

Besætningsplanlægning /

Af PER H. ELLERVIK*)

Artiklen er et koncentrat af en del af forfatterens afhandling udarbejdet til cand. merc. eksamen 1969/70 ved Handelshøjskolen i København. Afhandlingens faglige formål var for et af Europas største charterselskaber at udvikle en besætningsplanlægningsmetode for cockpitbesætninger. På basis af afhandlingens emne, er det denne artikels formål at vise en operationel måde at formulere en problemstilling verbalt, dernæst at vise hvordan denne problemstilling kan beskrives i en matematisk model og herunder definere modellens elementer. Måling af visse modelementer og algoritmen til løsning af modellen er af pladsmæssige hensyn udeladt.

1. *Problemstillingen for charterselskabets besætningsplanlægning*

Charterselskabets *målsætninger* for den funktion i selskabet, der vedrører besætningsplanlægningen for cockpitbesætninger, blev formuleret på følgende måde:

- 1) vi ønsker at minimere lønomkostningerne til vor stab af cockpitbesætninger på årsbasis, og
- 2) vi ønsker på en hurtig og enkel måde at tildele ruter i et givet flyveprogram til de enkelte cockpitbesætningsmedlemmer.

En analyse af relationen mellem den faste årlige gage og de maksimalt forventede årlige dagpenge for *hver* stillingskategori (luftkaptajn, 2.-pilot, first-officer og flight-engineer) for *hver* af selskabets flytyper viste, at målsætning nr. 1) var synonym med at minimere antallet af cockpitbesætningsmedlemmer på årsbasis.

Det minimale antal af cockpitbesætningsmedlemmer på årsbasis skulle ifølge selskabets ønske udtrykkes som det minimale behov af disse besætningsmedlemmer, som *højsæsonens* flyveprogram ville kræve. Denne be-

*) Forskningsstipendiat, cand. merc., Metodeforskningsgruppen, Handelshøjskolen i København.

Besætningsplanlægning /

Af PER H. ELLERVIK*)

Artiklen er et koncentrat af en del af forfatterens afhandling udarbejdet til cand. merc. eksamen 1969/70 ved Handelshøjskolen i København. Afhandlingens faglige formål var for et af Europas største charterselskaber at udvikle en besætningsplanlægningsmetode for cockpitbesætninger. På basis af afhandlingens emne, er det denne artikels formål at vise en operationel måde at formulere en problemstilling verbalt, dernæst at vise hvordan denne problemstilling kan beskrives i en matematisk model og herunder definere modellens elementer. Måling af visse modelementer og algoritmen til løsning af modellen er af pladsmæssige hensyn udeladt.

1. *Problemstillingen for charterselskabets besætningsplanlægning*

Charterselskabets *målsætninger* for den funktion i selskabet, der vedrører besætningsplanlægningen for cockpitbesætninger, blev formuleret på følgende måde:

- 1) vi ønsker at minimere lønomkostningerne til vor stab af cockpitbesætninger på årsbasis, og
- 2) vi ønsker på en hurtig og enkel måde at tildele ruter i et givet flyveprogram til de enkelte cockpitbesætningsmedlemmer.

En analyse af relationen mellem den faste årlige gage og de maksimalt forventede årlige dagpenge for *hver* stillingskategori (luftkaptajn, 2.-pilot, first-officer og flight-engineer) for *hver* af selskabets flytyper viste, at målsætning nr. 1) var synonym med at minimere antallet af cockpitbesætningsmedlemmer på årsbasis.

Det minimale antal af cockpitbesætningsmedlemmer på årsbasis skulle ifølge selskabets ønske udtrykkes som det minimale behov af disse besætningsmedlemmer, som *højsæsonens* flyveprogram ville kræve. Denne be-

*) Forskningsstipendiat, cand. merc., Metodeforskningsgruppen, Handelshøjskolen i København.

UGEDAG	ONSDAG	TORSDAG	TIRSDAG
KL.i G.M.T.	6 ⁰⁰ 12 ⁰⁰ 18 ⁰⁰		6 ⁰⁰ 12 ⁰⁰ 18 ⁰⁰
mask.1	77	12 ARN 37	75 5
mask.2	73	ARN 97 GOT 85	ARN 700
TYPE	•••••	•••••	•••••
A	•••••	•••••	•••••
mask.10	724 BLL 733	79 8	ARN 707
UGEDAG	ONSDAG	TORSDAG	TIRSDAG
KL.i G.M.T.	6 ⁰⁰ 12 ⁰⁰ 18 ⁰⁰	6 ⁰⁰ 12 ⁰⁰ 18 ⁰⁰	6 ⁰⁰ 12 ⁰⁰ 18 ⁰⁰
mask.1	74	39 FNB 97	28
mask.2	59	BLL 67	40 ARN 52
TYPE	•••••	•••••	•••••
B	•••••	•••••	•••••
mask.8	736 GOT 772	79 GOT 39	789 FNB 736

Figur 1. Det ugentlige flyveprogram. Forklaring: programmet er opdelt dels i ugens 7 dægn (onsdag kl. 0000 til tirsdag kl. 2400 G.M.T.), og dels efter selskabets forskellige flytyper (her kun typerne A og B, af hvilke selskabet tænkes at have 10 hhv. 8 maskiner. De ugentlige ruter for de ialt 18 maskiner er markeret ved liniestykker, hvis begyndelses- og endepunkter angiver ruterne hhv. afgang- og ankomsttidspunkter. Ingen signatur foran eller efter liniestykket betyder afgang fra og ankomst til basen, mens signaturerne »ARN«, »BLL«, »GOT« og »FNB« angiver afgang fra eller ankomst til henholdsvis Arnamølle, Ballerup, Gottrup og FNB.

sætningsstyrke vil være for stor for at gennemføre de øvrige af årets sæsoners flyveprogrammer, men ved dels at henlægge den maksimalt tilladte del af *alle* medlemmers årlige ferie, og dels ved at henlægge al omskoling og træning af besætninger i nye flytyper til sæsonerne *udenfor højsæsonen* vil man opnå en jævn og rigelig beskæftigelse hen over hele året for samtlige medlemmer i den minimale besætningsstyrke, som højsæsonens flyveprogram vil kræve. For højsæsonens flyveprogram gælder der den meget vigtige egenskab, at programmet gentages uge for uge. Denne egenskab betyder nemlig, at målsætning nr.1) nu er ensbetydende med at minimere antallet af medlemmer til at gennemføre *én* uges flyveprogram i højsæsonen.

Det ugentlige *flyveprogram*s principielle opbygning er vist i figur 1.

En besætningsplanlægning i et luftfartselskab må og skal tage hensyn til en lang række *restriktioner*, hvoraf nogle er stærkt kompliceret. Det drejer sig bl. a. om samlingen af alle de sikkerhedsregler, som luftfartsmyndighederne har udarbejdet. Det vil føre alt for vidt at komme ind på disse komplicerede regler i dette indlæg, men den grundlæggende idé i regler kan *kort* skitseres på følgende måde:

Reglerne er udformet som et system af points, hvis funktion er at indikere graden af *træthed* hos et besætningsmedlem. Systemet er standardiseret forstået på den måde, at systemet har den samme virkning for *alle* besætningsmedlemmer uafhængig af deres individuelle fysiske modstandskraft mod træthed. Den standardtilstand af træthed et besætningsmedlem befinder sig i til et givet tidspunkt betegnes som hans *Fatigue Level (F)* i dette tidspunkt. For F gælder:

1. Negative værdier af F er ikke defineret.
2. $F = 0$ points indikerer den fuldstændige udhvilede tilstand hos besætningsmedlemmet.
3. $F = 100$ points indikerer det *maksimalt tilladte* Fatigue Level »under normale betingelser«. Når F kommer op på denne værdi, *skal* besætningsmedlemmet indtage en hvileperiode af en sådan længde, at F reduceres med ganske bestemte minimale værdier alt afhængig af reduktionen af F i den sidst foregående hvileperiode.

Under en flytjeneste vokser F proportionalt med varigheden af flytjenesten og antallet af landinger efter forskellige formler afhængig af flytype, og under hvileperioder aftrappes F proportionalt med varigheden af hvileperioden med 2 forskellige timesatser, én gældende for nattetimerne og den anden gældende for dagtimerne (lokale tider).

Man kan sige, at disse sikkerhedsregler, som luftfartsmyndighederne har udarbejdet, indikerer en række forskellige tilladelige intervaller, i hvilke Fatigue Level (F) *skal* befinde sig i for *ethvert* besætningsmedlem, og dermed at intervallernes øvre grænser (under flytjeneste) og nedre grænser (under hvileperioder) udgør de restriktioner, der på intet tidspunkt må overskrides («under normale betingelser»).

Ud over disse regler for Fatigue Level (F) omhandler luftfartsmyndighedernes sikkerhedsregler bl. a. bestemmelser for maksimalt tilladte varigheder af besætningsmedlemmets flytjenester. Bortset fra disse bestemmelser eksisterer der ingen bestemmelser om varigheden for en flytjeneste, hvilket betyder, at der ikke eksisterer nogen »fast arbejdsdag« for et besætningsmedlem.

De *øvrige restriktioner*, som besætningsplanlægningen må og skal tage hensyn til, er som følger:

1) *Sociale goder:*

Ethvert medlem har krav på enten 2 *adskilte* eller 2 *sammenhængende* ugentlige *fridage*. De minimale varigheder for disse 2 alternative former for ugentlige fridage er angivet ved nogle komplicerede formler, hvis indhold og forudsætninger det vil føre for vidt at komme ind på her.

I perioden 15. maj til 1. september har ethvert medlem krav på minimum 1 uges *ferie* uafhængig af medlemmets alder, mens antallet af ugers ferie i den øvrige del af året er determineret af medlemmets alder efter nærmere angivne regler.

2) *Minimale besætninger og regler for forstærkning af besætninger:*

De minimale besætninger er afhængig af flytype. Et fly, der skal til at gennemføre en rute i flyveprogrammet, hvor ruten har et Fatigue Level, der er ≤ 100 points (incl. en række tillæg), kan og bør bemannes med den for flytypen fastsatte minimale besætning. Hvis en routes Fatigue Level (incl. en række tillæg) overstiger 100 points, så *skal* den minimale besætning forstærkes efter nærmere fastsatte regler, der ligeledes er afhængig af flytype. Ved at forstærke en minimal besætning til at gennemføre de ruter, hvis Fatigue Level overstiger 100 points, opnår man, at de enkelte medlemmer skiftevis kan hvile sig (efter fastsatte regler) og således holde deres respektive Fatigue Levels under de 100 points. Konsekvensen af denne restriktion for problemstillingen er, at vi må minimere antallet af medlemmer i de respektive stillingskategorier i stedet for at minimere antallet af besætninger.

3) *Besætninger og flytyper:*

Af sikkerhedsmæssige grunde skal besætningsmedlemmerne specialisere sig i én flytype. Denne restriktion får den konsekvens for problemstillingen, at *vi må minimere antallet af besætningsmedlemmer i de forskellige stillingskategorier for hver flytype for sig.*

4) *Sværhedsgrader for landingspladserne på de respektive destinationer:*

Samtlige verdens lufthavne er klassificeret i én af 3 sværhedsgrader, i hvilke særheden at lande en maskine er det afgørende kriterium. For hver sværhedsgrad kræves visse fastsatte minimumskvalifikationer hos alle medlemmer i en besætning, der skal lande en maskine i en lufthavn af den pågældende sværhedsgrad. Besætningsplanlægningen må derfor tage højde for de øjeblikkelige kvalifikationer, som de enkelte medlemmer besidder.

5) *Samtlige ruter i flyveprogrammet skal gennemføres:*

Charterselskabet er kontraktmæssigt forpligtet overfor rejsebureauerne at gennemføre *alle* ruter i flyveprogrammet. (En rige belægningsprocent på en rute eller afbud fra et besætningsmedlem er således ulovlige argumenter for at aflyse ruten).

6) *Antallet af baser og deres geografiske placeringer:*

Charterselskabet opererede kun med 1 base, som var en af Europas største lufthavne. Generelt er antallet af baser og deres geografiske placeringer bestemt af bopælsforhold for såvel cockpitbesætningsmedlemmer som for kabinebesætningsmedlemmer. Betydningen af antallet af baser og deres geografiske placeringer for besætningsplanlægningen er bl. a. dels en række tillæg til medlemmernes Fatigue Level, og dels en række omkostninger ved at transportere medlemmerne til og fra basen f. eks. med rutefly.

Ud over de her meget summarisk gennemgåede restriktioner samt et par til, som af pladshensyn ikke er medtaget her, må og skal besætningsplanlægningen også tage hensyn til den *risiko*, der ligger i at besætningsmedlemmer kan sende afbud til ruter, som de ellers var sat til at gennemføre. (En årsag til afbud kan være sygdom). Det vil føre for vidt at komme ind på hvordan man statistisk kan »beregne« risikoen og hvordan besætningsplanlægningen skal tage hensyn til denne risiko.

Den hidtidige behandling af problemstillingen har bestået deri, at vi først har gjort rede for selskabets *målsætninger* for den funktion i selskabet, der vedrører besætningsplanlægningen af cockpitgruppen, dernæst har vi gjort rede for *flyveprogrammet* (figur 1), og endelig har vi redegjort for de *restriktioner*, som besætningsplanlægningen må og skal tage hensyn

til. På basis af denne fremstilling af problemstillingen, kan problemstillingen nu formuleres i følgende 2 delproblemer, der tilsammen udgør det vi kan kalde *problemstillingens problem*:

Delproblem 1:

Vi betragter her kun de restriktioner, der har nøjagtig den *samme* indflydelse på *ethvert* medlems muligheder for at gennemføre en eller flere ruter i løbet af én uge. De medtagne restriktioner er således alle regler for medlemmernes Fatigue Levels samt de sociale goder, idet vi dog ser helt bort fra alle ferier. Vi skal nu under hensyntagen til disse og kun disse restriktioner for hver flytype for sig danne alle de kombinationer af ruter, som de respektive flytyper (flytype A og B i figur 1) gennemfører i løbet af en uge ifølge det givne flyveprogram. Disse kombinationer af ruter, som hver især vil blive benævnt »en mulig Round-Trip«, er for det første karakteriseret derved, at der kræves ét og kun ét besætningsmedlem af en given stillingskategori til den givne flytype (f. eks. kategorien luftkaptajner til flytype A) til at gennemføre én kombination = én mulig Round-Trip, og for det andet at hver af disse mulige Round-Trips opfylder de her opstillede restriktioner. Vi vil få 2 sæt mulige Round-Trips, nemlig ét sæt for flytype A og ét sæt for flytype B. Betragter vi eksempelvis sættet af mulige Round-Trips for flytype A, kan vi med sikkerhed sige, at disse mulige Round-Trips gælder for såvel luftkaptajner som for 2.-piloter (idet vi tænker os at flytype A kun skal besættes med luftkaptajner og 2.-piloter), fordi vi kun har betragtet de restriktioner, som har nøjagtig den samme indflydelse på de muligheder en kaptajn har for at gennemføre ruterne i en vilkårlig mulig Round-Trip som på de muligheder en 2.-pilot har for at gennemføre de samme ruter i den pågældende mulige Round-Trip. Problemet her i delproblem 1 består således i *hvor* *dan* vi kan danne de mulige Round-Trips for de 2 flytyper.

Delproblem 2:

Lad os først betragte sættet af mulige Round-Trips for flytype A, og lad os dernæst betragte luftkaptajnerne til denne flytype. Da flyveprogrammet er givet og da reglerne for de minimale og forstærkede besætninger er kendte, ved vi hvilke *behov* for luftkaptajner, som de enkelte ruter for flytype A vil kræve. For de fleste flytyper vil det gælde, at såfremt rutens Fatigue Level er ≤ 100 points er behovet kun 1 luftkaptajn, og såfremt en rutes Fatigue Level er > 100 points, skal den minimale besætning kun forstærkes med 1 luftkaptajn d. v. s. for sådanne ruter er behovet 2 luftkaptajner. Lad os tænke os at disse regler gælder for flytype A.

Med denne information om de enkelte ruters behov for luftkaptajner skal vi blandt sættet af mulige Round-Trips for flytype A udtage så få mulige Round-Trips som overhovedet muligt, men dog således, at *for det første* restriktionen om, at alle ruter skal gennemføres, bliver tilfredsstillet (hvilket betyder, at alle de ruter, som flytype A gennemfører i løbet af ugen, får tildelt det antal kaptajner, som disse ruter hver især kræver), *for det andet* at der blandt de udvalgte mulige Round-Trips forekommer en eller flere, i hvilke hvileperioderne er af sådanne varigheder, at vi lige præcis kan få indbygget så mange såkaldte stand-by vagter*) med de varigheder og med den fordeling hen over ugen, som risikoen for afmeldinger blandt luftkaptajner til flytype A betinger, og *for det tredje* at der blandt de udvalgte mulige Round-Trips indgår netop den eller de mulige Round-Trips, der hver indeholder alle eller næsten alle de vanskeligste landingspladser (det minimale antal af disse mulige Round-Trips er determineret af antallet af luftkaptajner, der i øjeblikket besidder de nødvendige kvalifikationer for at lande på de pågældende landingspladser). Det må bemærkes, at de restriktioner vi så bort fra i delproblem 1, indgår som restriktioner her i delproblem 2, dog stadig med undtagelse af feriekravene. Problemet med at tage hensyn til feriekravene vil jeg ikke komme ind på her, men blot sige at dette problem er uafhængig af de her formulerede delproblem 1 og 2, samt at problemet er ganske enkelt at løse.

Herefter kunne vi betragte 2.-piloterne til flytype A. Vi skal da blandt sættet af mulige Round-Trips for flytype A udtage så få som overhovedet muligt, men under hensyntagen til de samme restriktioner vi lige ovenfor betragtede for luftkaptajnerne. Naturligvis kan disse restriktioner have forskellige værdier for stillingskategorierne luftkaptajner og 2.-piloter. F. eks. kan det for flytype A gælde, at hver rute kræver én og kun én 2.-pilot uafhængig af rutens Fatigue Level, mens vi ovenfor så at såfremt en rutes Fatigue Level oversteg 100 points skulle besætningen bestå af 2 kaptajner, og for ruter med et Fatigue Level ≤ 100 points behøvede vi kun én luftkaptajn. Antallet af stand-by vagter kan også være forskelligt for kaptajner og 2.-piloter. For flytype B antager delproblem 2 en helt analog formulering.

Givet flytype og stillingskategori består delproblem 2 således i *hvordan*

*) En »stand-by vagt« er en vagt selskabet kan tildele et besætningsmedlem med en nærmere angiven minimal hhv. maksimal varighed, i løbet af hvilken medlemmet har pligt til at indtræde i en besætning til hvilken et andet besætningsmedlem har sendt afbud f. eks. på grund af sygdom. Der eksisterer faste regler for beregning af Fatigue Level for et medlem under stand-by vagt.

vi kan finde frem til de Round-Trips, der kan udtages på den her beskrevne måde.

Det skal nu pointeres, at såfremt vi kan løse de 2 delproblemer samt ferieproblemet, opnår vi *for det første* at minimere antallet af besætningsmedlemmer i respektive stillingskategorier for de 2 flytyper (f. eks. er det minimale antal luftkaptajner til flytype A lig det minimale antal udtagne mulige Round-Trips i delproblem 2 plus det antal, som hensyntagen til ferierestriktionen vil medføre; som nævnt på side 52 kræves der ét og kun ét besætningsmedlem af den betragtede stillingskategori til at gennemføre én mulig Round-Trip), og *for det andet* ved vi straks hvilke ruter hvilke besætningsmedlemmer i de respektive stillingskategorier til de 2 flytyper skal flyve i og med, at vi kender de udvalgte Round-Trips' konkrete indhold af realiserede ruter i løbet af ugen. Vi vil kunne se, at en løsning på disse 2 delproblemer samt ferieproblemet vil imødekomme selskabets opstillede målsætninger for besætningsplanlægningen.

2. Modelstruktur

a) Indledning

Uden her at komme ind på en diskussion om modelvalg (f. eks. om modellen skal være stokastisk eller deterministisk og da hvilken) skal det straks siges, at den model, der måske bedst afbilder problemstillings problem er en deterministisk model, som er et specialtilfælde af den generelle heltallige lineære model. Modellen kaldes i den engelsksprogede litteratur for »All Zero-On Integer Linear Model« (på dansk: »nul-eeet heltallig lineær model«), og er bl. a. karakteriseret derved, at modellens variable, x_j , kun kan antage værdierne 0 eller 1, deraf navnet.

Den nul-eeet heltallige lineære models *generelle* struktur kan algebraisk formuleres således:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimer} & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\text{kriteriefunktionen}), \\ \text{under hensyn til} & \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_j = b_i, \quad \text{hvor } i = 1, 2, \dots, m \\ \text{og under hensyn til at } x_j = 0 \text{ eller } 1, & \text{hvor } j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

I matrix-terminologien kan modellen formuleres således:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimer} & Z = C'X \quad , \\ \text{under hensyn til} & AX = B \quad , \\ \text{og under hensyn til} & x_j = 0 \text{ eller } 1 \quad , \text{ hvor } j = 1, 2, \dots, n \quad , \end{array}$$

og hvor C er en $(n \times 1)$ matrix, altså en søjlevektor, og C' er den transponerede matrix af C d. v. s. en rækkevektor, X er ligeledes en søjlevektor af dimensionen $(n \times 1)$, A er en $(m \times n)$ matrix, og endelig B er en søjlevektor af dimensionen $(m \times 1)$. Z bliver af dimensionen $((1 \times n) \times (n \times 1)) = (1 \times 1)$, altså et tal.

For at bringe de 2 formuleringer i overensstemmelse med hinanden har vi:

$$C' = (c_1, c_2, \dots, c_n), \text{ og } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ og } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{og } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ifølge multiplikationsreglen for matrixer har vi da:

$$\text{Minimer } Z = C'X = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{j=n} c_jx_j, \quad ,$$

under hensyn til $AX = B$, d.v.s.:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \sum_{j=1}^{j=n} a_{1j}x_j = b_1, \quad ,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \sum_{j=1}^{j=n} a_{2j}x_j = b_2, \quad ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = \sum_{j=1}^{j=n} a_{mj}x_j = b_m, \quad ,$$

og $x_j = 0$ eller 1 for $j = 1, 2, \dots, n$

I den generelle formulering af den nul-ect heltallige lineære model kan c_j og a_{ij} såvel som b_i antage alle reelle værdier ($i = 1, 2, \dots, m$ og $j = 1, 2, \dots, n$).

b) *Modellens specielle struktur ved afbildning af problemstillingens problem i den generelle model:*

Lad os betragte en vilkårlig søjle i A-matricen i den generelle nul-eeet heltallige lineære model f. eks. søjle nr. j:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Hvis vi nu lader række-numrene $i = 1, 2, \dots, m$ betyde rutenumrene $i = 1, 2, \dots, m$ f. eks. for de ruter, som flytype A gennemfører i løbet af en uge (det totale antal ruter i løbet af en uge for flytype A er da lig m), og hvis vi specielt kun vil tillægge a_{ij} i den givne søjle nr. j enten værdien 0 eller værdien 1 kan vi opfatte den givne, men i øvrigt vilkårligt valgte søjle i A-matricen, som en mulig round-trip. Hvis $a_{ij} = 0$ betyder det, at rute nr. i ikke indgår i søjle nr. j (= round-trip nr. j). Hvis $a_{ij} = 1$ betyder det, at rute i skal indgå i round-trip nr. j. Hver søjle kan da siges at repræsentere en mulig round-trip, når $a_{ij} = 0$ eller 1 for $i = 1, 2, \dots, m$ for et givet søjlenummer j hvor j kan antage værdierne $j = 1, 2, \dots, n$. Talværdien af n vil angive det totale antal mulige round-trips for flytype A i dette tilfælde. Lad os betragte en realisering af søjle nr. j:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

I denne søjle er $a_{1j} = 1$ d.v.s. rute nr. $i = 1$ skal indgå i round-trip nr. j, $a_{2j} = 0$ d.v.s. rute nr. $i = 2$ ikke indgår i round-trip nr. j, o.s.v. ned til a_{mj} hvor $a_{mj} = 1$ d.v.s. den sidste rute for flytype A rute nr. $i = m$ skal indgå i round-trip nr. j.

Dernæst lader vi b_i betyde det behov for besætningsmedlemmer af en bestemt stillingskategori, som ruten $r. i$ kræver. Hvis vi som eksempel betragter 2.-piloterne til flytype A, og vi ved at behovet er én 2.-pilot til hver af de ialt m ruter, d. v. s. $b_i = 1$ for $i = 1, 2, \dots, m$. Havde vi i stedet for betragtet luftkaptajnerne til flytype A, ville b_i være lig 1 for alle de

ruter, der har et Fatigue Level (incl. alle tillæg) på max. 100 points, fordi behovet af luftkaptajner til hver af disse ruter er én kaptajn, mens b_i vil antage værdien 2 for de ruter, som har et Fatigue Level (incl. alle tillæg), der overstiger værdien 100 points.

Hvis vi endelig tillægger koefficienterne c_j i kriteriefunktionen værdien 1 for alle j d. v. s. for $j = 1, 2, \dots, n$ vil kriteriefunktionen Z antage følgende udseende:

$$Z = \sum_{j=1}^{j=n} x_j, \text{ for } c_j = 1 \text{ for } j = 1, 2, \dots, n,$$

Da kriteriefunktionen Z skal minimeres, og da x_j kun kan antage værdien 1 eller 0 (at $x_j = 1$ betyder at søjle nr. j d. v. s. round-trip nr. j skal indgå i en løsning, mens $x_j = 0$ betyder at søjle nr. j d. v. s. round-trip nr. j ikke skal indgå i en løsning), skal kriteriefunktionen nu tolkes således, efter at vi har sat $c_j = 1$ for $j = 1, 2, \dots, n$:

Vi ønsker at tillægge x_j værdien 1 for så få værdier af j som overhovedet muligt, d. v. s. at vi ønsker, at så få round-trips blandt de ialt n mulige skal blive realiseret (og dermed tillægge x_j værdien 0 for så mange værdier af j som overhovedet muligt, d. v. s. at så mange round-trips som overhovedet muligt ikke skal blive realiseret), men *under hensyntagen* til at højresiderne b_i for de ialt m rækker, d. v. s. for de ialt m ruter, bliver tilfredsstillet. Denne fortolkning af Z betyder jo netop, at vi ønsker at minimere Z , og vi vil konstatere, at denne fortolkning af Z er identisk med formuleringen af delproblem 2 på side 52–54. Hvis vi f. eks. betragter 2.-piloterne til flytype A, betyder en minimering af Z en minimering af antal 2.-piloter, fordi der til én round-trip kræves én og kun én 2.-pilot, og denne minimering *skal* jo bl. a. netop tage hensyn til, at hver rute i flyveprogrammet skal gennemføres, d. v. s. at hver rute får tildelt $b_i = 1$ 2.-pilot.

Hvis vi kan løse modellen, d. v. s. finde værdier for x_j for $j = 1, 2, \dots, n$, har vi ikke alene opnået at minimere antallet af 2.-piloterne til flytype A, idet vi som eksempel fortsat kan tænke på disse piloter, men vi har *også* fået at vide, hvilke ruter hvilke af disse 2.-piloter hver især skal flyve i løbet af ugen, fordi i og med vi ved hvilke værdier x_j har antaget i løsningen, ved vi samtidig hvilke round-trips, der er blevet realiseret, og en round-trip udtrykker jo netop hvilke ruter det kan være muligt at kombinere, givet restriktionerne. Dette betyder, at en løsning på den her foreslåede model vil imødekomme begge de af selskabet opstillede målsætninger.

Lad os resumere den nul-*cet* heltallige lineære models specielle struktur ved afbildning af problemstillings problem i den generelle model, og lad os denne gang betragte luftkaptajnerne til flytype A, og lad os endvidere tænke os, at der blandt de ruter, som flytype A flyver i løbet af ugen, kun forekommer én rute, der kræver 2 luftkaptajner nemlig rute nr. k , mens alle øvrige ruter kun kræver 1 kaptajn. Modellens specielle struktur bliver da:

Minimer $Z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ (= minimer antallet af realiserede round-trips = minimer antallet af luftkaptajner til flytype A),

idet $c_j = 1$ for $j = 1, 2, \dots, n$,
under hensyn til at

$$\begin{array}{rcccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & 1 & , \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & 1 & , \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ a_{k-1,1}x_1 & + & a_{k-1,2}x_2 & + \dots + & a_{k-1,n}x_n & = & 1 & , \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + \dots + & a_{kn}x_n & = & 2 & , \\ a_{k+1,1}x_1 & + & a_{k+1,2}x_2 & + \dots + & a_{k+1,n}x_n & = & 1 & , \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & 1 & , \end{array}$$

hvor $a_{ij} = 0$ eller 1 for $i = 1, 2, \dots, m$ og $j = 1, 2, \dots, n$
og hvor $x_j = 0$ eller 1 for $j = 1, 2, \dots, n$.

Af modellens specielle struktur kan vi endvidere se at

$$b_1 = b_2 = \dots = b_{k-1} = b_{k+1} = \dots = b_m = 1 \text{ mens } b_k = 2.$$

Havde vi betragtet 2.-piloterne skulle *alle* højresider antage værdien 1, d. v. s. $b_i = 1$ for $i = 1, 2, \dots, m$.

Når vi vil benytte modellen på de rent faktiske data, vil vi erfare, at antallet af søjler i A-matricen er betydeligt større end antallet af rækker (d. v. s. $n \gg m$), idet antallet af mulige roud-trips, som vi kan danne af et givet antal ruter i et givet flyveprogram, vil vise sig at være betydeligt større end det givne antal ruter.

Modellens specielle struktur er vist i følgende figur:

Round-trip nr. $j =$ Søjle nr. j :	1	2	3	$n-1$	n	Højre- side
»Omkostning« $c_j = :$	1	1	1	1	1	b_i
Element i A-matrix:	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	$a_{i,n-1}$	a_{in}	
Rute nr. $i = 1$	0	0	1	0	1	$= 1$
Rute nr. $i = 2$	1	0	0	0	0	$= 1$
.....
.....
.....
.....
.....
Rute nr. $i = k-1$	0	1	1	1	0	$= 1$
Rute nr. $i = k$	1	0	1	0	1	$= 2$
Rute nr. $i = k+1$	0	0	0	1	0	$= 1$
.....
.....
.....
.....
.....
.....
Rute nr. $i = m$	0	1	1	0	1	$= 1$

Figur 2. Eksempel på udseendet af den nul-set heltallige lineære models elementer i A-matricen samt rækkernes højresider b_i .

Referencer

1. R. L. Ackoff, *Scientific Method – Optimizing Applied Research Decisions*, John Wiley & Sons, U. S. A., 1967.
2. R. L. Ackoff & M. W. Sasieni, *Fundamentals of Operations Research*, John Wiley & Sons, U. S. A., 1968.
3. AGIFORS Proceedings nr. VI, 1966, nr. VII, 1967 og nr. VIII, 1968 flg. afsnit:
 - 1) J. P. Arabeyre, *Methods of Crew Scheduling*, nr. VI.
 - 2) J. P. Arabeyre, *Combinatorial Algorithms for Crew Scheduling*, nr. VII.
 - 3) J. Fearnley, *Crew Scheduling in AIR CANADA*, nr. VI.
 - 4) R. Griesshaber, *A Heuristic Model for the Impersonal Phase of Crew Scheduling*, nr. VIII.
 - 5) J. Agard, *The AIR FRANCE TARAGE Plan*, nr. VIII.
 - 6) T. K. Kolner, *Some Highlights of A Scheduling Matrix Generator System*, nr. VI.
 - 7) F. Steiger, *Activity Report of the AGIFORS Studygroup »Crew Scheduling«*, nr. VII.
 - 8) J. Taylor, *A Common Approach to Aircraft and Aircrew Scheduling*, nr. VI.
 Artiklerne er publiceret af AMERICAN AIRLINES, Inc., New York.
4. Egon Balas, »An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables«, s. 517–549 i *Operations Research*, Vol. 13, no. 2, 1965.
5. M. L. Balinski, »Integer Programming: Methods, Uses, Computation«, s. 253–313 i *Management Science*, Vol. 12, no. 3, 1965.
6. Fred Glover, »A Multiphase-Dual Algorithm for Zero-One Integer Programming«, s. 79–919 i *Operations Research*, Vol. 13, no. 2, 1965.
7. Erik Johnsen, »Analyseprocessen«, s. 95–114 i *Erhvervsøkonomisk Tidsskrift*, nr. 2, København 1964.
8. John F. Pierce, »Application of Combinatorial Programming to a Class of All-Zero-One Integer Programming Problems«, s. 191–209 i *Management Science*, Vol. 15, no. 3, 1968.
9. John F. Pierce, »Direct Search Algorithms for Truck-Dispatching Problems – Part I – Special Survey Paper«, s. 1–42 i *Transportation Science*, Vol. 3, no. 1, 1969.