Finansielle kalkulationer

– et befolkningsstatistisk udgangspunkt

Af Ernst Lykke Jensen*)

Ved studiet af principperne for investering i og teorien for afkast af obligationer, for hvilke udtrækning finder sted, kan det være nyttigt at gøre brug af betragtningsmåder, terminologi og resultater fra den statistiske teori for ventetider, specielt befolkningsstatistikken. Udtrækningstidspunktet for en obligation er dens dødstidspunkt, levetiden er tidsrummet fra emission til udtrækning, afdragsprofilen afspejler dødeligheden, overlevelsestavlen svarer til forløbet af restgælden, etc.

*) Professor, dr. polit., Institut for teoretisk statistik, Handelshøjskolen i København. Artiklen modtaget september, 1984.

Finansielle kalkulationer

– et befolkningsstatistisk udgangspunkt

Af Ernst Lykke Jensen*)

Ved studiet af principperne for investering i og teorien for afkast af obligationer, for hvilke udtrækning finder sted, kan det være nyttigt at gøre brug af betragtningsmåder, terminologi og resultater fra den statistiske teori for ventetider, specielt befolkningsstatistikken. Udtrækningstidspunktet for en obligation er dens dødstidspunkt, levetiden er tidsrummet fra emission til udtrækning, afdragsprofilen afspejler dødeligheden, overlevelsestavlen svarer til forløbet af restgælden, etc.

*) Professor, dr. polit., Institut for teoretisk statistik, Handelshøjskolen i København. Artiklen modtaget september, 1984.

I. Overlevelsestavlen for en annuitetsobligation med påtrykt rente r og løbetid m terminer er

$$l_{r,m}(j) = \frac{a_{\overline{m-j+1}|r}}{a_{\overline{m}|r}}, \quad j = 1,\ldots,m \quad .$$

Obligationens levetid T er en stokastisk variabel med sandsynligheds-fordeling

$$p_{r,m}(j) = \frac{v_r^{\,m-j+1}}{a_{\overline{m}|r}}, \quad j = 1,\ldots,m \quad ,$$

hvor $v_r = 1/(1+r)$ er diskonteringsfaktoren hørende til rentefoden r. Obligationens middellevetid er

$$E_{r,m}(T) = \sum_{j=1}^{m} l_{r,m}(j) \quad .$$

I [4] er der bl.a. redegjort for, hvorledes den effektive rente kan spaltes i direkte rente, kursgevinst og forventet udtrækningsgevinst, når restløbetiden formindskes med en termin:

$$i = \frac{r}{k(r,i,m)} + \frac{k(r,i,m-1)-k(r,i,m)}{k(r,i,m)} + p_1\,\frac{1-k(r,i,m-1)}{k(r,i,m)} \quad .$$

Når det drejer sig om annuitetsobligationer, er $p_1 = v_r^{\,m}/a_{\overline{m}|r}$, og

$$k(r,i,m) = \frac{a_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|r}}$$

er kursen for en obligation med påtrykt rente r, effektiv rente i og løbetid m.

Det formelmæssige grundlag i [2] og [3] for det mistede beskatningsgrundlag ved transformation af et obligationslån til et kontantlån kan også udlægges som en opspaltning af den effektive rente. Lad $M_{r,i,m}(j)$ betegne forskellen i periode j mellem debitorrenten og kreditorrenten i procent af obligationshovedstolen, d.v.s.

$$M_{r,i,m}(j) = i\,k(r,i,m)\,l_{i,m}(j) - r\,l_{r,m}(j), \quad j = 1,\ldots,m \quad .$$

Heraf fås ved summation følgende udtryk for det totale mistede (udiskonterede) beskatningsgrundlag

$$M_{r,i,m} = i\ k(r,i,m)E_{i,m}(T) - r\ E_{r,m}(T) \quad .$$

For annuitetslån fås specielt

$$M_{r,i,m}(j) = i\ \frac{a_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|r}} \frac{a_{\overline{m-j+1}|i}}{a_{\overline{m}|i}} - r\ \frac{a_{\overline{m-j+1}|r}}{a_{\overline{m}|r}}$$

$$= \frac{(1 - v_i^{m-j+1}) - (1 - v_r^{m-j+1})}{a_{\overline{m}|r}}$$

$$= \frac{v_r^{m-j+1} - v_i^{m-j+1}}{a_{\overline{m}|r}} \qquad = p_{r,m}(j) - k(r,i,m)p_{i,m}(j) \quad .$$

Dette resultat kan nedskrives direkte, idet den j'te terminsydelse i et annuitetslån med rentesats ρ og løbetid m fordeles mellem afdrag og rente i forholdet $v_\rho^{m-j+1} : (1-v_\rho^{m-j+1})$. Ved summation fås

$$M_{r,i,m} = 1 - k(r,i,m) \quad .$$

Sammenholdes de fundne udtryk for $M_{r,i,m}$, kan den effektive rente spaltes i direkte rente og kurstab (resp. kursgevinst) efter formlen

$$i = \frac{E_{r,m}(T)}{E_{i,m}(T)} \frac{r}{k(r,i,m)} + \frac{1}{E_{i,m}(T)} \frac{1-k(r,i,m)}{k(r,i,m)} \quad .$$

Resultatet kan formuleres på følgende måde: Den effektive rente over den forventede levetid for en annuitetsobligation udstedt til parikurs (påtrykt rente lig med markedsrente) er sammensat af dels et kurstab og dels direkte rente over den forventede levetid for en obligation udstedt til underkurs (påtrykt rente mindre end markedsrenten.

Fra et statistisk synspunkt fortolkes $M_{r,i,m}/k(r,i,m)$, d.v.s. det mistede beskatningsgrundlag i procent af kontantlånshovedstolen, geometrisk som forskellen mellem to arealer: et areal under overlevelsestavlen, som denne tager sig ud fra debitors synspunkt, multipliceret med kontantlånsrenten, med fradrag af et areal under overlevelsestavlen, som den tager sig ud fra kreditors synspunkt, multipliceret med den direkte rente. Fra et beskatningsmæssigt synspunkt er situationen som bekendt: Obligationsejerens kursgevinst, der sædvanlig-

vis ikke er skattepligtig, forvandles via kontantlånet til en renteudgift, som for låntager sædvanligvis er fradragsberettiget.
Ikke alene for en kreditforening, men også for skatteyderen med den høje marginale skatteprocent, er det fristende at forsøge teorien praktiseret: Stift et højt forrentet annuitetslån og brug provenuet til køb af en kongruent portefølje af lavt forrentede annuitetsobligationer. Likviditetsmæssige hensyn kan nødvendiggøre, at udtrækningsrisikoen må imødegås med et efter omstændighederne stort investeringsbeløb (evt. en gentagelse af transaktionen flere år i træk), så de store tals lov træder i funktion. En anden mulighed (skattevæsenets velvilje ikke taget i betragtning) vil være at gøre brug af teorien i den deterministiske version, f.eks. en transaktion med pantebreve. Lånes der eksempelvis 69113 kr. på et 15-årigt 16% pantebrev udstedt til pari kurs, så kan der erhverves for 100.000 kr. 9% pantebreve, idet

$$k(0.045,0.08,30) = \frac{a_{\overline{30|}0.08}}{a_{\overline{30|}0.045}} = 0.69113 \quad .$$

Ved summation af en kolonne tal i en rentetabel [1] finder man

$$E_{0.08,30}(T) = 20.8103 \quad \text{og} \quad E_{0.045,30}(T) = 18.7054 \quad .$$

Beholdes pentebrevene til udløb, bliver den til transaktionen hørende samlede renteudgift

$$0.08 \times 69113 \times 20.8103 = 115061 \text{ kr.} \quad ,$$

medens den samlede renteindtægt bliver

$$0.045 \times 100000 \times 18.7054 = 84174 \text{ kr.} \quad .$$

Den skattepligtige indtægt kan således nedbringes med 30.887 kr. over en 15-årig periode, i overensstemmelse med en kursgevinst på netop dette beløb af 9% pantebrevet. Det tidsmæssige forløb af disse poster fremgår af tabellen og kan aflæses i en rentetabel som

$1 - v_{0.08}^{31-j}$, , resp. $1 - v_{0.045}^{31-j}$, $j = 1,\ldots,30$, efterfulgt

af en multiplikation med 6.139 kr., som er terminsydelsen.

$$\frac{69113}{a_{\overline{30|}0.08}} = 6139 = \frac{100000}{a_{\overline{30|}0.045}} \quad .$$

Termin	Renteudgift	Renteindtægt	Reduktion af skat-tepligtig indtægt
1	5529	4500	1029
2	5480	4426	1054
3	5428	4349	1079
4	5370	4269	1101
5	5309	4184	1125
6	5242	4097	1145
7	5171	4005	1166
8	5094	3909	1185
9	5010	3808	1202
10	4920	3703	1217
11	4822	3594	1228
12	4717	3479	1238
13	4602	3359	1243
14	4480	3234	1246
15	4347	3104	1243
16	4204	2967	1237
17	4049	2824	1225
18	3882	2675	1207
19	3701	2519	1182
20	3506	2356	1150
21	3296	2186	1110
22	3069	2008	1061
23	2822	1822	1000
24	2557	1628	929
25	2270	1425	845
26	1961	1213	748
27	1626	991	635
28	1266	759	507
29	876	517	359
30	455	264	191
Ialt	115061	84174	30887

II. Hvis vi med D og K betegner de parametersæt, der er gældende set fra henholdsvis debitor- og kreditorsiden, så kan de generelle formler for nettorenteudgiften skrives

$$M(j) = i\,k\,l_D(j) - r\,l_K(j)\ , \qquad j = 1,\ldots,m\ ,$$

og

$$M = i\,k\,E_D(T) - r\,E_K(T) \quad .$$

For annuitetslån (A) har vi vist, at disse udtryk kan skrives på formen

$$M_A(j) = \frac{v_r^{m-j+1} - v_i^{m-j+1}}{a_{\overline{m}|r}}\ , \qquad j = 1,\ldots,m\ ,$$

og

$$M_A = 1 - k_A\ , \qquad \text{hvor} \qquad k_A = \frac{a_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|r}} \quad .$$

De transaktioner, der i afsnit I er kædet sammen med disse formler, kan naturligvis praktiseres med andre lånetyper end annuitetslån. Hvis det f.eks. drejer sig om at transformere et lavt forrentet stående lån (ST) til et højt forrentet lån af samme type, vil vendingen 'skattebegunstiget langfristet opsparing ved gældsstiftelse' nok være mere rimelig end udtrykket 'skattetænkning', idet dispositionen har et forsikringsmæssigt præg.
For et stående lån gælder $l = 1$ og dermed

$$M_{ST}(j) = i\,k_{ST} - r \quad \text{for alle } j = 1,\ldots,m\ .$$

Kursen for et stående lån skal åbenbart tilfredsstille ligningen
$$(i\,k_{ST} - r)\,s_{\overline{m}|i} = 1 - k_{ST}\ ,$$
hvoraf
$$k_{ST} = \frac{r}{i} + \left(1 - \frac{r}{i}\right)v_i^m$$

$$= 1 - (i - r)\,a_{\overline{m}|i} \quad .$$
Det første udtryk giver
$$i\,k_{ST} - r = (i - r)\,v_i^m\ ,$$
det vil sige, $M_{ST}(j)$ er konstant:
$$M_{ST}(j) = (i - r)\,v_i^m\ ,$$
og
$$M_{ST} = m(i - r)\,v_i^m \quad .$$

Hvis vi igen matcher et 15-årigt 16% pantebrev til kurs pari med et 15-årigt 9% pantebrev, nu til kurs

$$k_{ST} = 1 - (0.08 - 0.045)a_{\overline{30}|0.08} = 0.60598 \quad ,$$

Så bliver kursgevinsten større end i eksemplet med annuitetslån, nemlig 39.402 kr. mod 30.887 kr. Forklaringen er, at terminsydelsen vokser, når det lavt forrentede stående lån transformeres til det højt forrentede, nemlig fra 4.5% af 100.000 kr. til 8% af 60.598 kr. pr. termin i 30 terminer. Den skattepligtige indtægt reduceres med 347,84 kr. pr. termin, og belønningen herfor kommer om 15 år i form af en skattefri kursgevinst på 39.402 kr.

III. Et serielån afvikles med lige store afdrag pr. termin. Heraf følger, for $j = 1, \dots, m$,.

$$p_D(j) = p_K(j) = \frac{1}{m} \quad ,$$

$$l_D(j) = l_K(j) = \frac{m-j+1}{m} \quad ,$$

og

$$E_D(T) = E_K(T) = \frac{m+1}{2} \quad .$$

Nettorenteudgiften i periode j kan følgelig beregnes efter formlen

$$M_S(j) = (i\ k_S - r)\frac{m-j+1}{m} \quad ,$$

hvor k_S er serielånets kurs, det vil sige

$$k_S = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{r}{i} + (1 - \frac{r}{i})\right)v_i^j = \frac{r}{i} + \frac{1}{m}(1 - \frac{r}{i})a_{\overline{m}|i} \quad .$$

Heraf fås følgende sammenhæng mellem kurserne for serielån og stående lån

$$i\ k_S - r = \frac{1}{m}(i - r)a_{\overline{m}|i} = \frac{1}{m}(1 - k_{ST}) \quad .$$

Man ser, at $M_S(j)$ er lineært aftagende og kan omskrives til

$$M_S(j) = \frac{m-j+1}{m^2}(i - r)a_{\overline{m}|i} = \frac{m-j+1}{m^2}(1 - k_{ST}) \quad .$$

Nettorenteudgiften kan således på simpel måde beregnes ud fra kursen på det stående lån, og der gælder

$$M_S = \frac{m+1}{2m}(i - r)a_{\overline{m}|i} = \frac{m+1}{2m}(1 - k_{ST}) \quad .$$

En af formlerne foran kan selvfølgelig også udlægges som en opspaltning af den effektive rente:

$$i = \frac{r}{k_S} + \frac{\frac{1}{m}(1 - k_{ST})}{k_S}$$

Forskellen mellem serielånets effektive og direkte rente er altså lig med kursgevinsten pr. termin af det tilhørende stående lån.
Udveksler man et lavt forrentet serielån til kurs k_S med et højt forrentet serielån til kurs pari, så er forskellen mellem afdragene i de to lån $(1 - k_S)/m$. Ligningen

$$M_S(j) = \frac{1 - k_S}{m} \quad ,$$

løst med hensyn til j, giver derfor den termin $\hat{j}$, i hvilken terminsydelsen bliver den samme for de to lån. Resultatet kan angives på formen

$$\frac{m - \hat{j} + 1}{m} = \frac{1 - k_S}{1 - k_{ST}}$$

I det gennemgående eksempel med m = 30, i = 0.08 og r = 0.045 fås

$$\frac{31 - \hat{j}}{30} = \frac{0.27332}{0.39402} \quad , \qquad \hat{j} = 10 \quad .$$

De fem første år er ydelsen på kontantlånet størst. Over hele løbetiden er ydelsen på obligationslånet størst; forskellen er, i procent af obligationshovedstolen, lig med

$$D_S = 1 - k_S - M_S \quad ,$$

i eksemplet altså knap 7%: 0.27332 − 0.20358 = 0.06974. Herved adskiller en transaktion med serielån sig fra en tilsvarende transaktion med annuitetslån; i sidstnævnte tilfælde er ydelsesrækkerne ens, og følgelig er også $D_A = 0$, i overensstemmelse med det tidligere anførte resultat $M_A = 1 - k_A$.
I øvrigt kan man benytte f.eks. forholdet M_A/M_S til at sammenligne effekten af de beskrevne lånetransaktioner med henholdsvis annuitetslån og serielån. Man har umiddelbart

$$\frac{M_A}{M_S} = \frac{2m}{m+1}\,\frac{1 - k_A}{1 - k_{ST}}$$

I det gennemgående eksempel med m = 30, og k_A = 0.69113 og k_{ST} = 0.60598 for r = 0.045 og i = 0.08, fås

$$\frac{M_A}{M_S} = 1.52 \quad .$$

Reduktionen i skattepligtig indkomst er 52% større i en transaktion med annuitetslån end i en tilsvarende transaktion med serielån. Hertil kommer så, at serielånstransaktionen belaster likviditeten i de 10 første terminer af låneperioden.
Indsættes udtrykkene for k_A og k_{ST} fås

$$\frac{M_A}{M_S} = \frac{2m}{m+1}\,\frac{a_{\overline{m}|r} - a_{\overline{m}|i}}{a_{\overline{m}|r}}\,\frac{1}{(i-r)a_{\overline{m}|i}} \qquad = \frac{2m}{m+1}\,\frac{a^{-1}_{\overline{m}|i} - a^{-1}_{\overline{m}|r}}{i-r} \quad .$$

Den sidste brøk i dette udtryk er forholdet mellem ydelsesprocenterne og rentesatserne for kontantlånet og obligationslånet hørende til transaktionen med annuitetslån.
Også ved en sammenligning af serielån med stående lån kommer annuitetssynspunktet ind i billedet. Man finder nemlig

$$\frac{M_{ST}}{M_S} = \frac{2m^2}{m+1} \cdot \frac{v_i^m}{a_{\overline{m}|i}} \quad ,$$

hvor sidste faktor er første afdrag i kontantlånet, når det afvikles efter annuitetsprincippet.

Litteraturliste

[1] *Tage Henriksen:* »Udvidede rentetabeller«. 2. udgave, Samfundslitteratur, København, 1977.

[2] *Bjarne Astrup Jensen:* »Amortisationsplaner og kontantlånsrenter«. Working Paper 84-4, Institut for Finansiering, Handelshøjskolen i København, 1984.

[3] *Michael Møller:* »Kontantlån og skatteprovenu«. Juristen og Økonomen, 61, 1979, 287-292.

[4] *Henrik Ramlau-Hansen:* »Udtrækningschance og effektiv rente for obligationer«. Nationaløkonomisk tidsskrift, 120, 1982, 361-378.

[5] »Et debatoplæg om en skattereform«. Danmarks Sparekasseforening. København 1984.

[6] *Niels Chr. Nielsen:* »Skattereform og skattesatser«. Berlingske Tidende, 7. september 1984, 1. sektion side 13.

[7] *Mogens Lykketoft:* »Skattetænkning i kursgevinster«. Berlingske Tidende, 8. september 1984, 1. sektion side 8.