r)$$

$$C_d = (p \cdot C_{ud} + (1-p) \cdot C_{dd}) / (1+r)$$

Vi har nu fundet de to mulige optionspriser på tidspunkt t+1, hvilket er det, vi skal bruge for at bestemme prisen på optionen på tidspunkt t. Optionens pris på tidspunkt t findes ved at indsætte de netop fundne udtryk for C_u og C_d i (6):

$$\begin{aligned} C &= (p \cdot C_u + (1-p) \cdot C_d) / (1+r) \\ &= (p^2 \cdot C_{uu} + 2 \cdot p \cdot (1-p) \cdot C_{ud} \\ &\qquad + (1-p)^2 \cdot C_{dd}) / (1+r)^2 \end{aligned}$$

Princippet, der er anvendt ved udledningen af prisen på en option med to perioder til udløb, er nøjagtig det samme, som blev anvendt ved udledningen af prisen på optionen med kun én periode til udløb. Den eneste forskel er, at når der er to perioder til udløb, skal hedgeporteføljen justeres efter den første periode. Efter samme princip kan den teoretiske pris på en call option med n perioder til udløb bestemmes:

$$(7)\ C = \frac{1}{(1+r)^n} \cdot$$

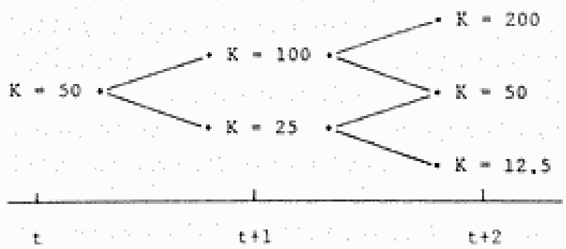
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \cdot \max\{0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot K - E\}$$

$$\text{hvor } \binom{n}{j} = \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!}$$

Hvis p fortolkes som sandsynligheden for, at det underliggende aktiv stiger i en given periode, da angiver et typisk led i summen sandsynligheden for, at prisen på det underliggende aktiv stiger j gange og falder n-j gange, ganget med værdien af optionen ved udløb givet at prisen stiger j gange ud af de n mulige. Når der derefter summeres over det alle mulige udfald, j, angiver summen optionens forventede værdi ved udløb. Tilbagediskonteres den forventede værdi over n perioder med den risikofrie rente, får man prisen på optionen n perioder før udløb.

Det skal bemærkes, at p er bestemt ud fra u, d og den risikofrie rente r. Binomialsandsynligheden p er ikke bestemt udfra investorernes forventninger til prisudviklingen på det underliggende aktiv. Den er udelukkende bestemt udfra, at arbitragegevinster skal være udelukket ved dynamiske handelsstrategier. Selv i den situation, hvor alle investorer tillægger en stigning i det underliggende aktivs pris samme sandsynlighed, vil denne sandsynlighed ikke generelt kunne relateres til binomialsandsynligheden p.

Vi kan illustrere brugen af formel (7) ved at udvide det tilligere viste én-periode eksempel med endnu en periode. Antag derfor, at det underliggende aktiv har følgende prisudvikling i call optionens restløbetid på nu to perioder:



Optionen har som i én-periode eksemplet en aftalekurs på 50 og renten antages at være 25% i hver periode.

Det fremgår af figuren, at prisen på det underliggende aktiv enten fordobles eller halveres i hver periode. u er derfor lig med 2, og d er lig med 0,50. Binomialsandsynligheden p kan således bestemmes til

$$p = (1+r-d) / (u-d) = 0{,}75 / 1{,}50 = 0{,}50$$

Prisen på optionen findes ved at indsætte i (7) med n=2, u=2, d=0,5, r=0,25 og K = 50:

$$C = \frac{1}{(1+0{,}25)^2} \cdot$$

$$\Bigg[\binom{2}{0} 0{,}50^0\ 0{,}50^2 \cdot \max\{0,\ 2^0 \cdot 0{,}50^2 \cdot 50 - 50\}$$

$$+ \binom{2}{1} 0{,}50^1\ 0{,}50^1 \cdot \max\{0,\ 2^1 \cdot 0{,}50^1 \cdot 50 - 50\}$$

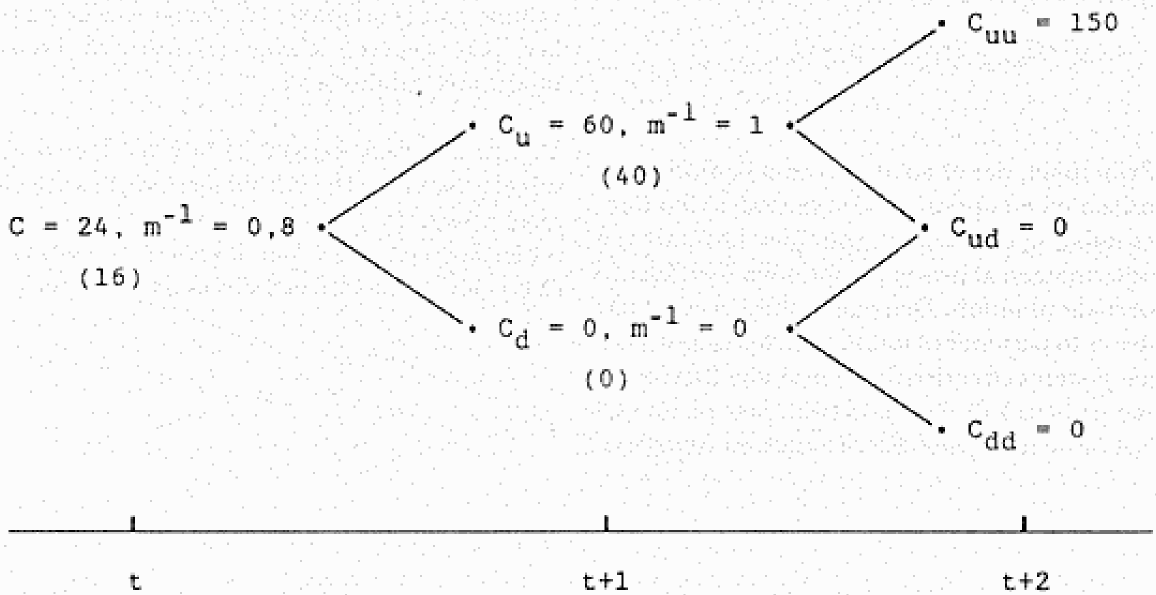
$$+ \binom{2}{2} 0{,}50^2\ 0{,}50^0 \cdot \max\{0,\ 2^2 \cdot 0{,}50^0 \cdot 50 - 50\} \Bigg]$$

$$= 0{,}64 \cdot (1 \cdot 0{,}25 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}25 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}25 \cdot 150)$$

$$= 24$$

Hedgeforholdet er defineret ved det antal enheder af det underliggende aktiv, man skal købe, hvis man i den kommende periode vil fjerne risikoen på én skrevet call option stammende fra ændringer i kursen på det underliggende aktiv. Hedgeforholdet er således givet ved m^{-1}, hvor m er givet ved (4). Har man omvendt købt en call option, kan risikoen elimineres ved at sælge m^{-1} enheder af det underliggende aktiv.

Ved at følge den strategi der blev brugt til at finde prisen på en option, er det også muligt at sammensætte sin egen call option. Ved at låne penge og købe det underliggende aktiv er det muligt at opnå en betalingsstrøm, der nøjagtigt svarer til optionens. Strategien kræver, at man tilpasser sin portefølje i hver periode. Hedgeforholdet, m^{-1}, angiver, hvor mange enheder af det underliggende aktiv man løbende skal holde for at få samme betalingsstrøm som optionen. Størrelsen på det lån, man skal have i hver periode, er $m^{-1} \cdot K - C$. I det følgende er prisen på optionen i eksemplet ovenfor angivet i hver periode og for hver af de mulige priser på det underliggende aktiv. Tallene i parentes angiver, hvor stort lånet skal være for, at en portefølje bestående af lånet og det antal enheder af det underliggende aktiv bestemt ved hedgeforholdet giver en betalingsstrøm, som ved udløb er lig med optionens.



Lad os prøve at følge grenen, hvor prisen på det underliggende aktiv stiger i første periode. På tidspunkt t køber vi $m^{-1} = 0{,}8$ enheder af det underliggende aktiv for en pris på 40 og vi låner $K \cdot m^{-1} - C = 16$. Nettoinvesteringen er $40 - 16 = 24$, altså det samme som prisen på optionen. På tidspunkt t+1 er prisen på det underliggende aktiv steget til 100, og der er løbet renter på lånet. Porteføljen likvideres for en værdi på $0{,}8 \cdot 100 - 16 \cdot 1{,}25 = 60$, som også er prisen på optionen. Køber vi nu $m^{-1} = 1$ enheder af det underliggende aktiv for 100 og låner $K \cdot m^{-1} - C = 40$, bliver der således ingen nettobetalinger i tidspunkt t+1. I tidspunkt t+2 kan lånet tilbagebetales med 50. Hvis prisen på det underliggende aktiv er steget til 200 bliver nettoresultatet således 150, mens det underliggende aktiv netop kan indfri lånet, hvis prisen på dette aktiv er faldet til 50.

Vi har dannet en dynamisk investeringsstrategi, der starter med samme nettoinvestering som prisen på optionen, og som kan likvideres på ethvert tidspunkt for en værdi lig med prisen på optionen i dette tidspunkt. Investeringsstrategien er selvfinansierende, idet den ikke kræver nettobetalinger efter initialinvesteringen. Vi har med andre ord dannet en syntetisk call option ved at handle i det underliggende aktiv og optage lån. På samme måde kan man eliminere risikoen på en købt call option ved at følge en dynamisk handelsstrategi, hvor man hele tiden tilpasser sin portefølje således, at man har solgt m^{-1} enheder af det underliggende aktiv.

Forskellen mellem futures og terminsforretninger kan illustreres ved hjælp af det samme to-periode eksempel. Som nævnt i afsnit 2 består forskellen mellem futures og terminsforretninger i, at der er løbende afregning af gevinster og tab på futures, mens terminsforretninger først afregnes på udløbstidspunktet.

Prisen på det underliggende aktiv antages at følge den ovenfor viste udvikling svarende til, at vi har en future og en terminsforretning med to perioder til udløb. Terminskurserne kan umiddelbart findes af (3) (med diskret rentetilskrivning). Ved en future's udløb er futureskursen lig med spotkursen på det underliggende aktiv. En periode før udløb er en future og en terminsforretning identiske kontrakter. Lad F*(T) benævne aftalekursen på en future med en restløbetid på T perioder. Vi får dermed følgende mulige priser på det underliggende aktiv, terminskurser og kontraktkurser på en future: (se øverst side 120).

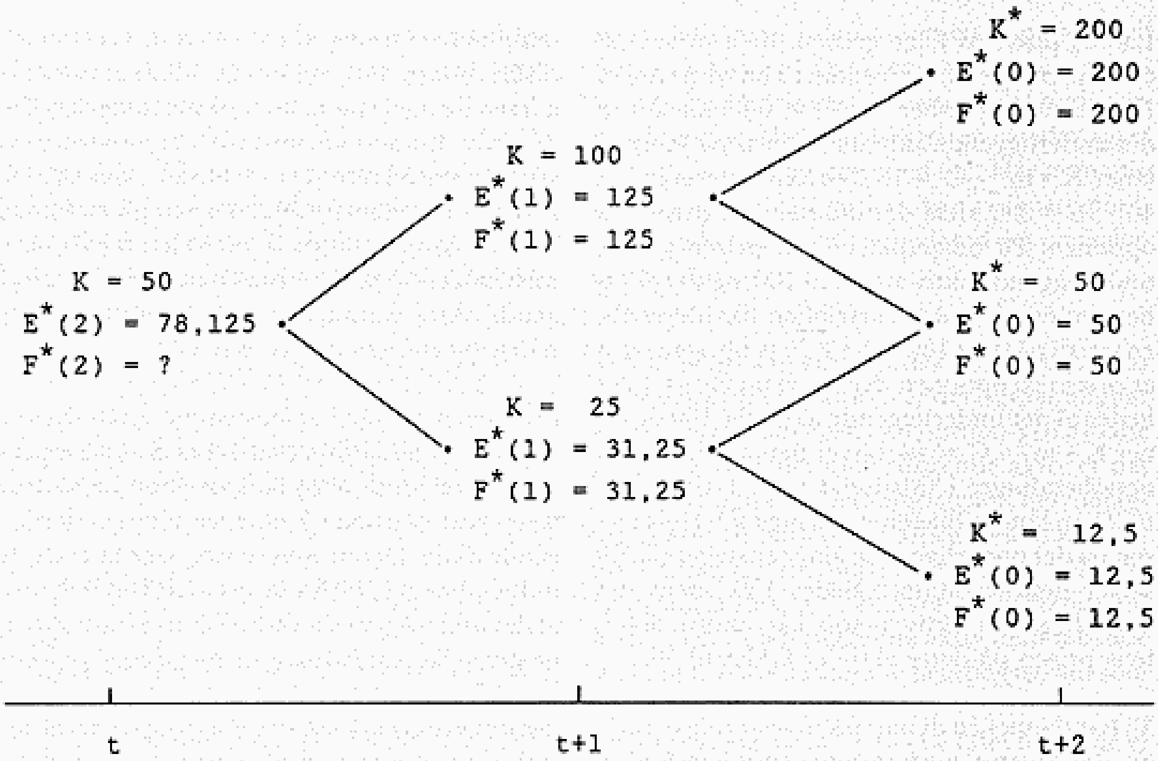
Problemet består i at bestemme aftalekursen to perioder før udløb. Lad os her danne en portefølje bestående af en lang position i 4 futures og en kort position i 5 enheder af det underliggende aktiv. Denne investering starter med en indbetaling på 250 fra salget af de fem enheder af det underliggende aktiv. Futureskontrakterne giver ikke anledning til betalinger ved købet. Efter en periode købes de fem enheder af det underliggende aktiv tilbage og futureskontrakterne afregnes. Hvis prisen på det underliggende aktiv er steget til 100, bliver udbetalingen $500 - 4 \cdot (125 - F^*(2)) = 4 \cdot F^*(2)$. Hvis prisen derimod er faldet til 25, da er udbetalingen $125 - 4 \cdot (25 - F^*(2)) = 4 \cdot F^*(2)$. Investeringen er derfor risikofri. Den eneste aftalekurs to perioder før udløb, der udelukker arbitragemuligheder, er således bestemt ved

$$4 \cdot F^*(2) = 250 \cdot 1{,}25$$

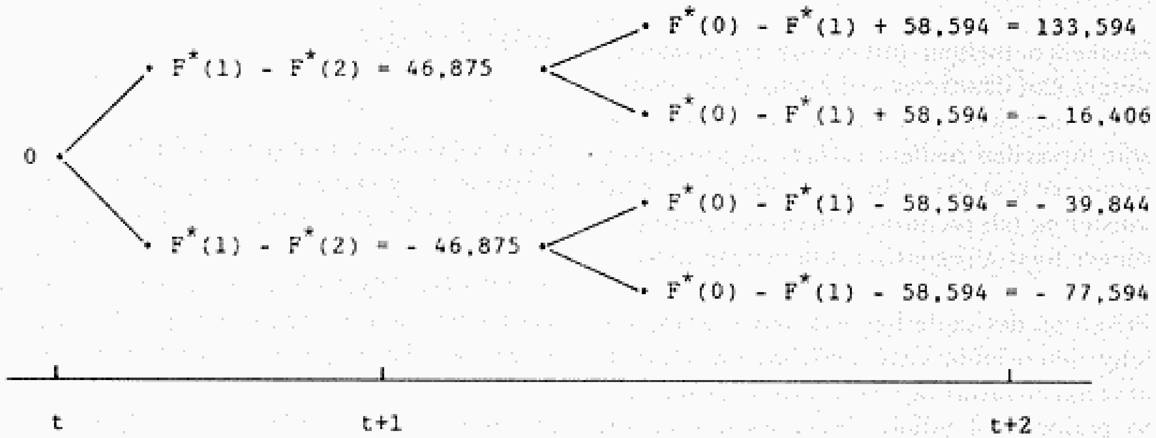
eller ækvivalent,

$$F^*(2) = 78{,}125$$

For at udelukke arbitragemuligheder skal aftalekursen i eksemplet være lig med terminskursen. Dette er et generelt resultat, når den risikofrie rente antages kendt i en future's løbetid (se Cox, Ingersoll og Ross (1981)), og det holder selvom det akkumulerede afkast på en future og afkastet på en terminsforretning generelt vil være forskellige. I eksemplet afhænger afkastet på futureskontrakten af, om prisen



på det underliggende aktiv starter med at stige for derefter at falde eller omvendt. I begge situationer vil spotkursen på det underliggende aktiv på futureskontraktens udløbstidspunkt være 50. Det akkumulerede afkast på futureskontrakten er imidlertid forskelligt i de to situationer. Afkastet på futureskontrakten er i første periode et tab eller en gevinst på 46,875. I anden periode er det akkumulerede afkast forskellen mellem spotkursen på tidspunkt t+2 og futureskursen på tidspunkt t+1 plus afkastet fra første periode forrentet med 25%:



Forskellen i afkastet ved spotkursen 50 på udløbstidspunktet skyldes alene den forrentning, man opnår fra den løbende afregning. Denne risiko på afkastet kan imidlertid elimineres ved at følge en dynamisk handelsstrategi. Aftalekursen på en future skal derfor være lig med terminskursen på en tilsvarende terminsforretning, når renten er kendt i futureskontraktens løbetid, og arbitragegevinster er udelukket.

Lad os vende tilbage til den generelle binomialmodel til prisfastsættelse af optioner. Modellen er selvfølgelig restriktiv, da den kræver, at udviklingen i prisen på det underliggende aktiv skal kunne beskrives ved en binomialproces. Lader man intervallerne mellem de tidspunkter, hvor prisen på det underliggende aktiv ændrer sig, blive meget korte og lader de mulige ændringer i prisen over en periode (u og d) være tilsvarende små, får man dog så mange mulige fremtidige priser på det underliggende aktiv, at det tit vil være en tilfredsstillende tilnærmelse til det underliggende aktivs rigtige prisproces. Lader man længden af intervallerne gå imod nul, får man en model, hvor prisen på det underliggende aktiv kan ændre sig på ethvert tidspunkt. Det vil sige, at vi får en model i kontinuert tid. Den optionsprisligning, der svarer til (7) blot formuleret i kontinuert tid, kaldes Black-Scholes formlen. Det er denne model, der har vist sig at være endog meget anvendelig ved handel med optioner.

Hvis man står på tidspunkt t og antager, at det underliggende aktivs forrentning (dvs. kursgevinsten i forhold til prisen) i et lille tidsrum af længden dt enten er

$\mu \cdot dt + \sigma \cdot (dt)^{1/2}$ med sandsynlighed ½

eller

$\mu \cdot dt - \sigma \cdot (dt)^{1/2}$ med sandsynlighed ½

vil man ved at lade dt blive mindre og mindre få den antagelse om udviklingen i prisen på det underliggende aktiv, som Black og Scholes antager i deres model. Når den fremtidige udvikling i prisen på det underliggende aktiv kan beskrives på denne måde, siges denne at følge en diffusionsproces. Prisen på det underliggende aktiv på optionens udløbstidspunkt er i dette tilfælde lognormalfordelt.

μ kan fortolkes som den forventede forrentning på det underliggende aktiv pr. tidsenhed og σ er standardafvigelsen på forrentningen pr. tidsenhed. σ kaldes også for volatiliteten på det underliggende aktiv.

Hvis σ og den risikofrie rentestyrke per tidsenhed, r, antages at være konstante i en call options restløbetid, da er den teoretiske pris på call optionen med restløbetiden T og aftalekursen E givet ved

$$(8)\ C(K,E,T) = K \cdot N(d) - E\,e^{-rT} \cdot N(d-\sigma \cdot T^{1/2})$$

hvor

$$d = \{\ \ln(K/E) + (r + \sigma^2/2) \cdot T\ \} / \sigma \cdot T^{1/2}$$

og N(d) er fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen taget i punktet d.

I lighed med binomialmodellen udledes Black-Scholes formlen (8) ved at sammensætte en portefølje bestående af en solgt option og køb af det underliggende aktiv i et sådant forhold, at porteføljens afkast i det kommende lille tidsrum af længden dt bliver risikofrit. Dette svarer også til, at det er muligt at sammensætte en portefølje bestående af en lang position i det underliggende aktiv og et lån således, at porteføljen i det næste lille tidsrum giver nøjagtig det samme afkast som optionen. Hvis man køber N(d) enheder af det underliggende aktiv og låner $E\,e^{-rT} \cdot N(d - \sigma \cdot T^{1/2})$, vil denne portefølje have samme værdi som optionen såvel på investeringstidspunktet som efter et lille tidsrum af længden dt. Dette forhold kan man genfinde i (8), hvor det første led er den pris, man giver for N(d) enheder af det underliggende aktiv, og det andet led er det beløb, man låner.

Hvis man har skrevet en call option, kan man således fjerne risikoen fra ændringer i det underliggende aktivs pris i det kommende lille tidsrum ved at købe N(d) enheder af det underliggende aktiv. Der gælder derfor, at

$$(9)\ \text{Delta} \equiv \frac{\partial C}{\partial K} = N(d)$$

Delta er hedgeforholdet i kontinuert tid, svarende til binominalmodellens hedgeforhold, m^{-1}. Delta vil altid ligge mellem 0 og 1, da $N(\bullet)$ er en fordelingsfunktion. Betragter man figur 1, er Delta for en given pris på det underliggende aktiv bestemt ved (9) som hældningen på kurven, der angiver optionens pris som funktion af prisen på det underliggende aktiv. Af formen på denne kurve eller ved at betragte (9) direkte, får man, at jo højere prisen er på det underliggende aktiv, jo mere vil Delta nærme sig 1. Tilsvarende gælder der, at Delta vil nærme sig 0, jo mindre prisen er på det underliggende aktiv.

Forrentningen på en option er meget følsom over for de faktorer, der bestemmer optionens pris. Grunden til den store følsomhed skal søges i, at optionen svarer til en gearet investering i det underliggende aktiv som vist i afsnit 2. For professionelle optionshandlere såvel som for private investorer er det derfor vigtigt hele tiden at være klar over, hvordan værdien af en optionsportefølje ændrer sig, når der sker ændringer i en af de størrelser, der bestemmer prisen på en option. Optionsverdnen er fuld af udtryk, som angiver, hvor meget prisen på optionen ændrer sig, når en af de prisbestemmende faktorer ændrer sig. Ud over Delta, som vi allerede har nævnt, vil vi kun se på en af dem, nemlig Omega. Omega er optionens priselasticitet mht. det underliggende aktivs pris, dvs. den procentvise ændring i optionens pris for én procents ændring i prisen på det underliggende aktiv:

$$(10)\ \text{Omega} \equiv \frac{K}{C} \bullet \frac{\partial C}{\partial K}$$

$$= 1 + E\ e^{-rT} \bullet N(d - \sigma \bullet T^{1/2})/C$$

Det følger af (10), at Omega altid er større end 1, og at den er en aftagende funktion af prisen på call optionen. Dette betyder, at en options forrentning varierer mere end forrentningen på det underliggende aktiv. På baggrund af diskussionen i afsnit 2 er dette ikke overraskende, idet en option kan sidestilles med en gearet investering i det underliggende aktiv. Hvis σ_C er standardafvigelsen pr. tidsenhed på optionens forrentning, kan det vises, at

$$(11)\ \sigma_C = \text{Omega} \bullet \sigma.$$

Standardafvigelsen på optionens forrentning er således større end standardafvigelsen på det underliggende aktivs forrentning, σ, da Omega er større end 1.

Selvom gevinstpotentialet på en option er stort, og det mulige tab er begrænset til optionens pris, der typisk er meget mindre end prisen på det underliggende aktiv, viser (11), at en investering i optioner er en risikobetonet investering. Gevinst- og tabspotentialer skal sættes i forhold til det investerede beløb. Usikkerheden på en investering skal måles på de mulige forrentninger og ikke de mulige gevinster.

Den teoretiske pris på en option bestemt ved Black-Scholes formlen afhænger kun af direkte observerbare størrelser, bortset fra rentestyrken r og det underliggende aktivs volatilitet, σ. Rentestyrken r kan bestemmes som den effektive rente på risikofrie obligationer med en restløbetid svarende til optionens restløbetid. Det underliggende aktivs volatilitet kan estimeres udfra den historiske prisudvikling på det underliggende aktiv (se Cox og Rubinstein (1985)). Den estimerede volatilitet er dog ikke nødvendigvis et godt udtryk for, hvor meget prisen på det underliggende aktiv forventes at ville variere i optionens restløbetid. Det er muligt at få et skøn over markedsdeltagernes forventninger til det underliggende aktivs volatilitet. Som nævnt i afsnit 2, stiger prisen på en option, når σ vokser. Når man kender markedsprisen på en option, kan man derfor benytte Black-Scholes formlen til at regne baglæns. Man finder på denne måde den volatilitet, der stemmer overens med markedsprisen på optionen. σ udregnet på denne måde kaldes den implicitte volatilitet. Hvordan volatiliteten bør findes, er dog mere en kunst end en videnskab.

Dette afsnit afsluttes med et eksempel, der viser, hvorledes prisen på en call option varierer med prisen på det underliggende aktiv. Endvidere angives hedgeforholdet Delta og elasticiteten Omega. Optionen har et års restløbetid og aftalekursen 50. Den risikofrie rentestyrke antages at være 10% p.a., og volatiliteten på det underliggende aktiv antages at være 40% p.a.

K	20	30	40	50	60	70	80
C	0.09	1.15	4.45	10.16	17.67	26,31	35,38
Delta	0,03	0,20	0,46	0,67	0,82	0.90	0.95
Omega	7.29	5.32	4.11	3,32	2,78	2,40	2,13

Tabel 4: Pris på call option, Delta og Omega ved forskellige priser på det underliggende aktiv.
$E = 50$, $T = 1$, $r = 10\%$, $\sigma = 40\%$.

Det fremgår af eksemplet, at når optionen er dybt i pengene, vil afkastet på optionen være næsten ligefrem proportional med afkastet på det underliggende aktiv (Delta er tæt på 1). Forrentningen på optionen varierer dog stadig mere end dobbelt så meget som forrentningen på det underliggende aktiv (Omega er over 2). Når optionen er langt ude af pengene, vil optionens afkast kun være en brøkdel af afkastet på det underliggende aktiv. Forrentningen på optionen varierer imidlertid mere end 7 gange så meget som forrentningen på det underliggende aktiv.

4. Optioner på konverterbare obligationer.

I de forrige afsnit er optioner analyseret helt generelt. I dette afsnit vil analysen konkret omhandle optioner med konverterbare obligationsserier som underliggende aktiv, da det er denne type optioner, der i øjeblikket handles, og i nærmeste fremtid vil blive handlet på det danske marked. Dette betyder, at vi må inddrage rentebetalinger og udtrækninger eksplicit i analysen, da disse påvirker den fremtidige kursudvikling på obligationerne i serien. Vi vil først indrage dette forhold i analysen, som om obligationerne ikke var konverterbare. Herefter vil konverteringsproblematikken blive analyseret.

Den forventede stigning over en periode i kursen på obligationer er mindre, jo større ydelsen er på obligationerne i perioden. En option på obligationer giver ingen ret til obligationernes ydelser. Større ydelser har derved en negativ effekt på call optioners pris og en positiv effekt på put optioners pris.

Vi vil analysere denne situation, som om optionerne er skrevet på en obligation, der har samme ydelsesprofil og en pris lig med kursen på serien. Obligationsseriens ydelsesprofil er kendt, og ydelserne på obligationen er dermed også kendt.

Hvis man køber en obligation med mere end 30 dage til næste rentetermin, skal der ved købet betales vedhængende renter svarende til renterne for perioden siden sidste termin. Er der mindre end 30 rentedage til næste rentetermin, modtages der ved køb af obligationen de renter, der svarer til de resterende dage, hvorefter man så ikke modtager renterne i førstkommende rentetermin. De efterfølgende ydelser på obligationen i optionens restløbetid er renten i renteterminerne, udtrækningerne samt eventuelle vedhængende renter ved optionens udløb. Vi benævner nutidsværdien af disse betalinger på en obligation med 100 kr. pålydende værdi med D'. Denne nutidsværdi er beregnet ved hjælp af den risikofrie rente, idet der ingen usikkerhed er knyttet til obligationens betalinger.

Optioner på obligationer er skrevet på basis af køberkursen på udløbstidspunktet, d.v.s. prisen pr. 100 kr. pålydende værdi. Den pålydende værdi på obligationen normeres derfor således, at obligationen på optionens udløbstidspunkt har en pålydende værdi på kr. 100. Hvis x angiver den andel af obligationen, der udtrækkes i optionens restløbetid, da er nutidsværdien af den normerede obligations betalinger givet ved

$$D = D' / (1 - x).$$

Betragt igen en call option som en gearet investering i det underliggende aktiv. Porteføljen består nu af en lang position i den normerede obligation, et lån for hvilket obligationen er stillet som eneste sikkerhed samt et lån uden kreditrisiko af en størrelse lig med nutidsværdien af den normerede obligations betalinger i optionens restløbetid. Nettoinvesteringen i denne portefølje er givet ved $K - E \bullet e^{-rT} + \pi - D$, hvor K er den normerede køberkurs. Hvis K' er køberkursen, som angivet i kurslisten, er den normerede køberkurs bestemt ved

$$K = K' / (1 - x)$$

I optionens restløbetid modtages der betalinger på obligationen. Hvis det risikofrie lån afdrages løbende med disse betalinger, er lånet netop forrentet og indfriet ved optionens udløb, idet lånets størrelse er bestemt på denne måde. Ved optionens udløb er værdien af denne portefølje derfor den samme som værdien af en call option skrevet på kursen på de underliggende obligationer. Skal arbitragemuligheder udelukkes, må porteføljen have samme pris som call optionen,

$$C = K - E \bullet e^{-rT} + \pi - D.$$

Idet yderen af lånet med kreditrisiko stadig kan forsikre sig fuldstændigt ved at købe en put option, får vi, at risikopræmien π må være lig med prisen på en put option. Vi kan nu også for den situation, hvor der er betalinger på det underliggende aktiv, formulere en put-call paritet:

$$C = K - D - E \bullet e^{-rT} + P$$

Anvender vi, at priserne på såvel call som put optioner ikke er negative, får vi følgende nedre grænser for priserne på call og put optioner:

$$C \geqslant max \{ O, K - D - E \bullet e^{-rT} \}$$

$$P \geqslant max \{ O, E \bullet e^{-rT} - (K - D) \}$$

Af disse nedre grænser fremgår det, at prisen på call optioner falder, mens prisen på put optioner stiger, som følge af betalingerne på de underliggende obligationer.

Sammenligner vi put-call pariteten og begrænsningerne med de tilsvarende i afsnit 2, hvor der ikke var betalinger på det underliggende aktiv, synes optionerne her at være skrevet på et aktiv, der ikke giver nogen betalinger, og som har prisen K - D. Det viser sig, at dette aktiv ikke er andet end en future på obligationen, hvor nutidsværdien af aftalekursen er K - D. Aftalekursen på en future på obligationen er den aftalekurs på optioner med samme udløbstidspunkt som futureskontrakten, der medfører, at prisen på en put option er lig med prisen på en call option (se afsnit 2). Af put-call pariteten får vi derfor, at aftalekursen på futureskontrakten er givet ved

$$E^*(T) = (K - D) \bullet e^{rT}$$

Det man skal gøre for at finde et explicit udtryk for prisen på en call option, er at observere, at på udløbstidspunktet er aftalekursen på en future lig med spotkursen på det underliggende aktiv. Dernæst anvendes et dynamisk hedgeargument som i afsnit 3. Hedgeargumentet skal blot basere sig på en portefølje af en future og en option i stedet for på en portefølje bestående af det underliggende aktiv og optionen. Antager man, at den risikofrie rente er konstant i optionens restløbetid, samt at aftalekursen på futureskontrakten følger en diffussionsproces med en konstant standardafvigelse på σ, får man følgende Black-Scholes formel for prisen på en call option med inkonverterbare obligationer som underliggende aktiv:

$$(12)\ C(K,T,E) = (K - D) \cdot N(d_1) - E\,e^{-rT} \cdot N(d_1 - \sigma \cdot T^{1/2})$$

hvor

$$d_1 = \{ \ln((K - D)/E) + (r + \sigma^2/2) \cdot T \} / \sigma \cdot T^{1/2}$$

Denne formel adskiller sig fra den sædvanlige Black-Scholes formel for call optioner, (8), ved, at det er den normerede køberkurs med fradrag af nutidsværdien af betalingerne på den normerede obligation i optionens restløbetid, der indgår, og ikke blot den nuværende køberkurs. Det er altså nutidsværdien af aftalekursen på en future med samme restløbetid, der indgår i formlen, og ikke kursen på obligationen. Tilsvarende er det standardafvigelsen på den procentvise ændring i aftalekursen på futureskontrakten, der skal benyttes i formlen, og ikke standardafvigelsen på den procentvise forrentning på obligationen.

De optioner, der i første omgang vil blive udstedt på det danske marked, er skrevet på obligationsserier, hvor debitorerne har en ret til med et vist varsel at købe obligationerne tilbage til kurs 100. Denne ret til at konvertere kan betragtes som en amerikansk call option. Debitorerne vil være interesseret i at udnytte optionen, når værdien af de resterende ydelser bliver større end omkostningen ved at udnytte optionen. Værdien af de resterende ydelser vokser, når renteniveauet falder. Omkostningen ved at udnytte optionen er dels udgiften ved at købe obligationerne tilbage til kurs pari og dels værdien af at have mistet konverteringsretten ved et yderligere rentefald. Optionen vil således blive udnyttet, når renteniveauet falder tilstrækkeligt meget. Ved hvilket renteniveau, dette vil ske, afhænger af mange forhold såsom skatteovervejelser, restløbetid på lånene og af, om lånene er optaget som kontantlån eller obligationslån (se Christensen (1988)).

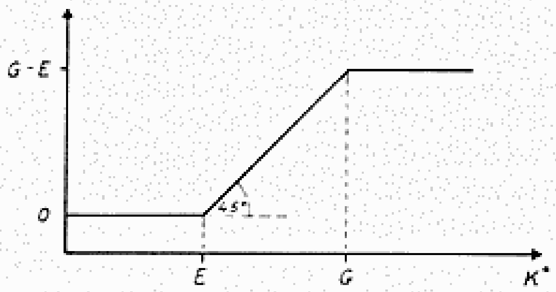
Debitorernes ret til at købe obligationerne tilbage til pari medfører, at der bliver en øvre grænse for obligationernes kurs. Dette har naturligvis en negativ effekt på prisen på call optioner med disse obligationer som underliggende aktiv.

På grund af muligheden for massive konverteringer med udtynding af mængden af handlede obligationer til følge er det foreslået af Garantifonden for Danske Optioner og Futures, at der indføres en regel, der begrænser det mulige afkast på en call option. Hvis køberkursen på de underliggende obligationer kommer op på et på forhånd fastlagt niveau, G, er optionens afkastmuligheder udtømte. Kursniveauet G kaldes derfor også en barriere for optionens afkast, og det maksimale afkast er (G-E). Barrieren fastsættes så tilpas lavt, at sandsynligheden for konverteringer er negligibel ved denne køberkurs. Reglen vil derfor have en større negativ effekt på prisen på en call option end den negative effekt af muligheden for konverteringer.

Det overvejes desuden at indføre en regel om, at afkastet på en option bliver låst fast, hvis køberkursen på de underliggende obligationer kommer op på kursen G. Det betyder, at blot køberkursen har været oppe på niveauet G i optionens løbetid, da opnås det maksimale afkast, uanset hvad køberkursen er ved optionens udløb. Niveauet G kaldes derfor også en absorberende barriere. Selvom afkastet bliver låst fast før optionens udløb, bliver afkastet imidlertid først udbetalt på optionens udløbstidspunkt.

Vi vil i det følgende illustrere en simpel metode til at vurdere størrelsesordenen af barrierens betydning for call optioners pris. Desuden angives effekten af, at barrieren er absorberende.

Lad os betragte to call optioner med en inkonverterbar obligation som underliggende aktiv. De to optioner har samme restløbetid. Den ene har aftalekursen E, og den anden har aftalekursen G, hvor G er større end E. Vi danner nu en portefølje bestående af en lang position i optionen med aftalekursen E og en kort position i optionen med aftalekursen G. Porteføljens afkastprofil ved optionernes udløb er illustreret i figur 4.



Figur 4: Afkastprofil på portefølje af optioner.

Afkastprofilen på porteføljen er den samme som afkastprofilen på en option, hvor der er en øvre grænse for afkastet på (G - E). Porteføljens afkast svarer dermed til afkastet på en option med konverterbare obligationer som underliggende aktiv, hvor der er en ikke-absorberende barriere på G. Prisen på en option med en ikke-absorberende barriere, CIAB, kan derfor bestemmes ved at anvende Black-Scholes formlen (12) for hver af optionerne i ovennævnte portefølje. Prisen bliver da

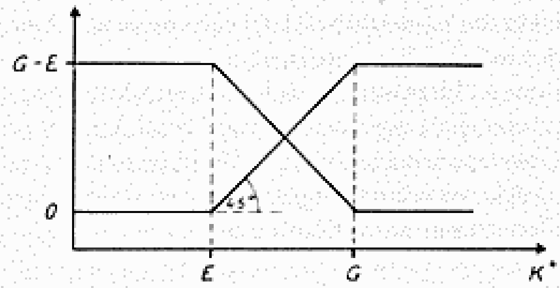
$$(13)\quad CIAB(K,E,G,T) = C(K,E,T) - C(K,G,T).$$

Prisen på en option med en absorberende barriere kan bestemmes som prisen på en option, hvor barrieren ikke er absorberende, CIAB, plus værdien af, at barrieren er absorberende, VAB. Prisen på en option med en absorberende barriere, CAB, bliver derfor

$$(14)\quad CAB(K,E,G,T) = CIAB(K,E,G,T) + VAB(K,E,G,T).$$

Prisen på optionen med en ikke-absorberende barriere kan umiddelbart findes ved hjælp (13) og Black-Scholes formlen (12), hvis det antages, at aftalekursen på en future på konverterbare obligationer følger en diffusionsproces med konstant standardafvigelse, samt at den risikofri rente er konstant. Værdien af, at barrieren er absorberende, kan findes under de samme antagelser. Formlen er givet i et appendix til artiklen.

For at få en ide om hvad der bestemmer værdien af, at barrieren er absorberende, kan vi betragte situationen, hvor køberkursen på de underliggende obligationer er lig med barrieren G. I denne situation ved vi, at afkastet på optionen på udløbstidspunktet er lig med dens maksimale afkast (G - E). Optionen svarer dermed til en sikker investering, og prisen på optionen må derfor være nutidsværdien af (G - E).



Figur 5: Call option med absorberende barriere ved kursen K* = G.

Af figur 5 fremgår det, at dette også svarer til, at man køber en call option med en ikke-absorberende barriere, køber en put option med aftalekursen G og sælger en put option med aftalekursen E. Afkastet på en sådan portefølje er lig med afkastet på en call option med en absorberende barriere ved udløb. Det fremgår da også af formlen i appendixet, at værdien af, at barrieren er absorberende, generelt kan skrives som forskellen mellem prisen på to put optioner. Udfra kendskabet til for eksempel hedgeforhold og elasticiteter for de enkelte optioner i (14) kan de tilsvarende størrelser for optionen med en absorberende barriere umiddelbart beregnes.

Vi har nu identificeret tre specielle forhold, man skal være opmærksom på, når man vil prisfastsætte call optioner med konverterbare obligationer som underliggende aktiv:

(a) Betalingerne på de underliggende obligationer.
(b) Øvre grænse for afkastet på optionen.
(c) Evt. absorberende øvre grænse.

De første to forhold har begge en negativ effekt på call optionens pris. Betalingerne på de underliggende obligationer i optionens restløbetid medfører, at køberkursen på obligationerne ikke stiger så meget, som den ellers ville have gjort. Den øvre grænse for afkastet på optionen betyder,at optionen aldrig kan blive mere værd end nutidsværdien af det maksimale afkast:

$$CAB(K,E,G,T) \leq (G - E) \cdot e^{-rT}$$

Denne øvre grænse for værdien af optionen medfører, at når optionen er dybt i pengene, har en stigning i såvel den risikofri rente som i restløbetiden en negativ effekt på værdien af optionen i modsætning til en positiv effekt for almindelige optioner. Når der er en øvre grænse for afkastet på optionen, vil det have en positiv effekt på optionens pris, at grænsen er absorberende. Dette skyldes, at den maksimale gevinst opnås, hvis obligationerne har været oppe på niveauet G i optionens løbetid, selv når kursen på obligationerne ved optionens udløb er mindre end barrieren G. I det følgende gives et eksempel, der illustrerer størrelsesordenen af disse tre forholds effekt på call optioners pris.

Eksemplet bygger på 9% annuitetsobligationer med kvartårlige terminer og udløb 1. oktober 2006. Vi betragter en call option den 1. januar 1988. Optionen udløber den 1. oktober 1988. Betalingerne på den underliggende obligation i optionens restløbetid er en ydelse på kr. 2,7726 kr. i hver af terminerne 1/4, 1/7 og 1/10. Ved en risikofri rentestyrke på 10% p.a. kan nutidsværdien af disse betalinger bestemmes til

$$D' = 7{,}9137$$

I optionens restløbetid bliver 1,6% af obligationen udtrukket:

$$x = 0{,}0160$$

Den normerede nutidsværdi af betalingerne på obligationen kan derfor bestemmes til

$$D = 7{,}9137/(1 - 0{,}0160) = 8{,}0424$$

De øvrige parametre, der anvendes, er en barriere på G = 102, og en standardafvigelse på σ = 15% p.a.

For aftalekurserne 85, 90 og 95 og køberkurserne 85, 90, 95 og 100 på de underliggende obligationer er der i tabel 5 beregnet teoretiske værdier for følgende fem størrelser i nævnte rækkefølge:

- Pris på call option ved direkte indsættelse i Black-Scholes formlen (8).
- Pris på call option under hensyntagen til betalingerne på de underliggende obligationer, men uden hensyntagen til barrieren, d.v.s. priserne er beregnet ved hjælp af (12).
- Pris på call option under hensyntagen til betalingerne på de underliggende obligationer og barrieren, men uden hensyntagen til, at barrieren er absorberende, d.v.s. priserne er bestemt ved hjælp af (13).
- Værdien af at barrieren er absorberende, VAB, (A1).
- Pris på call option under hensyntagen til betalingerne på de underliggende obligationer og absorberende barriere, d.v.s. priserne er beregnet ved hjælp af (14).

K'	K - D	E	85	90	95
85	78,34	(8) C	8,00	5,16	3,09
		(12) C	3,82	2,11	1,07
		CIAB	3,45	1,74	0,71
		VAB	0,32	0,30	0,25
		CAB	3,77	2,04	0,95
90	83,42	(8) C	12,02	8,47	5,60
		(12) C	6,87	4,29	2,48
		CIAB	5,86	3,27	1,46
		VAB	0,86	0,80	0,63
		CAB	6,72	4,07	2,09
95	88,51	(8) C	16,52	12,48	8,94
		(12) C	10,76	7,40	4,76
		CIAB	8,46	5,10	2,47
		VAB	1,86	1,69	1,27
		CAB	10,33	6,79	3,74
100	93,59	(8) C	21,29	16,95	12,93
		(12) C	15,22	11,29	7,92
		CIAB	10,85	6,92	3,55
		VAB	3,38	2,97	2,14
		CAB	14,22	9,89	5,69

Tabel 5: Teoretiske priser på call optioner givet ved formlerne (8) og (12) - (14).
$T = 0,75$, $r = 10\%$, $\sigma = 15\%$, $D' = 7,9137$, $x = 1,6\%$ og $G = 102$.

4. Afslutning.

Af eksemplet fremgår det klart, at det har en stor betydning for de teoretiske priser på optioner skrevet på obligationer, at Black-Scholes modellen justeres korrekt. Hensyntagen til betalingerne på de underliggende obligationer reducerer således prisen med helt op til 60% af den pris, man får ved en ukritisk anvendelse af Black-Scholes formlen. Den øvre grænse for afkastet på optionerne reducerer yderligere prisen med fra 10% til 50%. Samtidig udgør værdien af, at barrieren er absorberende, op til halvdelen af den teoretiske pris. Størrelsesordenen af disse forholds effekt på optionernes pris afhænger naturligvis af restløbetiden og af, hvor tæt køberkursen på de underliggende obligationer er på den øvre grænse.

De kritiske forudsætninger bag Black-Scholes modellen og de foretagne justeringer er, at den risikofri rente såvel som standardafvigelsen på den procentvise ændring i aftalekursen på futures begge antages at være konstante i optionens restløbetid. Man kan endog vise, at disse antagelser betyder, at modellen ikke er teoretisk konsistent (se Jensen og Nielsen (1988)). Specielt antagelsen om en konstant standardafvigelse er kritisk. Man kan såvel teoretisk som empirisk påvise, at standardafvigelsen aftager, når kursen på de underliggende obligationer nærmer sig det niveau, hvor konverteringer bliver aktuelle.

Ved prisfastsættelse af optioner skrevet på konverterbare obligationer skal man i princippet starte med en stokastisk proces, der beskriver den fremtidige udvikling i rentestrukturen for inkonverterbare obligationer. Herudfra kan debitorsidens optimale konverteringsstrategi bestemmes. Under antagelse af, at kreditorsiden indser, at debitorsiden vil følge den optimale strategi, kan man dernæst bestemme den stokastiske proces, der beskriver den fremtidige udvikling i rentestrukturen for konverterbare obligationer. Endelig, givet denne stokastiske proces, kan man bestemme teoretisk konsistente priser på optioner og futures skrevet på konverterbare obligationer (se Christensen (1988)).

Anlægger man en positiv synsvinkel, er det interessante spørgsmål imidlertid ikke, hvorvidt modellen er teoretisk konsistent eller ej. Spørgsmålet er i stedet, hvilken model der bedst opfylder sit formål. Dette er et empirisk spørgsmål, som vi ikke tager stilling til i denne artikel.

Analysen i denne artikel bygger dels på køb- og beholdstrategier og dels på dynamiske investeringsstrategier. Antagelsen om ingen transaktionsomkostninger kan derfor synes restriktiv, og specielt restriktiv for analysen i afsnit 3 og afsnit 4. Denne analyse benytter, at hedgeporteføljen kan justeres løbende uden transaktionsomkostninger på baggrund af udviklingen i prisen på det underliggende aktiv. Problemet er, at investoren skal foretage en afvejning af transaktionsomkostningerne ved en justering af porteføljen og den risiko han vil pådrage sig, hvis hedgeporteføljen ikke justeres og dermed ikke giver en perfekt hedge. Dette betyder, at prisen på en option kan afvige fra den pris, der vil være gældende, når der ikke er transaktionsomkostninger. Forskellen vil være bestemt af investorernes risikoaversion og størrelsen af transaktionsomkostningerne. Forskellen kan dog ikke blive større end, at arbitragemuligheder er udelukket for de investorer, der har de mindste transaktionsomkostninger.

Det danske skattesystem har en asymmetrisk beskatning både på tværs af forskellige værdipapirer og på tværs af investorer. Uden transaktionsomkostninger og uden restriktioner på køb og salg af værdipapirer udelukker dette beskatningssystem, at der kan dannes en ligevægt på det finansielle marked uden arbitragemuligheder (se Schaefer (1982)). De relative priser på værdipapirer vil derfor blive bestemt af de investorer, der har lettest adgang til køb og salg af værdipapirer og som har de laveste transaktionsomkostninger. Der må forventes et næsten perfekt sammenfald mellem disse investorer og de investorer, der er næringsskattepligtige (f.eks. pengeinstitutter, vekselerere og forsikringsselskaber), dvs. de investorer, der ved opgørelsen af den skattepligtige indkomst skal medregne kursgevinster og kurstab på alle finansielle fordringer uanset typen. Disse investorer vil kunne rangordne forskellige investeringer på basis af afkastet før skat. Det kan derfor forventes, at beskatningen ikke har nogen stor rolle for, hvorledes optioner og futures prisfastsættes i forhold til prisen på det underliggende aktiv. Beskatningssystemets udformning vil dog have en væsentlig betydning for de øvrige investorers valg mellem investeringer i optioner og futures på den ene side og invsteringer i de underliggende aktiver på den anden side. Dette er et af de spørgsmål, der behandles i den efterfølgende artikel af J. Egelund og M. Møller.

Referencer.

Christensen, Peter Ove, The Optimal Call-strategy on and the Pricing of Danish Callable Bond Issues, Working Paper, Institut for Virksomhedsledelse, Odense Universitet, 1988.

nens restløbetid. Man kan endog vise, at disse antagelser betyder, at modellen ikke er teoretisk konsistent (se Jensen og Nielsen (1988)). Specielt antagelsen om en konstant standardafvigelse er kritisk. Man kan såvel teoretisk som empirisk påvise, at standardafvigelsen aftager, når kursen på de underliggende obligationer nærmer sig det niveau, hvor konverteringer bliver aktuelle.

Ved prisfastsættelse af optioner skrevet på konverterbare obligationer skal man i princippet starte med en stokastisk proces, der beskriver den fremtidige udvikling i rentestrukturen for inkonverterbare obligationer. Herudfra kan debitorsidens optimale konverteringsstrategi bestemmes. Under antagelse af, at kreditorsiden indser, at debitorsiden vil følge den optimale strategi, kan man dernæst bestemme den stokastiske proces, der beskriver den fremtidige udvikling i rentestrukturen for konverterbare obligationer. Endelig, givet denne stokastiske proces, kan man bestemme teoretisk konsistente priser på optioner og futures skrevet på konverterbare obligationer (se Christensen (1988)).

Anlægger man en positiv synsvinkel, er det interessante spørgsmål imidlertid ikke, hvorvidt modellen er teoretisk konsistent eller ej. Spørgsmålet er i stedet, hvilken model der bedst opfylder sit formål. Dette er et empirisk spørgsmål, som vi ikke tager stilling til i denne artikel.

Analysen i denne artikel bygger dels på køb- og beholdstrategier og dels på dynamiske investeringsstrategier. Antagelsen om ingen transaktionsomkostninger kan derfor synes restriktiv, og specielt restriktiv for analysen i afsnit 3 og afsnit 4. Denne analyse benytter, at hedgeporteføljen kan justeres løbende uden transaktionsomkostninger på baggrund af udviklingen i prisen på det underliggende aktiv. Problemet er, at investoren skal foretage en afvejning af transaktionsomkostningerne ved en justering af porteføljen og den risiko han vil pådrage sig, hvis hedgeporteføljen ikke justeres og dermed ikke giver en perfekt hedge. Dette betyder, at prisen på en option kan afvige fra den pris, der vil være gældende, når der ikke er transaktionsomkostninger. Forskellen vil være bestemt af investorernes risikoaversion og størrelsen af transaktionsomkostningerne. Forskellen kan dog ikke blive større end, at arbitragemuligheder er udelukket for de investorer, der har de mindste transaktionsomkostninger.

Det danske skattesystem har en asymmetrisk beskatning både på tværs af forskellige værdipapirer og på tværs af investorer. Uden transaktionsomkostninger og uden restriktioner på køb og salg af værdipapirer udelukker dette beskatningssystem, at der kan dannes en ligevægt på det finansielle marked uden arbitragemuligheder (se Schaefer (1982)). De relative priser på værdipapirer vil derfor blive bestemt af de investorer, der har lettest adgang til køb og salg af værdipapirer og som har de laveste transaktionsomkostninger. Der må forventes et næsten perfekt sammenfald mellem disse investorer og de investorer, der er næringsskattepligtige (f.eks. pengeinstitutter, vekselerere og forsikringsselskaber), dvs. de investorer, der ved opgørelsen af den skattepligtige indkomst skal medregne kursgevinster og kurstab på alle finansielle fordringer uanset typen. Disse investorer vil kunne rangordne forskellige investeringer på basis af afkastet før skat. Det kan derfor forventes, at beskatningen ikke har nogen stor rolle for, hvorledes optioner og futures prisfastsættes i forhold til prisen på det underliggende aktiv. Beskatningssystemets udformning vil dog have en væsentlig betydning for de øvrige investorers valg mellem investeringer i optioner og futures på den ene side og invsteringer i de underliggende aktiver på den anden side. Dette er et af de spørgsmål, der behandles i den efterfølgende artikel af J. Egelund og M. Møller.

Referencer.

Christensen, Peter Ove, The Optimal Call-strategy on and the Pricing of Danish Callable Bond Issues, Working Paper, Institut for Virksomhedsledelse, Odense Universitet, 1988.

Cox, John C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross, The relationship between forward prices and futures prices , s. 321-346 i Journal of Financial Economics, vol 9, 1981.

Cox, John C. and Mark Rubinstein, *Options Markets*, Prentice-Hall, New Jersey, 1985.

Jensen, Bjarne Astrup og Jørgen Aase Nielsen, Black-Scholes priser for obligationsoptioner , Publikation nr. 88/1, Afdeling for Operationsanalyse, Aarhus Universitet, 1988.

Schaefer, Stephen M., Taxes and Security Market Equilibrium , i Sharpe and Cootner (eds.): *Financial Economics - Essays in Honor of Paul Cootner*, Prentice-Hall, 1982.

Appendix:

Den teoretiske pris på en call option med en absorberende øvre grænse for afkastet er udledt i Jensen og Nielsen (1988) under de samme antagelser, som vi anvender i denne artikel. Værdien af, at barrieren er absorberende, kan bestemmes ved en omskrivning af formel (9) i Jensen og Nielsen (1988).

$$\text{(A1) } VAB(K,E,G,T) =$$

$$\left(\frac{K-D}{G-D}\right)^{-\delta} \bullet \{ Put(G, G \bullet (K-D)/(G-D), T)$$

$$- Put(G, E \bullet (K-D/(G-D), T)$$

hvor

$$\delta \equiv \frac{2 \bullet (r - \varrho)}{\sigma^2}$$

$$\varrho \equiv \ln(G/(G-D)) / T$$

Put(S,X,T) er prisen på en put option med aftalekurs X, restløbetid T og skrevet på et aktiv, der giver en konstant direkte forrentning på ϱ, og som har prisen S:

$$Put(S,X,T) = X\, e^{-rT} \bullet N(-d_2)$$

$$- S\, e^{-\varrho T} \bullet N(-d_2 + \sigma \bullet T^{1/2})$$

hvor

$$d_2 = \{ \ln(S/X) + (r - \varrho + \sigma^2/2) \bullet T \} / \sigma \bullet T^{1/2}$$