Ventetid i kø for fler-kanal-systemer

Erik Maaløe*)

Resumé

Beregning af ventetid i kø foran fler-kanal-systemer er – ifølge hidtidig praksis – ofte af tvivlsom anvendelighed, fordi servicetiden kun undtagelsesvis er exponentielt fordelt. En meget enkel og i øvrigt betydelig mere præcis approximationsformel foreslås derfor i det følgende. Køtiden i et R-kanal-system er en R'te del af køtiden i et enkelt kanal-system med samme belastning.

At beregne hvor længe man skal »vente på at blive betjent« har, siden telefoniens gennembrud, været en udfordring for anvendt matematik. Den er blevet besvaret, og i dag lærer man så *kø-teori* på ethvert videregående kursus om virksomhedsledelse.

Desværre kan man ikke forudberegne ventetid i kø for ethvert kø-system, og særlig vanskeligt er det at overse situationen, når der er flere end et betjeningssted (kanaler). Fler-kanal-problemet kan kun under ganske særlige betingelser løses eksakt; nemlig når både varigheden mellem to kunders ankomst og af en betjening er tilfældig, dvs. snart kortvarig, snart langvarig. Man skulle ellers tro, at adfærden var lettere forudberegnelig, ifald servicetiden var konstant. Men det er ikke tilfældet. Denne artikel præsenterer to approximative løsninger.

Allerede i kø-teoriens første år søgte man imidlertid efter en matematisk beskrivelse af fler-kanal-systemers adfærd, specielt systemer med konstant servicetid. Danskeren Erlang udviklede et par partielle løsninger, som Crommelin senere generaliserede. Denne metode er uhyre kompliceret at anvende og er bl. a. derfor ikke brugt i praksis. Desværre må man sige. Thi da kø-teori med operations-analysens fremvækst blev et praktisk virksomhedsledelses-værktøj, anvendte man tit alt for kritikløst de matematiske formler fra »telefoni-situationer« på industrielle problemer, hvor betjeningstiden fx. på maskiner snarere er konstant end af tilfældig varighed.

*) Statens Byggeforskningsinstitut.

Ventetid i kø for fler-kanal-systemer

Erik Maaløe*)

Resumé

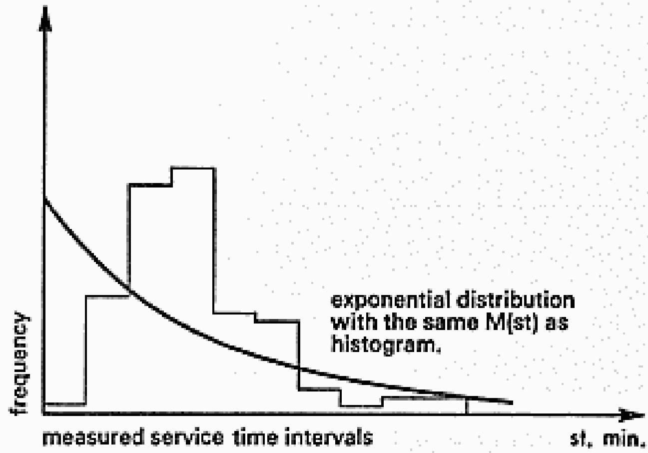
Beregning af ventetid i kø foran fler-kanal-systemer er – ifølge hidtidig praksis – ofte af tvivlsom anvendelighed, fordi servicetiden kun undtagelsesvis er exponentielt fordelt. En meget enkel og i øvrigt betydelig mere præcis approximationsformel foreslås derfor i det følgende. Køtiden i et R-kanal-system er en R'te del af køtiden i et enkelt kanal-system med samme belastning.

At beregne hvor længe man skal »vente på at blive betjent« har, siden telefoniens gennembrud, været en udfordring for anvendt matematik. Den er blevet besvaret, og i dag lærer man så *kø-teori* på ethvert videregående kursus om virksomhedsledelse.

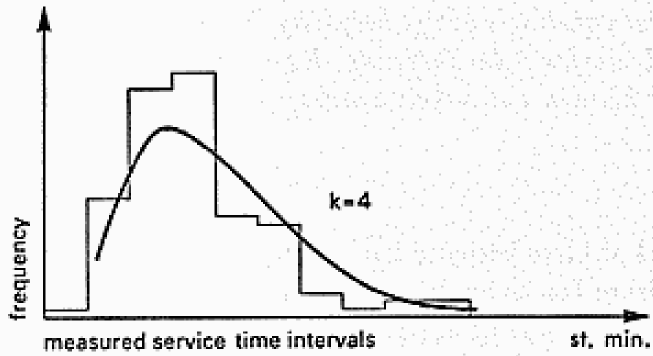
Desværre kan man ikke forudberegne ventetid i kø for ethvert kø-system, og særlig vanskeligt er det at overse situationen, når der er flere end et betjeningssted (kanaler). Fler-kanal-problemet kan kun under ganske særlige betingelser løses eksakt; nemlig når både varigheden mellem to kunders ankomst og af en betjening er tilfældig, dvs. snart kortvarig, snart langvarig. Man skulle ellers tro, at adfærden var lettere forudberegnelig, ifald servicetiden var konstant. Men det er ikke tilfældet. Denne artikel præsenterer to approximative løsninger.

Allerede i kø-teoriens første år søgte man imidlertid efter en matematisk beskrivelse af fler-kanal-systemers adfærd, specielt systemer med konstant servicetid. Danskeren Erlang udviklede et par partielle løsninger, som Crommelin senere generaliserede. Denne metode er uhyre kompliceret at anvende og er bl. a. derfor ikke brugt i praksis. Desværre må man sige. Thi da kø-teori med operations-analysens fremvækst blev et praktisk virksomhedsledelses-værktøj, anvendte man tit alt for kritikløst de matematiske formler fra »telefoni-situationer« på industrielle problemer, hvor betjeningstiden fx. på maskiner snarere er konstant end af tilfældig varighed.

*) Statens Byggeforskningsinstitut.



Figur 1.1.



Figur 1.2.

Figur 1.1. og 1.2. illustrerer, hvor urealistisk antagelsen af exponentielt fordelt servicetid er for mange processer inden for maskin- og transportindustri, her eksemplificeret med empirisk registrering af varigheden af at læsse beton-vogne, jfr. LH 2.

Den enkle approximationsformel, der omtales i det følgende, kan anvendes for varierende ankomster (Poisson-forudsætningen), Erlang-fordelt servicetid, incl. konstant servicetid og for anlæg med op til ca. 5 betjeningssteder.

Den matematiske baggrund og et bevis for approximationens gyldighed og dens nøjagtighed – foruden præsentation af den mere præcise approximation – er givet i LH 1.

Approximationsformlen

Approximation bygger på et bevis af, at

> *»kø-tiden i et R-kanal-system«* =
>
> »en R'te del af kø-tiden i et enkelt-kanal-system med samme servicetid, men med en ankomstintensitet, som er lig en R'te del af ankomstintensiteten i R-kanal-systemet.«

Eller

$$W^{*}_{kø}\,(\lambda = \lambda,\ \mu = \mu,\ R = R) = \frac{1}{R}\, W^{-}_{kø}\,(\lambda = \lambda/R,\ \mu = \mu,\ R = 1)$$

hvor

λ = gennemsnitlige antal ankomster pr. tidsenhed
μ = gennemsnitlige antal betjeninger pr. tidsenhed
R = antal kanaler eller betjeningssteder
ρ = $\lambda/R\mu$

idet man for systemer, der udnyttes, har:

$$\frac{W^{*}_{kø}}{W^{-}_{kø}} \rightarrow \frac{1}{R} \text{ for } \rho \rightarrow 1,$$

medens det for systemer uden kunder gælder:

$$\frac{W^{*}_{kø}}{W^{-}_{kø}} \rightarrow 0 \text{ for } \rho \rightarrow 0$$

Samme forhold kan måske udtrykkes på en mere slående måde:
»For to i øvrigt ens fler-kanal-systemer til hvilke der ankommer samme antal kunder pr. time – hvor det ene system har et fælles kø-arrangement og det andet separate køer foran hver af de R kanaler – vil kundens ventetid i kø i fællessystemet kun være en R'te del af ventetiden i systemet med separat kø-arrangement.«

Eksempler

Antag: System med 3 kanaler, $\mu = 9$ betjente pr. time
$\mu = 21$ ankomster pr. time, og dermed er udnyttelsesgraden, $\rho = 21/9 \cdot 3 = 7/9$.
Antag desuden konstant servicetid.
For et tilsvarende *1-kanal-system* er W^{-}, jfr. LH 1 eller enhver lærebog om kø-teori, er ventetiden i kø, $W^{-}_{kø}$

$$W^{-}_{kø} = \frac{\rho}{2\mu\ (1 \div \rho)}$$

$$= \frac{7/9}{2 \cdot 9 \left(1 \div \frac{7}{9}\right)} \text{ time}$$

$$= 0.194 \text{ time} = 11.64 \text{ min.}$$

Ventetiden $W^{<}_{kø}$ for fler-kanal-systemet bliver nu ifølge approximationsformlen

$$W^{<}_{kø} \approx \frac{1}{R} \cdot W^{-}_{kø}$$

$$\approx \frac{1}{3} \cdot 11.64 \text{ min.}$$

$$= 3.88 \text{ min.}$$

Ifølge simulation er den faktiske ventetid $W^{<}_{s,kø} \approx 3.18$ min., for $\rho = 0.78$. Jfr. LH 1.

Nøjagtigheden »3.88 i forhold til 3.18« er måske ikke slående. Det bliver den imidlertid, om man sammenligner dette approximative resultat med resultatet af hidtidig beregningspraksis, der anvender formlerne for exponentiel servicetid som approximation, $W^{<}_{p,kø}$

$$W_{p,kø} = \frac{9\rho^3}{\mu(1 \div \rho)\ (6 + 12\rho + 9\rho^2)}$$

$$= \frac{9 \cdot 7^3}{9^3 \cdot 9 \cdot \frac{2}{9}\left(6 + 12 \cdot \frac{7}{9} + 9 \cdot \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 9}\right)} \text{ time}$$

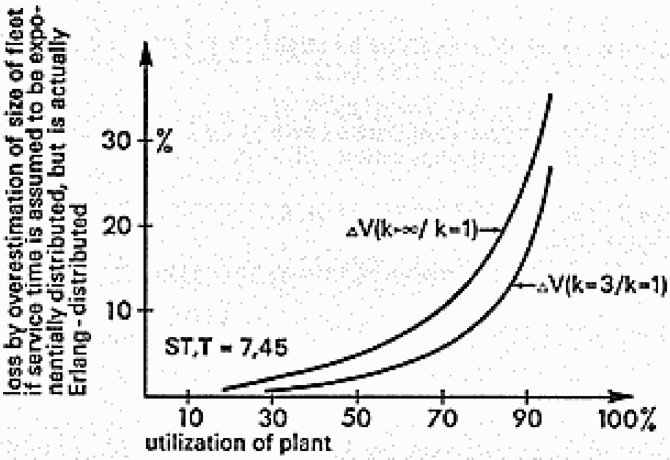
$$= 0.1023 \text{ time}$$

$$= 6.14 \text{ min.}$$

For det angivne eksempel er vor approximationsformel altså ca. 22 % ved siden af, medens fejlen, man opnår ved ukritisk anvendelse af formler for exponentiel servicetid næsten er 100 % ved siden af.

Hvad ukorrekt anvendelse af formler for exponentiel service betyder for praktisk virksomhedsledelse illustreres af fig. 3. Den viser i procent de økonomiske tab ved at dimensionere størrelsen af en vognflåde på grundlag af de exponentielle formler, endskønt læsning af biler snarere er af en vis bestemt varighed end tilfældigt fordelt. Jo bedre man udnytter sit serviceanlæg og desto mere konstant det arbejder, desto større er de tab, man påfører sig selv ved at dimensionere, som om servicetiden var exponentielt fordelt.

Figur 3.1.



Figur 3.1. illustrerer tabet, man kan påføre sin virksomhed ved ukritisk antagelse af exponentiel servicetid, hvis den faktisk er én-toppet (k = 3), hhv. konstant. Eksemplet bygger på data fra en dansk produktionsvirksomhed, jfr. LH 2, og illustrerer i sin praktiske konsekvens, at analytikeren i givet fald foreslår indkøb af flere vogne end nødvendigt.

En mere præcis approximation

Ønsker man en bedre approximation, kan man, jfr. LH 1, approximere $W^{*}_{kø}$ efter følgende skema:

$$W^{*}_{kø}(\lambda, \mu \text{ — Erlang}, R) =$$

$$\frac{W^{*}_{kø}(\lambda, \mu \text{ — exp}, R)}{W^{-}_{kø}(\lambda, \mu \text{ — exp}, 1)} \cdot W^{-}_{kø}(\lambda, \mu \text{ — Erlang}, 1)$$

Slutning

Den her anførte approximationsformel er både simplere og mere nøjagtig end hidtidig praksis for beregning af ventetid i kø foran flerkanal-systemer, ifald servicetidens varighed spreder sig som en éntoppet fordeling.

Det er mit håb, at den vil kunne bidrage til, at kø-teorien fremover i højere grad vil kunne være til nytte i den praktiske virksomhedsledelse og desuden evt. også vække kø-teoretikeres interesse for den virkelighed, hvor man venter.

Litteraturhenvisning

1. Maaløe, Erik: *Approximation Formulae for Estimation of Waiting-Time in Multiple-Channel Queueing System.* Management Science, vol. 19, no. 6, USA 1973.
2. Maaløe, Erik: *Design of Interacting Systems for Production and Distribution of Ready Mixed Concrete.* An OR-Study of a Multiple-Channel Queueing System with Erlang (Constant) Distributed Servicetime. Statens Byggeforskningsinstitut, SBI-rapport 70. København, 1971.
3. Brockmeyer, E., H. L. Halstrøm and Arne Jensen: *The Life and Works of A. K. Erlang.* Acta Polytechnica Scandinavica. Copenhagen, 1960.
4. Crommelin, D. C.: *Delay Probability Formulae when Holding Times are Constant.* P. O. Elect. Eng., 25–41, 1932.