

Intern rentefod, varighed og kapitalværdi

Af Peter Lynggaard*)

Resumé

Den interne rentefod udlægges sædvanligvis som værende lig forrentningen af den investerede kapital. Går man et skridt dybere, melder der sig følgende spørgsmål: Hvad er det for en kapital, som bliver forrentet med den interne rentefod? Hvor længe bliver kapitalen forrentet med denne rentefod? Hvori består egentlig forskellen mellem interne rentefods metode og kapitalværdimetoden? Formålet med denne artikel er at bringe øget klarhed omkring disse spørgsmål. Derfor er der først en redegørelse for grundprincippet i interne rentefods metode, og her vises bl.a., at den interne rentefod kan fortolkes som den gennemsnitlige rente af det i gennemsnit investerede beløb. Dernæst følger en redegørelse for tidsdimensionen i interne rentefods metode, og denne redegørelse er bygget op omkring varighedsbegrebet (durationen). Herefter påvises, at der er to afgørende forskelle mellem kapitalværdimetoden og interne rentefods metode:

- a) Renten. Interne rentefods metode omfatter kun forrentningen af kapitalen, så længe den er bundet i investeringen. Kapitalværdimetoden angiver resultatet som en funktion af både den interne rentefod og af geninvesteringsrentefoden.*
- b) Tidsdimensionen. Interne rentefods metode knytter sig tidsmæssigt til varigheden, mens kapitalværdimetoden tidsmæssigt knytter sig til levetiden.*

Sidst i artiklen vises, hvorledes varigheden forbinder interne rentefods metode med kapitalværdimetoden.

*) Lektor ved Handelshøjskolen i Århus. Artiklen modtaget november 1982.

Intern rentefod, varighed og kapitalværdi

Af Peter Lynggaard*)

Resumé

Den interne rentefod udlægges sædvanligvis som værende lig forrentningen af den investerede kapital. Går man et skridt dybere, melder der sig følgende spørgsmål: Hvad er det for en kapital, som bliver forrentet med den interne rentefod? Hvor længe bliver kapitalen forrentet med denne rentefod? Hvori består egentlig forskellen mellem interne rentefods metode og kapitalværdimetoden? Formålet med denne artikel er at bringe øget klarhed omkring disse spørgsmål. Derfor er der først en redegørelse for grundprincippet i interne rentefods metode, og her vises bl.a., at den interne rentefod kan fortolkes som den gennemsnitlige rente af det i gennemsnit investerede beløb. Dernæst følger en redegørelse for tidsdimensionen i interne rentefods metode, og denne redegørelse er bygget op omkring varighedsbegrebet (durationen). Herefter påvises, at der er to afgørende forskelle mellem kapitalværdimetoden og interne rentefods metode:

- a) Renten. Interne rentefods metode omfatter kun forrentningen af kapitalen, så længe den er bundet i investeringen. Kapitalværdimetoden angiver resultatet som en funktion af både den interne rentefod og af geninvesteringsrentefoden.*
- b) Tidsdimensionen. Interne rentefods metode knytter sig tidsmæssigt til varigheden, mens kapitalværdimetoden tidsmæssigt knytter sig til levetiden.*

Sidst i artiklen vises, hvorledes varigheden forbinder interne rentefods metode med kapitalværdimetoden.

*) Lektor ved Handelshøjskolen i Århus. Artiklen modtaget november 1982.

1. Indledning

En investerings kapitalværdi er som bekendt defineret ved

$$(1) \quad K_0 = \sum_{t=1}^n B_t (1+i)^{-t} + B_0$$

hvor B_t er nettobetalingen i tidspunkt t og i er kalkulationsrentefoden. Den interne rentefod betegnes fremover med bogstavet r , og den er defineret som den r -værdi, der tilfredsstiller følgende ligning

$$(2) \quad K_0 = \sum_{t=1}^n B_t (1+r)^{-t} + B_0 = 0$$

Det forudsættes i resten af artiklen, at $B_0 > 0$ og at $B_t \geq 0$ for $t = 1, 2, \dots, n$. Endvidere forudsættes, at summen af indbetalingerne er større end investeringsudgiften. Denne investeringstype har netop én intern rentefod.

I næste afsnit vises grundprincippet i interne rentefods metode. Dernæst introduceres varighedsbegrebet »duration«, og sidst i artiklen vises, hvorledes varigheden forbinder interne rentefods metode med kapitalværdimetoden.

2. Interne rentefods metode

a. Beregning og fortolkning.

Den interne rentefod beregnes normalt ved at sætte kapitalværdien lig med nul, og det derved fundne procenttal sammenlignes så med et andet procenttal (kalkulationsrentefoden eller den interne rentefod i en alternativ investering). Denne snævert renteorienterede synsvinkel er givetvis skyld i mange misforståelser vedrørende fortolkningen af den interne rentefod, for de beløb, som den interne rentefod skal sættes i relation til, kommer ikke eksplicit frem. Det gør de derimod ved en anden beregningsmetode, hvor problemet anskues som en kapitalbindings- og kapitalfrigørelsesproces. Denne alternative fremgangsmåde vil her blive gennemgået ved hjælp af et taleksempel.

Eksempel

Der er givet følgende betalingsrække:

t	0	1	2	3	4	5
B_t	- 100.000	50.000	40.000	30.000	20.000	8.832

Den alternative fremgangsmåde udspringer af følgende spørgsmål: Hvis man indskyder 100.000 kr. i tidspunkt 0 og til gengæld modtager 50.000 kr. i tidspunkt 1, 40.000 kr. i tidspunkt 2 osv., hvilken rente har man så fået, og hvorledes har kapitalbindingen (= projektets saldo) varieret over tiden?

Svaret på disse spørgsmål findes ved at opstille tabeller magen til tabel 1 og så prøve sig frem, indtil regnestykket går op. Det gør det her ved en rentefod på 20% p.a., dvs. at projektets interne rentefod er 20% p.a. Endvidere ses, at i tidspunkt 0 er der bundet 100.000 kr. i projektet, i tidspunkt 1 er der bundet 70.000 kr., i tidspunkt 2 er der bundet 44.000 kr. osv. Disse værdier kaldes projektbalancen, og de burde egentlig anføres med negative fortegn, for det er penge, som projektet skylder virksomheden (Mao, 1969, s. 198).

Tabel 1. Udviklingen i projektets saldo (= udviklingen i bundet kapital) når den interne rentefod anvendes som kalkulationsrentefod.

År	Projektets saldo, primo	Rente	Ny saldo	Frigjort kapital	Saldo efter kapitalfrigørelsen
1	100.000	20.000	120.000	50.000	70.000
2	70.000	14.000	84.000	40.000	44.000
3	44.000	8.800	52.800	30.000	22.800
4	22.800	4.560	27.360	20.000	7.360
5	7.360	1.472	8.832	8.832	0
Sum	244.160	48.832		148.832	

Den saldoiterative og den traditionelle fremgangsmåde er ikke nødvendigvis alternative, for man kan udmærket først finde den interne rentefod ved hjælp af ligning (2) og dernæst illustrere resultatet som vist i tabel 1. Det væsentlige er at få opstillet projektbalancen, idet den viser udviklingen i den bundne kapital.

Sumkolonnen under tabellen viser, at summen af renterne (»overskuddet») er lig summen af frigjort kapital minus det i tidspunkt nul investerede beløb. Desuden viser tabellen, at den interne rentefod ikke kan fortolkes som renten af det i tidspunkt nul investerede beløb, for denne påstand er kun formelt korrekt i det første år. (Tilsvarende kan den effektive rente heller ikke fortolkes som værende lig renten af hele låneprovenuets). Den interne rentefod er renten af den til enhver tid bundne kapital, idet den knytter sig til projektbalancen. Tabellen viser derfor også, at forholdet mellem beregnet rente og beregnet saldo er konstant og lig den interne rentefod:

$$\frac{20.000}{100.000} = \frac{14.000}{70.000} = \frac{8.800}{44.000} = \frac{4.560}{22.800} = \frac{1.472}{7.360} = 0,20$$

Heraf følger, at forholdet mellem summen af tællerne og summen af nævnerne også er lig den interne rentefod:

$$\frac{48.832}{244.160} = 0,20.$$

Dividerer vi nu i tæller og nævner med $n = 5$, fås tallene på årsbasis, dvs. at den interne rentefod kan fortolkes som den gennemsnitlige rente af det i gennemsnit investerede beløb. (Jfr. f.eks. Babcock, 1976, s. 6).

b. Det tidsmæssige forløb.

Forrentningsproblemet vil nu blive belyst med udgangspunkt i følgende spørgsmål: Hvor stor en del af det investerede beløb på 100.000 kr. bliver forrentet med 20% i 1 år, hvor stor en del med 20% i 2 år, osv.?

Når vi kender den interne rentefod, lader dette spørgsmål sig let besvare, idet ligning (2) kan omformes til:

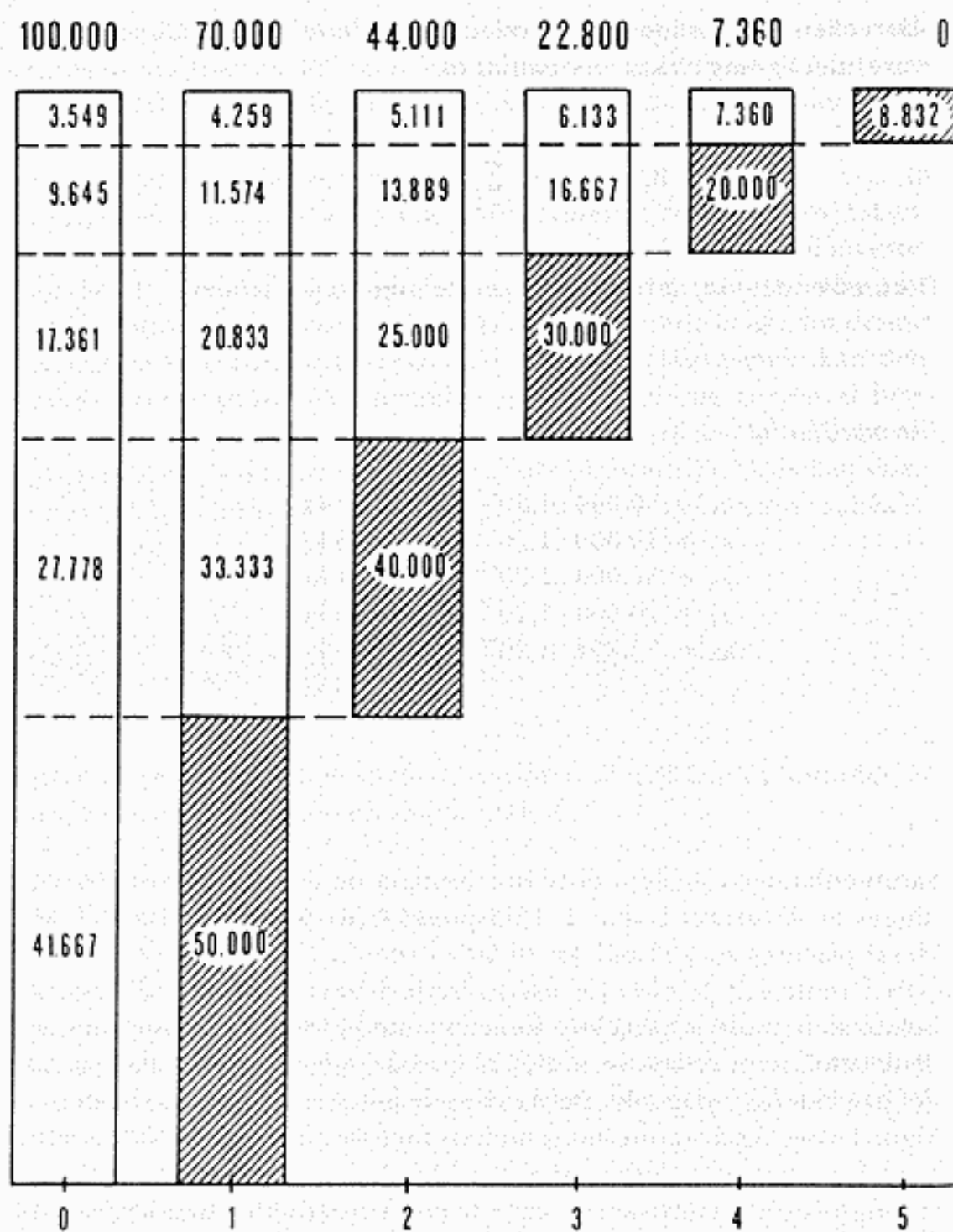
$$(3) \quad B_0 = \sum_{t=1}^n B_t(1+r)^{-t} = \sum_{t=1}^n a_t, \text{ hvor } a_t = B_t(1+r)^{-t}$$

Dermed er det vist, at beløbene a_t er de søgte kapitalandele.

Eksempel, fortsat

$$\begin{aligned} a_1 &= 50.000 \cdot 1,20^{-1} = 41.667 \text{ kr.} \\ a_2 &= 40.000 \cdot 1,20^{-2} = 27.778 \text{ kr.} \\ a_3 &= 30.000 \cdot 1,20^{-3} = 17.361 \text{ kr.} \\ a_4 &= 20.000 \cdot 1,20^{-4} = 9.645 \text{ kr.} \\ a_5 &= 8.832 \cdot 1,20^{-5} = \underline{3.549 \text{ kr.}} \\ &\quad \underline{100.000 \text{ kr.}} \end{aligned}$$

Sammenhængen mellem disse beregninger og de i tabel 1 viste beregninger er illustreret i figur 1. I tidspunkt 0 investeres ialt 100.000 kr. Heraf placeres $a_1 = 41.667$ kr. til 20% i rente i 1 år, $a_2 = 27.778$ kr. til 20% i rente i 2 år osv. De uskraverede felter illustrerer således de beløb, som »inde i« projektet forrentes med 20% p.a., og summen af disse beløb, som er vist oven over hver søjle, udgør projektbalancen på det pågældende tidspunkt. De skraverede felter er de frigjorte beløb. Figur 1 viser også, at interne rentefods metode så at sige forlader beløbene frit svævende i luften. Men der bliver de jo ikke hængende. Investeringsprocessen fortsætter, og i overensstemmelse med sædvanlig praksis gøres nu den forudsætning, at frigjorte midler bliver geninvesteret til kalkulationsrentefoden i . Det næste bliver derfor at se på det samlede forløb frem til investeringsprocessens ophør ved udgangen af det femte år.



Figur 1

3. Akkumuleret værdi, varighed og realiseret afkast

Indbetalingeres akkumulerede værdi i tidspunkt n er defineret som:

$$(4) \quad K_n = \sum_{t=1}^n B_t(1+i)^{n-t}$$

Ved indsættelse af $(1+r)^{-t} \cdot (1+r)^t$ fås:

$$\begin{aligned} K_n &= \sum_{t=1}^n B_t(1+r)^{-t} (1+r)^t (1+i)^{n-t} \\ (5) \quad &= \sum_{t=1}^n a_t(1+r)^t (1+i)^{n-t} \end{aligned}$$

Dette udtryk viser, at slutværdien er et resultat af, at beløbene a_t en del af tiden (t) er blevet forrentet med den interne rentefod r , og en anden del af tiden ($n-t$) med kalkulationsrentefoden i . Dette er anskueliggjort i figur 2, hvor det er forudsat, at $i = 0,12$. Slutværdien bliver da 203.737 kr.

Den gennemsnitlige forrentning, også kaldet det realiserede afkast, y , er defineret ud fra følgende ligning:

$$(6) \quad B_0(1+y)^n = K_n$$

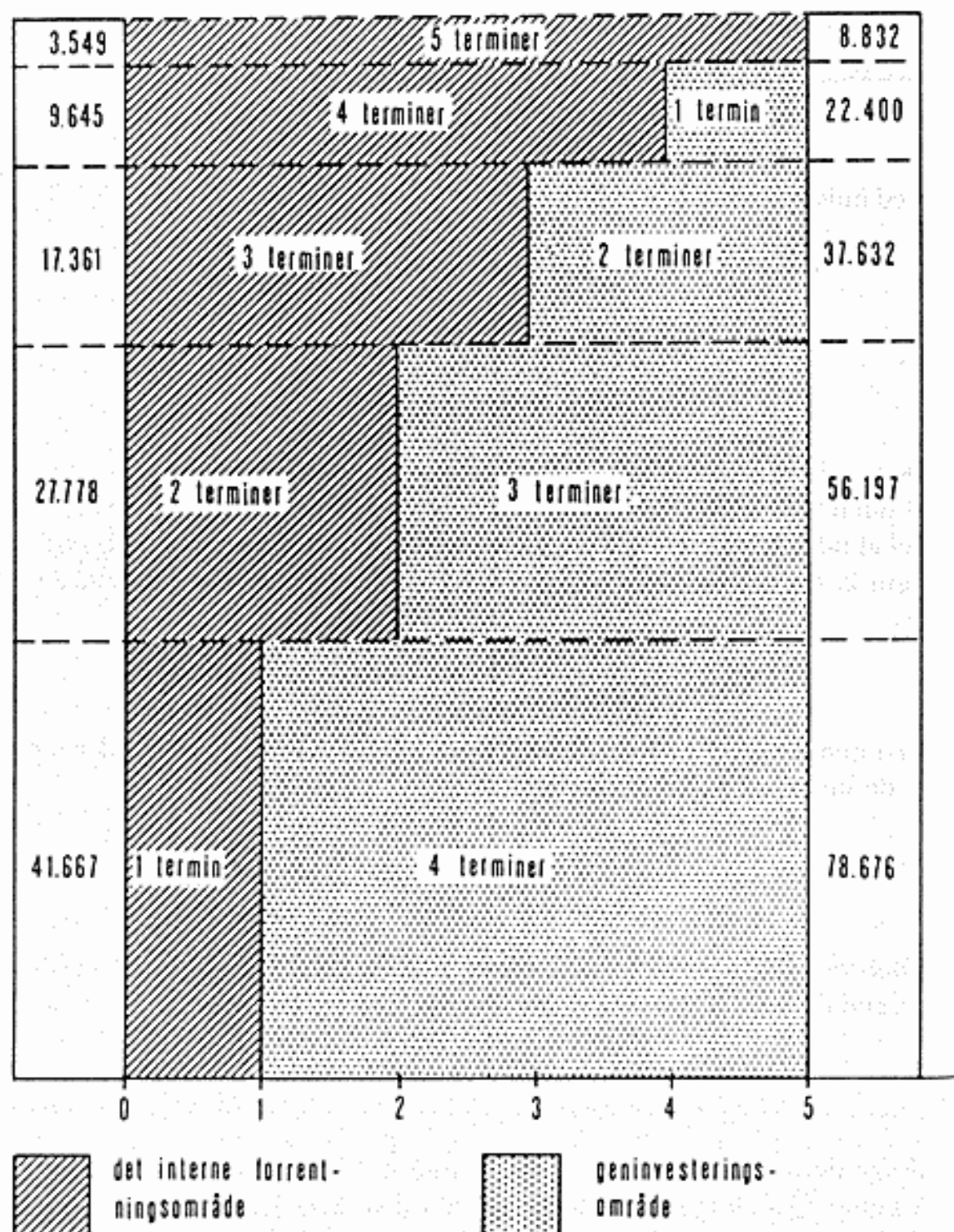
I Babcock (1976) vises, at den gennemsnitlige forrentning med særdeles god tilnærmelse kan beregnes som:

$$(7) \quad y \approx \frac{D}{n} \cdot r + (1 - \frac{D}{n}) \cdot i$$

Ifølge denne ligning kan y opfattes som et vejet gennemsnit af r og i . Vægten $\frac{D}{n}$ kan fortolkes som den del af tiden, hvor kapitalen er placeret til den interne rentefod r , mens vægten $(1 - \frac{D}{n})$ kan fortolkes som den resterende del af tiden, hvor kapitalen er placeret til kalkulationsrente-

100.000

203.737



Figur 2

foden i . Symbolet D står for varigheden, på engelsk kaldet duration, og den er defineret på følgende måde:

$$(8) \quad D = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot B_t(1+r)^{-t}}{\sum_{t=1}^n B_t(1+r)^{-t}}$$

Dette udtryk kan også skrives som

$$(9) \quad D = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot a_t}{B_0} = \sum_{t=1}^n t \cdot w_t$$

hvor w_t er vægte med summen 1. Varigheden er med andre ord et vejet gennemsnit af betalingstidspunkterne $1, 2, \dots, n$, og vægtene er de kapitalandele, der placeres til den interne rentefod i henholdsvis 1, 2, 3 terminer osv. (For en mere udførlig behandling af varighedsbegrebet henvises til Grosen, 1982).

Varigheden D svarer til det interne forrentningsareal i figur 2. Det indses lettest ved at antage, at søjlen i tidspunkt nul repræsenterer et beløb på 1 krone. Det interne forrentningsareal bliver da:

$$(10) \quad \sum_{t=1}^n t \cdot \frac{a_t}{B_0} = \sum_{t=1}^n t \cdot w_t = D$$

Geninvesteringsarealet kan tilsvarende skrives som:

$$(11) \quad \sum_{t=1}^n (n-t) \cdot \frac{a_t}{B_0} = \sum_{t=1}^n (n-t) w_t = n - D$$

Dermed er det vist, at den interne rentefods vægtandel i formel (7) er lig det interne forrentningsområdes andel af det samlede areal, og at geninvesteringsrentens vægtandel tilsvarende er lig geninvesteringsområdets andel af totalarealet. (Her er også forklaringen på, at akkumuleringsprocessen i figur 2 er illustreret ved et vandret forløb).

Tabel 2. Illustration af varighedsberegning, når den interne rentefod bruges som kalkulationsrentefod. ($i = r = 0,20$).

Termin	Netto- betaling	Nutidsværdi af nettobet.	Vægtandel	Vejede løbetider
t	B_t	$B_t(1+i)^{-t}$	w_t	$t \cdot w_t$
1	50.000	41.667	0,416	0,42
2	40.000	27.778	0,278	0,56
3	30.000	17.361	0,174	0,52
4	20.000	9.645	0,097	0,39
5	8.832	3.549	0,035	0,18
		100.000	1,000	$D = 2,07$

Varigheden kan beregnes som vist i tabel 2. Indsættes den her fundne D -værdi i (7) fås:

$$y \approx \frac{2,07}{5} \cdot 0,20 + \frac{2,93}{5} \cdot 0,12 = 0,153$$

Heraf ses, at i ca. $\frac{2}{5}$ af tiden er kapitalen blevet forrentet med den interne rentefod på 20% p.a., og i ca. $\frac{3}{5}$ af tiden med geninvesteringsrenten på 12% p.a., og det giver en gennemsnitlig forrentning på 15,3% p.a.

I ovennævnte eksempel er den eksakte y -værdi 15,2959%, den approksimative 15,2901%. Så nøjagtig er approksimationsformlen naturligvis ikke hver gang, men gennemgående er afvigelserne meget små, og læsere, der er interesseret i formlens nøjagtighed, kan indhente yderligere oplysninger hos artiklens forfatter. I denne her fremstilling er det nok så væsentligt, at formel (7) på en simpel og let tilgængelig måde illustrerer investeringsprocessen ved at vise, hvorledes det samlede resultat både afhænger af den interne rentefod og af geninvesteringsrenten. Denne anvendelse af formlen vil blive uddybet i næste afsnit.

4. Varigheden som bindeled mellem interne rentefods metode og kapitalværdimetoden

Interne rentefods metode har altid været investeringsteoriens problembar, og der kan anføres mange gode grunde til, at den er uegnet som valgkriterium (jfr. f.eks. Lynggaard, s. 80-88).

Med udgangspunkt i

$$(7) \quad y \approx \frac{D}{n} \cdot r + (1 - \frac{D}{n}) \cdot i$$

kan metodeproblemet anskues på en helt ny måde, idet formelen har den interessante egenskab, at den forbinder interne rentefods metode med kapitalværdimetoden. Man ser tydeligt af (7), hvorledes den interne rentefod tidsmæssigt knytter sig til varigheden, mens det realiserede afkast, y , tidsmæssigt knytter sig til hele projektets levetid. Rangordning efter faldende intern rentefod er derfor ikke noget brugbart valgkriterium, idet metodens tidsdimension knytter sig til varighederne. Kapitalværdimetoden opsamler derimod hele resultatet og dækker tidsmæssigt hele investeringens levetid.

Af (7) ses også, at maksimering af den gennemsnitlige forrentning ikke er noget korrekt valgkriterium. Det skyldes dels, at y er et relativt tal, idet det angiver forrentningen pr. investeret krone, og dels, at y tidsmæssigt følger levetiderne. Kun når lige store beløb forrentes lige længe, dvs. kun når investeringssummer og levetider er ens, kan man være sikker på, at rangordning efter faldende y -værdi giver samme rækkefølge som rangordning efter faldende kapitalværdi. Er levetiderne derimod forskellige, kan gennemsnitsbetragtningen let føre til fejlkonklusioner. Ser vi igen på ovennævnte taleeksempel og antager vi nu ydermere, at der tillige komme nogle meget små indbetalinger i tidspunkterne 6, 7 og 8, så vil den interne rentefod (og kapitalværdien) stige lidt, men det vil ved indsættelse i (7) ikke kunne opveje faldet i den interne rentefods vægtandel, så den gennemsnitlige rente vil falde.

Sammenfattes disse betragtninger, bliver konklusionen, at varigheden forsyner interne rentefods metode med en hensigtsmæssig tidsdimension, som ved indsættelse i approksimationsformel (7) giver en god og let forståelig beskrivelse af investeringsforløbet. Betingelserne for at anvende det realiserede afkast som valgkriterium er sjældent opfyldt ved realinvesteringer. Derimod er de ofte opfyldt ved sammenligning af finansinvesteringer.

Litteratur:

- Babcock, G.: A Modified Measure of Duration. Working Paper, University of Southern California, 1976.
- Babcock, G.: Duration and Bond Portfolio Analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November 1978.
- Grosen, A.: Måling af afkast og risiko for fastforrentede fordringer – en ny synsvinkel. København 1982.
- Lynggaard, P.: Investeringskalkuler. København 1981.
- Mao, J. T. C.: Quantitative Analysis of Financial Decisions. London, 1969.