

Tids-serie modeller og Trend-analyser

Påvisning af en principiel fejl ved anvendelse af mindste kvadratafvigelsers metode til prognosticering

Af Bent Vabø*)

Blandt metoder til prognosticering af markedsudviklinger indtager trend-analyser en fremtrædende plads, enten anvendt i en serie (time series) model eller som led i en kausal-analyse, hvor trend-analyser ofte finder anvendelse på en eller flere af de indgående parametre. Nedenstående betragtninger er begrænset til gennemførelsen af trend-analyser i tids-serie modeller, omend de konklusioner, man kommer frem til, også til en vis grad er relevante for kausal-analyser.

Trend-metoden er som bekendt baseret på den antagelse, at den fremtidige udvikling vil fortsætte ad det spor, som aftegnes af den (seneste) hidtidige udvikling. Det bliver derfor interessant at analysere den hid-

*) Produktchef, Novo Industri A/S. Artiklen modtaget august 1976.

Tids-serie modeller og Trend-analyser

Påvisning af en principiel fejl ved anvendelse af mindste kvadratafvigelsers metode til prognosticering

Af Bent Vabø*)

Blandt metoder til prognosticering af markedsudviklinger indtager trend-analyser en fremtrædende plads, enten anvendt i en serie (time series) model eller som led i en kausal-analyse, hvor trend-analyser ofte finder anvendelse på en eller flere af de indgående parametre. Nedenstående betragtninger er begrænset til gennemførelsen af trend-analyser i tids-serie modeller, omend de konklusioner, man kommer frem til, også til en vis grad er relevante for kausal-analyser.

Trend-metoden er som bekendt baseret på den antagelse, at den fremtidige udvikling vil fortsætte ad det spor, som aftegnes af den (seneste) hidtidige udvikling. Det bliver derfor interessant at analysere den hid-

*) Produktchef, Novo Industri A/S. Artiklen modtaget august 1976.

tidige udvikling, idet de registrerede salgsdata er fremkommet som resultatet af en række overlejlrede komponenter. I litteraturen foreslås det normalt at regne med fire komponenter, nemlig trend (T), sæsonvariation (S), cykliske variationer (C) og tilfældige eller irregulære variationer (I). Med disse betegnelser beskriver Ferber (2) en konventionel tids-serie model som værende enten additiv svarende til formlen

$$Y = T + S + C + I$$

eller multiplikativ med formlen

$$Y = T \times S \times C \times I$$

hvor Y er de oprindelige tids-serie værdier for den betragtede størrelse, f.eks. salget.

I sin simpleste form består trend-analysen i at afbilde den hidtidige udvikling, f.eks. salget, som funktion af tiden og tegne en linie igennem de afsatte punkter og derpå forlænge denne linie passende ud i prognoseperioden. Som oftest vil man yderligere antage, at trend'en er lineær (evt. logaritmisk), således at trend-kurven kan indtegnes som en ret linie på den grafiske (evt. semilogaritmiske) afbildning af udviklingen.

Hvis man vælger at gøre de ovenstående antagelser, bliver opgaven da at fastlægge den korrekte trend-linie, som vel kan defineres som den trend-linie, der giver de mest korrekte resultater med hensyn til den forudberegnete udvikling sammenlignet med den udvikling, der faktisk ville ske, såfremt de gjorte antagelser holder, d.v.s. såfremt udviklingen rent faktisk fortsætter som indiceret af de hidtidige data. En evt. usikkerhed om, hvorvidt udviklingen faktisk vil fortsætte som antaget, vil ifølge sagens natur ikke have indflydelse på placeringen af trend-linien, men må på anden måde tages med ind i overvejelserne ved den budgettering, der senere gennemføres på basis af analysen.

I den eksisterende omfangsrige litteratur om budgettering og specielt forecasting anbefales følgende metoder til fastlæggelse af trend-linien:

1. Indtegnning på øjemål
2. Glidende gennemsnit
3. Mindste kvadratafvigelsers metode

idet den sidstnævnte metode almindeligvis anbefales som den, der giver den »statistisk set« mest korrekte trend-linie (se nedenstående referencer).

I det følgende påvises det, at denne metode er behæftet med en principiel fejl, som gør den uegnet til anvendelse ved prognosticering.

At metoden giver forkerte resultater, vises lettest ved hjælp af et eksempel som det følgende.

Eksempel

1. trin

Virksomheden GROWTH A/S har praktiseret følgende totale salgstal for varegruppen A:

År 1	50 enheder
År 2	55 enheder

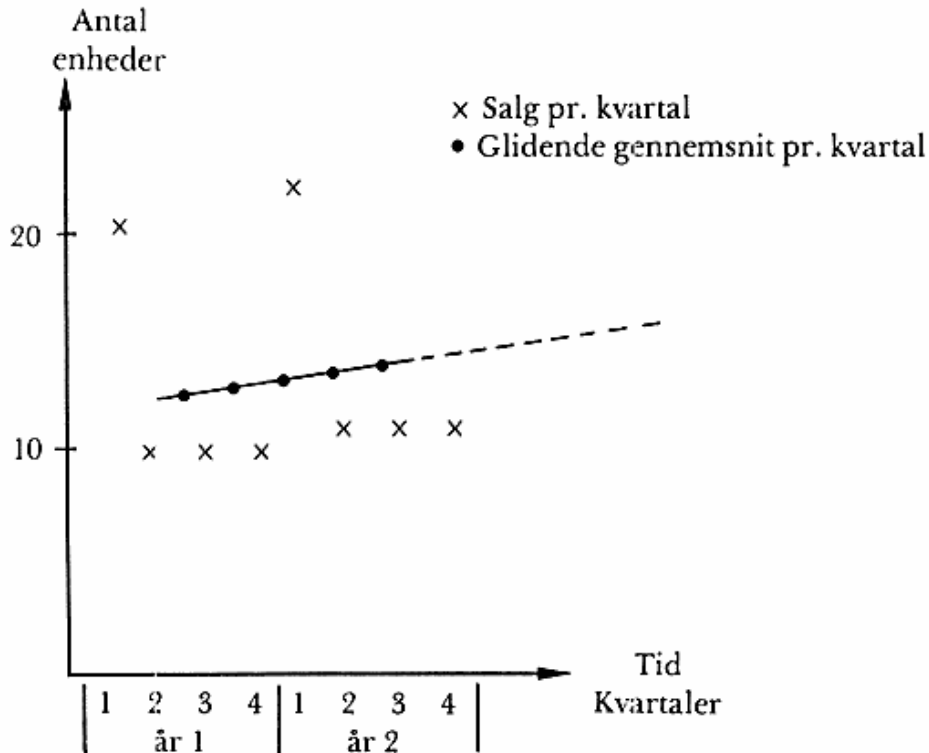
Antages lineær vækst er extrapolation til de følgende år evident, og trend-analysen anvendt på disse to tal vil da også give en ret linie gennem de to punkter. GROWTH A/S vil på denne basis regne med en salgsstigning på 5 enheder pr. år (en »enhed« kan f.eks. være 10x stk. eller 10x kr.), og forudser et salg i år 3 på ialt 60 enheder.

2. trin

Kvartalsvis opsplitning af samme salgstal viser følgende billede:

År	Kvartal	Salg	GÅG/kvartal
1	1	20	
	2	10	
	3	10	12.50
	4	10	13.00
2			13.25
	1	22	13.50
	2	11	13.75
	3	11	
	4	11	

Figur 1



Man ser, at salgsstigningen på ialt 10% af salget år 1 er jævnt fordelt på samtlige kvartaler. Endvidere er det glidende årlige gennemsnit (GÅG) pr. kvartal vist i ovenstående tabel og i den grafiske afbildning (fig. 1). GÅG er her beregnet som gennemsnittet af salgstallene for fire kvartaler, og både i tabellen og på figuren er hvert af de således beregnede GÅG henført til midten af de tilsvarende perioder.

Ved lineær extrapolation findes det forventede salg for år 3 og 4 at være henholdsvis 60 enheder og 65 enheder fordelt med 40% i 1. kvartal og 20% i hvert af de følgende kvartaler.

Ovenstående kvartalsvise salgstal er indtegnet på fig. 1, hvor også en trend-linie er indlagt gennem punkterne for det gennemsnitlige salg i hhv. år 1 og år 2. Den værdi, som denne trend-linie angiver i midten af år X vil være lig med det forventede gennemsnitlige salg i år X.

3. trin

GROWTH A/S beslutter nu at anvende den mere avancerede mindste kvadratafgivelsers metode til beregning af den »matematisk mest korrekte« trend-linies placering. Matematisk kan trend-liniens ligning skrives således:

$$S = a \times t + b$$

hvor S er det beregnede kvartalsvise salg, t er et mål for tiden (med enheden et kvartal), og a og b angiver henholdsvis trend-liniens hældning og dens skæring med ordinat-aksen til tiden $t = 0$.

Baseret på de samme salgstal som ovenstående ser beregningen således ud:

Kvartal t	Salg s	t x s	t ²
1	20	20	1
2	10	20	4
3	10	30	9
4	10	40	16
5	22	110	25
6	11	66	36
7	11	77	49
8	11	88	64
36	105	451	204

$$n = 8$$

$$\bar{t} = 4.5$$

$$\bar{s} = 105/8 = 13.125$$

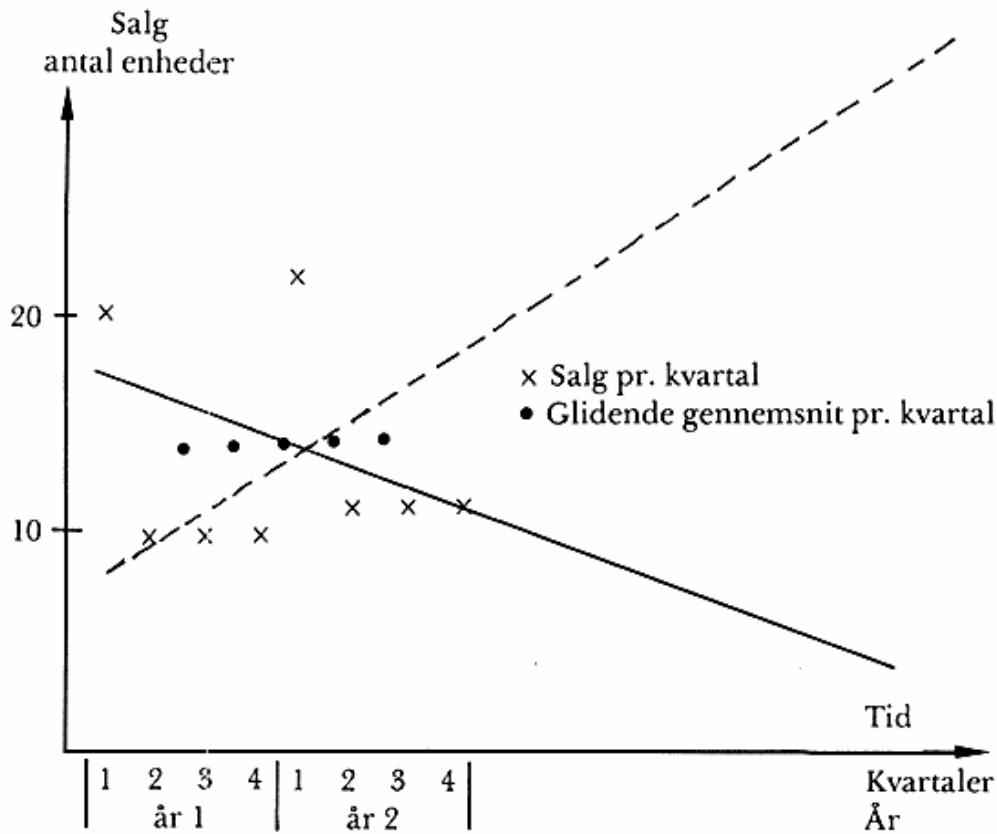
$$a = \frac{n \times \sum (t \times s) - \sum t \times \sum s}{n \times \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

$$= \frac{8 \cdot 451 - 36 \cdot 105}{8 \cdot 204 - 36^2} = -0.512$$

$$b = \bar{s} - a \cdot \bar{t}$$

$$= 13.125 + 0.512 \times 4.5 = 15.43$$

Figur 2



Figur 2 viser denne trend-linie indtegnet (fuldt optrukken linie) i den grafiske afbildning af salget (den kursiverede linie refererer til beregningen i nedenstående trin 5).

Det forhold, at den »statistisk korrekte« trend-linie afviger væsentligt fra den trend-linie, man umiddelbart ville komme frem til ved at indtegne trend-linien på øjemål udfra de afbildede salgsdata eller udfra det glidende gennemsnit, afvises normalt under henvisning til, at den beregnede trend-linie er matematisk eller statistisk korrekt, og at salgstallene derfor må rumme en indbygget trend, som man blot ikke umiddelbart kan få øje på. Man haster derpå med at gøre prognosen endnu mere raffineret ved at beregne sæsonvariationerne og indregne disse i prognosen. Den klassiske beregning ser således ud:

4. trin

År	Kvartal	t	s	Beregnet salg	Afvigelse	
					Enheder	%
1	1	1	20	14.92	+5.08	+34.1
	2	2	10	14.40	-4.40	-30.5
	3	3	10	13.89	-3.89	-28.0
	4	4	10	13.38	-3.38	-25.3
2	1	5	22	12.87	+9.13	+71.0
	2	6	11	12.35	-1.35	-10.9
	3	7	11	11.89	-0.89	- 7.5
	4	8	11	11.33	-0.33	- 2.9

Sæsonafvigelse (%):

År \ Kvartal	Kvartal			
	1	2	3	4
1	+ 34.1	- 30.5	- 28.0	- 25.3
2	+ 71.0	- 10.9	- 7.5	- 2.9
Gennemsnit	+105.1	- 41.4	- 35.5	- 28.2
	+ 52.6	- 20.7	- 17.8	- 14.1

Det beregnede salg for år 3 bliver derfor:

År	Kvartal	t	Salg ifølge trend-forml. (enheder)	Sæson-korrektion (%)	Beregnet salg (enheder)
3	1	9	10.82	+52.6	16.51
	2	10	10.30	-20.7	8.18
	3	11	9.79	-17.8	8.05
	4	12	9.28	-14.1	7.98
					} 40.7
4	1	13	8.77	+52.6	13.38
	2	14	8.25	-20.8	6.54
	3	15	7.74	-17.8	6.36
	4	16	7.23	-14.1	6.21
					} 32.5

Sammenholdt med salgstallene for år 1 og år 2 ser de her beregnede salgstal unægtelig noget forstemmende ud. Salget beregnes at *aftage* (!) med ca. 8 enheder om året, hvorved salget må forventes at være helt afviklet omkring år 8.

5. trin

Billedet bliver imidlertid hurtigt lysere. Da den faktiske salgsudvikling i dette tilfælde tænkes at forløbe lineært (i overensstemmelse med vor antagelse), vil de faktisk registrerede salg i 1. kvartal af år 3 blive 24 enheder eller 45% over det beregnede salg!

GROWTH A/S beslutter derfor at gentage analysen på to hele perioder á 4 kvartaler (hvorved basis perioden forskydes et kvartal i forhold til tidligere). Beregning af trend-linien ved mindste kvadratafgivelsers metode ser nu således ud:

År	Kvartal	t	Salg s	t x s	t ²
1	2	1	10	10	1
	3	2	10	20	4
	4	3	10	30	9
2	1	4	22	88	16
	2	5	11	55	25
	3	6	11	66	36
	4	7	11	77	49
3	1	8	24	192	64
		36	109	538	204

$$\bar{t} = 4.5$$

$$\bar{s} = 109/8 = 13.625$$

$$a = \frac{8 \cdot 538 - 36 \cdot 109}{8 \cdot 204 - 36^2}$$

$$b = 13.625 - 1.13 \cdot 4.5 = 8.54$$

Den således beregnede trend-linie er indtegnet som en kursiveret linie på figur 2 (NB: nulpunktet og dermed også placeringen af t er rykket et kvartal frem).

Trend-linien har nu fået en positiv hældning, og det forventede salg pr. år 3 og 4 beregnes nu at være følgende:

År	Kvartal	Beregnet salg ifølge trend-formlen (enheder)
3	1	17.58
	2	18.71
	3	19.84
	4	20.97
		} 77.1
4	1	22.10
	2	23.23
	3	24.36
	4	25.49
		} 95.2

Salget projiceres således til at blive 77.1 enheder i år 3 stigende fremover med 18.1 (!) enheder pr. år. De faktiske salgstal vil naturligvis vise noget ganske andet.

Diskussion

Ovenstående beregninger demonstrerer klart, at mindste kvadratafvigelsers metode er uanvendelig til fastsættelse af en trend-linie gennem data med udpræget sæsonvariation, idet metoden kan give groft forkerte og temmelig vilkårlige resultater. Man kunne måske indvende, at eksemplet var konstrueret med særligt store sæsonvariationer, som tilmed var anbragt i udkanterne af den undersøgte periode. Denne indvending holder imidlertid ikke, idet også mindre sæsonvariationer med udsving midt i perioden vil give anledning til principielle fejl i resultatet, som blot vil være mindre iøjenfaldende end i eksemplet. Desuden er det vel netop trend-analysens opgave at eliminere diverse variationers indflydelse på prognosticeringen. Endvidere kunne man indvende, at en periode på to år, som anvendt i eksemplet, er for kort tid til at give et sikkert grundlag for trend-analysen, men heller ikke denne indvending holder for en nærmere prøvelse. I eksemplet gik vi jo netop ud fra, at vor antagelse om lineær udvikling var korrekt, og alligevel fik vi vilkårlige resultater. Desuden er det jo klart, at

salgstallene fra to på hinanden følgende perioder altid vil give en indikation af den udviklingstendens eller trend, som overlejrer de eventuelle sæsonudsving, som forekommer inden for den enkelte periode. At en salgsprognose baseret på data fra to perioder er mere usikker, end en prognose baseret på flere perioder er indlysende, men dette forhold har inden indflydelse på placeringen af den korrekte trendlinie i periode-salgsdiagrammet, i hvert fald ikke hvis man går ud fra ovenstående definition af den korrekte trendlinie. Usikkerheden på de prognosticerede tal bør man tage højde for på anden vis under budgetteringen. Endeligt kan det nævnes, at selv om man i ovenstående eksempel medtager år 3 med salgstallene 24-12-12-12 enheder pr. kvartal som basis for beregning af trend-linien, giver mindste kvadrat-afvigelsers metode stadig en trend-linie med negativ hældning – som altså tydeligvis er forkert.

Endelig kan man indvende, at statistisk check på usikkerheden på trend-linien vil afsløre dennes manglende pålidelighed. Dette er naturligvis rigtigt for tallene i ovenstående eksempel, men for en mindre sæsonvariation vil dette ikke nødvendigvis være tilfældet, og trend-liniens hældning ville stadig være stærkt afhængig af de største sæsonudsvings placering i perioden.

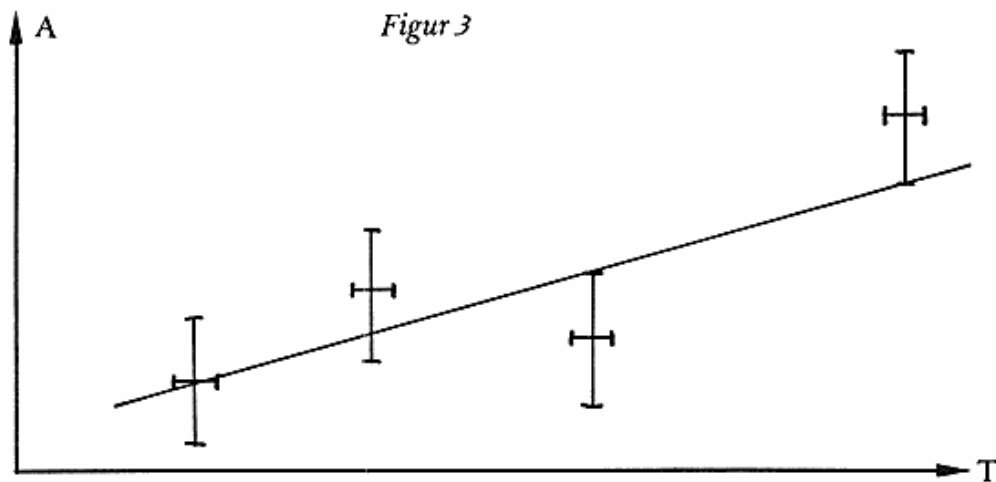
I ovenstående eksempel ses det klart, at den korrekte trend kan findes ved at fastlægge trend-linien enten udfra totalsalgene for hele perioden (år) eller udfra de glidende gennemsnit, hvorved man jo i begge tilfælde eliminerer sæsonvariationerne, inden trend-linien bestemmes f.eks. ved mindste kvadratafvigelsers metode. Men hvad da med eventuelle cykliske variationer? En cyklus på f.eks. 4-6 år vil give anledning til samme principielle fejl ved fastlæggelse af trend-linien på basis af årsgennemsnit, som sæsonvariationerne medførte for en trend-linie beregnet udfra kvartalstallene.

Jeg vil hævde, at det forhold, at mindste kvadratafvigelsers metode er kommet til kort og har givet forkerte resultater i ovenstående eksempel, ikke skyldes, at eksemplet var specielt konstrueret til at eksponere metodens fejlagtighed, men derimod skyldes, dels at det er principielt forkert at anvende mindste kvadratafvigelsers metode til fastlæggelse af en trend-linie gennem data med sæsonvariationer eller andre cykliske variationer, og dels af at metoden er principielt uegnet til prognosticering.

Anvendelsesområder for mindste kvadratafvigelsers metode

Ved anvendelse af mindste kvadratafvigelsers metode vil man ved kvadrering af afvigelserne fra trend-linien og minimeriseringen af kvadratafvigelserne komme til at lægge større vægt på de enkeltpunkter, der på grund af sæsonvariationer (eller på grund af stokastiske variationer) afviger mest fra gennemsnittet end på alle andre punkter. Der er imidlertid ingen som helst logisk grund til at lægge større vægt på de mest afvigende data, tværtimod kunne man måske med fordel lægge *mindre* vægt på exceptionelle salgstal, f.eks. ved at se bort fra de mest afvigende data ved fastlæggelse af trend-linien eller ved at benytte en mindste kvadratrods afvigelses metode. Hvis man imidlertid ønsker en objektiv metode baseret på samtlige data, er det mest logiske naturligvis at lade disse indgå med lige vægt (idet vi her og i ovenstående eksempel har set bort fra muligheden af at lade de seneste data indgå med større vægt). Dette er tilfældet f.eks. ved beregning af det glidende gennemsnit. Hvis man imidlertid ville beregne en trend-linie, som opfyldte det krav, at den gennemsnitlige numeriske afvigelse fra samtlige punkter i den grafiske afbildning skulle være minimum, ville man støde på den vanskelighed, at opgaven er matematisk ubestemt, d.v.s. der findes en hel skare af linier, der opfylder kriteriet. En mindste kvadratrods metode er vanskelig at behandle matematisk, medens på den anden side mindste kvadratafvigelsers metode er uhyre simpel at udlede ved partiel differentiation. Dette er måske en del af forklaringen på, at mindste kvadratafvigelsers metode er blevet så vidt accepteret i prognosearbejdet.

Kaster vi nu et blik på en ganske anden diciplin, nemlig naturvidenskaberne, hvor mindste kvadratafvigelsers metode også har vundet stor udbredelse – men her med rette – vil man konstatere, at metodens succes her er baseret på, at den anvendes på en ganske anden måde end i regnskabslæren. I naturvidenskaberne anvendes metoden først og fremmest til analyse af forskningsresultaterne, der belyser forskellige parametres indbyrdes afhængighed. Disse parametre vil altid være målt over et vist observationsområde, og enhver af disse målinger vil være behæftet med en vis usikkerhed. Denne accepterede usikkerhed på de grundlæggende data er den ene væsentlige forskel fra regnskabslæren, hvor den registrerede udvikling (f.eks. salg) regnes for at være



målt uden (signifikant) usikkerhed. Lad mig illustrere dette ved en eksempel fra metodens anvendelse i forskningen.

For eksempel vil et forsøg på måling af en eller anden parameter eller stofegenskab ved temperaturen T resultere i en konstatering af, at den pågældende parameter har værdien $A \pm \Delta A$ ved temperaturen $T \pm \Delta T$, hvor ΔA og ΔT repræsenterer usikkerhederne på målingen af henholdsvis A og T . Et sæt af sådanne målinger kan f.eks. afbildes grafisk som vist på figur 3, selvom usikkerhederne ofte blot vil være underforstået.

Hvis man ud fra andre overvejelser mener, at sammenhængen mellem A og T er lineær, kan man indlægge en linie i diagrammet, der repræsenterer denne afhængighed. Til dette formål er mindste kvadratafvigelsers metode særdeles relevant, idet netop små afvigelser fra gennemsnitslinien er insignifikante på grund af forsøgsusikkerhederne, medens større konstaterede afvigelser er væsentlige.

En anden vigtig forskel er den, at metoden i naturvidenskabelig forskning ikke – eller kun med uhyre stor forsigtighed – anvendes til extrapolation, medens extrapolation netop er det væsentligste formål ved prognosticering.

Det ses således, at principielle forskelle i den måde, hvorpå mindste kvadratafvigelsers metode anvendes indenfor naturvidenskab og markedsanalyse, kan forklare, hvorfor denne metode, der er særdeles velanvendelig indenfor det første område, bliver uegnet til bestemmelse af trend til prognoseformål.

Konklusion

En konklusion af ovenstående må være, at mindste kvadratafvigelsers metode ikke kan anvendes på data, hvori der forefindes en systematisk variation såsom sæsonvariation eller en anden cyklisk variation. Kun hvis man eliminerer sådanne cykliske variationer, inden trend-linien fastlægges, vil den påviste systematiske fejl være elimineret.

Efter at de cykliske variationer (»S« og »C« i ovenstående tids-serie model) eventuelt er eliminerede, bør de resterende tilfældige afvigelser (»I« i modellen) fra den gennemsnitlige salgsudvikling indgå i prognosen med nøjagtigt den vægt, man ønsker at tillægge sådanne tilfældige afvigelser. Også i dette tilfælde vil en mindste kvadratafvigelsers metode være uhensigtsmæssig, idet man ved denne metode for eksempel vil komme til at lægge 25 gange så stor vægt på en afvigelse på 5 enheder (eller %) som på en afvigelse på 1 enhed (eller %). Dette er næppe tilsigtet i alle tilfælde, og det vil efter min vurdering føre til forkerte resultater, når den således bestemte »trend« anvendes til prognostisering.

Sammenfattet betyder ovenstående, at mindste kvadratafvigelsers metode kun kan anvendes til bestemmelse af trend-linien, det vil sige »T«-komponenten i nævnte tids-serie model, efter at alle modellens øvrige komponenter S, C og I er eliminerede.

Når S, C og I er eliminerede, er der imidlertid kun T-komponenten tilbage, det vil sige, datamaterialet er allerede da reduceret til en ret linie, som er identisk med trend-linien. Anvendelsen af mindste kvadratafvigelsers metode er naturligvis derved blevet overflødig.

Min konklusion af ovenstående overvejelser er derfor, at mindste kvadratafvigelsers metode er generelt uegnet til brug ved udarbejdelse af prognoser, og at metoden baseret på kvalificeret extrapolation af glidende gennemsnit vil være sikrere at anvende.

Referencer:

1. Palle Hansen (editor): Håndbog i Budgettering, Institut for Lederskab og Lønsomhed, 1975.
2. Robert Ferber (editor): Handbook of Marketing Research, McGraw-Hill Book Company 1974.
3. Erich Schäfer: Grundlagen der Marktforschung, Westdeutscher Verlag (4. udgave) 1966.
4. Gordon J. Bolt: Market and Sales Forecasting – Total Approach, Kogan Page Ltd. 1-73 (2.ed.).
5. Colin Pearce: Prediction Techniques for Marketing Planners, Associated Business Programmes, London 1971.
6. Steven C. Wheelwright and Spyros Makridakis: Forecasting methods for Management (John Wiley & Sons, 1973).

Konklusion

En konklusion af ovenstående må være, at mindste kvadratafvigelsers metode ikke kan anvendes på data, hvori der forefindes en systematisk variation såsom sæsonvariation eller en anden cyklisk variation. Kun hvis man eliminerer sådanne cykliske variationer, inden trend-linien fastlægges, vil den påviste systematiske fejl være elimineret.

Efter at de cykliske variationer (»S« og »C« i ovenstående tids-serie model) eventuelt er eliminerede, bør de resterende tilfældige afvigelser (»I« i modellen) fra den gennemsnitlige salgsudvikling indgå i prognosen med nøjagtigt den vægt, man ønsker at tillægge sådanne tilfældige afvigelser. Også i dette tilfælde vil en mindste kvadratafvigelsers metode være uhensigtsmæssig, idet man ved denne metode for eksempel vil komme til at lægge 25 gange så stor vægt på en afvigelse på 5 enheder (eller %) som på en afvigelse på 1 enhed (eller %). Dette er næppe tilsigtet i alle tilfælde, og det vil efter min vurdering føre til forkerte resultater, når den således bestemte »trend« anvendes til prognostisering.

Sammenfattet betyder ovenstående, at mindste kvadratafvigelsers metode kun kan anvendes til bestemmelse af trend-linien, det vil sige »T«-komponenten i nævnte tids-serie model, efter at alle modellens øvrige komponenter S, C og I er eliminerede.

Når S, C og I er eliminerede, er der imidlertid kun T-komponenten tilbage, det vil sige, datamaterialet er allerede da reduceret til en ret linie, som er identisk med trend-linien. Anvendelsen af mindste kvadratafvigelsers metode er naturligvis derved blevet overflødig.

Min konklusion af ovenstående overvejelser er derfor, at mindste kvadratafvigelsers metode er generelt uegnet til brug ved udarbejdelse af prognoser, og at metoden baseret på kvalificeret extrapolation af glidende gennemsnit vil være sikrere at anvende.

Referencer:

1. Palle Hansen (editor): Håndbog i Budgettering, Institut for Lederskab og Lønsomhed, 1975.
2. Robert Ferber (editor): Handbook of Marketing Research, McGraw-Hill Book Company 1974.
3. Erich Schäfer: Grundlagen der Marktforschung, Westdeutscher Verlag (4. udgave) 1966.
4. Gordon J. Bolt: Market and Sales Forecasting – Total Approach, Kogan Page Ltd. 1-73 (2.ed.).
5. Colin Pearce: Prediction Techniques for Marketing Planners, Associated Business Programmes, London 1971.
6. Steven C. Wheelwright and Spyros Makridakis: Forecasting methods for Management (John Wiley & Sons, 1973).