Løsning af en virksomheds investeringsproblemer ved traditionelle investeringsmodeller og lineær programmering

Af Johannes Mouritsen*)

I det følgende analyseres nogle udvalgte modeller og deres egenskaber til at beskrive konsekvenserne af en investering. Modellerne er de 2 klassiske investeringsmodeller: kapitalværdi- og internrente- samt lineær programmeringsmodellen, der er én af operationsanalysens standardmodeller.

Konsekvenserne af en virksomheds investeringsbeslutning karakteriseres bl.a. ved, at virksomhedens handlefrihed indsnævres i en længere tidperiode ud i fremtiden. Omfanget og varigheden af begrænsningen i handlefriheden bestemmes af investeringens størrelse og art samt af virksomhedens ressourcer.

Investeringsproblemet består i hovedtræk i at give svar på følgende spørgsmål:

1) hvilke investeringer skal accepteres blandt mængden af mulige investeringer?
2) hvor stort skal det samlede investeringsbeløb være?
3) hvordan skal investeringerne finansieres?

1, 2 og 3 skal sammenkobles med tidsdimensionen, dvs. problemet er at træffe beslutning om:

på hvilket tidspunkt skal hvor store beløb placeres i hvilke investeringer, og fra hvilke kapitalkilder fremskaffes de nødvendige beløb til finansiering af investeringerne?

Spørgsmålene er interrelaterede, hvilket betyder, at de i princippet må løses simultant. Interaktionsforholdet kan belyses ved følgende:

*) cand. merc., Institut for Finansiering, Handelshøjskolen i København.

Løsning af en virksomheds investeringsproblemer ved traditionelle investeringsmodeller og lineær programmering

Af Johannes Mouritsen*)

I det følgende analyseres nogle udvalgte modeller og deres egenskaber til at beskrive konsekvenserne af en investering. Modellerne er de 2 klassiske investeringsmodeller: kapitalværdi- og internrente- samt lineær programmeringsmodellen, der er én af operationsanalysens standardmodeller.

Konsekvenserne af en virksomheds investeringsbeslutning karakteriseres bl.a. ved, at virksomhedens handlefrihed indsnævres i en længere tidperiode ud i fremtiden. Omfanget og varigheden af begrænsningen i handlefriheden bestemmes af investeringens størrelse og art samt af virksomhedens ressourcer.

Investeringsproblemet består i hovedtræk i at give svar på følgende spørgsmål:

1) hvilke investeringer skal accepteres blandt mængden af mulige investeringer?
2) hvor stort skal det samlede investeringsbeløb være?
3) hvordan skal investeringerne finansieres?

1, 2 og 3 skal sammenkobles med tidsdimensionen, dvs. problemet er at træffe beslutning om:

på hvilket tidspunkt skal hvor store beløb placeres i hvilke investeringer, og fra hvilke kapitalkilder fremskaffes de nødvendige beløb til finansiering af investeringerne?

Spørgsmålene er interrelaterede, hvilket betyder, at de i princippet må løses simultant. Interaktionsforholdet kan belyses ved følgende:

*) cand. merc., Institut for Finansiering, Handelshøjskolen i København.

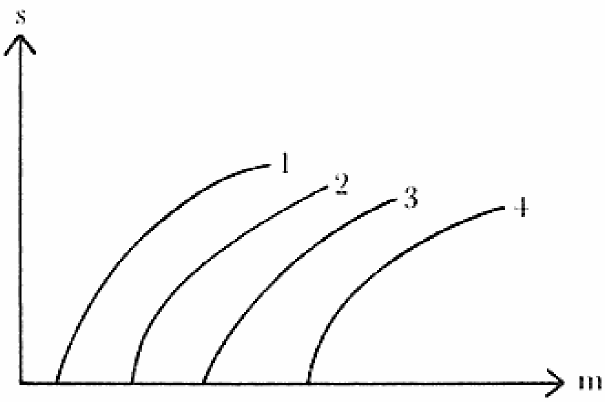
1) Sammenhængen mellem et investeringsprojekt og et finansieringsprojekt. Eksempel: en investering i fast ejendom giver mulighed for specielle finansieringsformer.
2) Sammenhængen mellem en virksomheds likviditetsudvikling og genereringstidspunkterne for gunstige investeringsprojekter, dvs. igangsætningssekvensen for nye investeringer påvirkes af virksomhedens muligheder for at fremskaffe kapital fra interne og/eller eksterne finansieringskilder.
3) Sammenhængen mellem to investeringsprojekter. Eksempel:
   Projekt 1: Truck af mærke *x*.
   Projekt 2: Radioudstyr til truck af mærke *x*.
   Accept af projekt 2 er her betinget af accept af projekt 1.

En nødvendig forudsætning for at kunne løse et investeringsproblem er kendskab til virksomhedens målsætning(er) og til relationerne mellem investeringsprojekterne og målsætningen(erne) samt til projekternes data. Det er karakteristisk for den normative investeringsteori, at data om investeringsprojekter forudsættes at kunne måles på kardinale måleskalaer. Som eksempel kan nævnes, at konsekvenserne af en investering antages at kunne beskrives adækvat ved hjælp af et beløbskomponent og en tidskomponent.

I investeringsteorien præsenteres forskellige målsætninger f. eks.:

1) maksimering af investeringernes rentabilitet
2) maksimering af virksomhedens værdi
3) maksimering af ejernes afkast
4) minimering af risikoen.

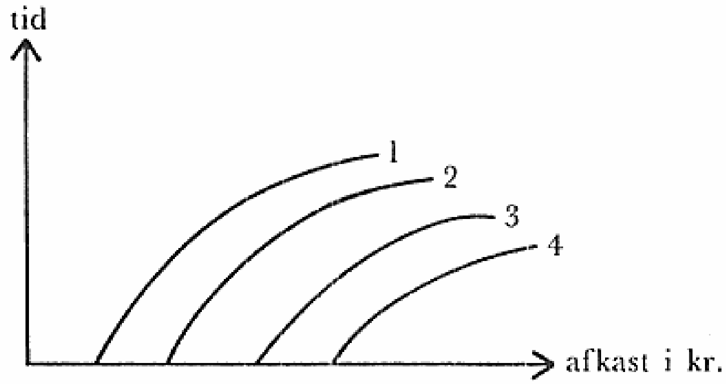
Uanset hvem beslutningstager er, antages det at tidligere frigørelsestidspunkter for afkastet af en investering har præferencer for senere. Tidspræferencen illustreres i figur 1.



Figur 1.

1, 2, 3 og 4 er isonyttekurver. Kurverne er nedad konkave, og jo længere ud i fremtiden afkastet frigøres, desto højere skal afkastet være, for at beslutningstagerne får samme nytte af investeringen alt andet lige.

De tilsvarende kurver i figur 2 udtrykker teoriens forudsætning om



Figur 2

beslutningstagernes indstilling til risikoen, der er knyttet til en investerings afkast.

m og s er henholdsvis middelværdi og spredning på investeringens afkast. 1, 2, 3 og 4 er igen isonyttekurver med samme rangordning som i figur 1. Af kurverne fremgår, at jo større spredning på afkastet, desto større skal middelværdien være, for at investeringen har samme nytte for beslutningstagerne.

En investering defineres som en aktivitet, der kan beskrives ved et cash flow, der begynder med en udbetaling. Tilsvarende defineres i denne forbindelse en finansieringsaktivitet ved et cash flow, der begynder med en indbetaling. De enkelte betalinger i cash flowet, der determinerer en investering, bestemmes ved marginalbetragtninger. Det vil sige, at betalingerne er lig summen af investeringens specifikke cash flow og cash flow'et, der angiver investeringens eventuelle følgevirkninger på det allerede eksisterende anlæg. Eksempler på følgevirkninger er:

1) salgssammenhænge mellem eksisterende produkter og et nyt produkt
2) tekniske sammenhænge mellem investeringen og et eksisterende produktionsanlæg. Resultatet af en teknisk sammenhæng er måske en reduktion af produktionsomkostningerne (-udbetalingerne) for det eksisterende anlæg.

Spørgsmålet om, i hvilket størrelsesforhold en investering eventuelt skal accepteres, – hvor mange maskiner skal anskaffes af type y, og på hvor mange kvadratmeter skal en ny fabrikshal bygges etc. – har betydning for definitionen af en investering ved formuleringen af investeringsproblemet. Eksempel: Skal investeringsprojekt 1 defineres som én maskine af type x eller 14 maskiner af type x? Skal projekt 8 defineres som en 100 m^2 eller en 10.000 m^2 stor fabriksbygning? Definitionsspørgsmålet har særlig betydning, hvor der er nonproportionale sammenhænge mellem investeringsstørrelsen og de deraf følgende cash flows, men har også betydning, hvor flere investeringer med forskellige enhedsstørrelser er alternativer.

I det følgende går vi ud fra, at investeringsprojekternes antal er kendt, dvs. søgeproceduren efter mulige projekter forudsættes afsluttet. Endvidere antager vi, at budgettering af projekternes data er foretaget.

Kapitalværdimodellen

Modellen bygger på forudsætningen om investors tidsmæssige præference med hensyn til en investerings nettoindbetalinger. Præferenceforholdet antages at kunne udtrykkes i en enkel faktor: Kalkulationsrenten, der her benævnes r. Idet c og a_j symboliserer henholdsvis grundinvesteringsbeløbet og nettoindbetalingerne på de respektive fremtidige tidspunkter (j), kan kapitalværdimodellen formuleres som:

$$KV = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot (l + r)^{-j} \div c$$

n er investeringens levetid. Ved hjælp af modellen kan investeringsprojekterne klassificeres i to grupper: gunstige eller ugunstige, hvor klassifikationskriteriet er, at nettokapitalværdien (KV) er større end eller lig 0. (Et projekt med $KV = 0$ er acceptabelt, da dets afkast er lig investors forrentningskrav).

Hvis vi har 6 investeringsprojekter – x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 og x_6 – hvoraf de fem første er gunstige, kan vi på grundlag af de beregnede KV-værdier rangordne projekterne. Lad os antage, at rangordningen for de gunstige projekter bliver:

$$x_4 > x_3 > x_2 > x_1 > x_5$$

Det bør fremhæves, at rangordningen er kardinal, dvs. vi ved, hvor meget x_4 er bedre end x_3 etc. Hvis projekt x_4 er betinget af projekt x_6, og projekt x_3 er betinget af projekt x_5, har ovenstående rangordning af projekterne ingen mening. Den relevante rangordning er måske:

$$x_3 + x_5 > x_2 > x_4 + x_6 > x_1 > x_5$$

dvs., et projekt med negativ kapitalværdi kan vel tænkes at blive realiseret. Det er tilfældet, hvis dets gennemførelse er en betingelse for, at et projekt med positiv *KV* værdi realiseres, og de 2 projekter sammenlagt har en positiv kapitalværdi.

Kapitalværdimodellen formår således at tage hensyn til interaktionsforhold mellem projekterne. Problemet består alene i at formulere relevante projektskombinationer ud fra kendskab til evt. projektsammenhænge.

Investeringer er sjældent delelige. Man kan f.ex. ikke anskaffe en halv maskine af type *x*. Forholdet har indflydelse på, hvordan et projekt skal defineres. Eksempel: Hvis et bestemt produktionsbehov kan opfyldes af enten maskiner af type *m* og/eller *n*, og hvis *KV* er større for en maskine af type *m* end for en maskine af type *n*, kan der ikke umiddelbart konkluderes, at der skal anskaffes så og så mange enheder af maskintype *m* til at honorere produktionsbehovet. Hvis det skulle være tilfældet måtte to forudsætninger være opfyldt, nemlig 1) ligefrem proportionalitetsforhold mellem *KV* og antal af maskiner og 2) at produktionsbehovet kan dækkes af nøjagtig *y* maskiner af type *m*.

Disse forudsætninger kan sjældent honoreres, hvilket medfører, at den optimale løsning først kan bestemmes efter et antal gennemregninger af *KV*-modellen for alternative maskinkombinationer. Resultatet kan vel blive, at der skal anskaffes maskiner af både type *m* og *n*.

KV-modellen maximerer rentabiliteten af en kapitalindsats med begrundelse i, at kapitalen er en knap faktor. *KV*-modellen belyser imidlertid ikke projektvalgets indflydelse på knapheden af ressourcerne. Hvis vi antager, at der kun er 100.000 kr. kapital til disposition for nye investeringer på tidspunkt t_0, er projekter med udbetalinger på beløb større end 100.000 kr. irrelevante. Lad os antage at rangordningen efter korrektion for størrelse af den disponible kapital bliver

$$x_2 > x_1 > x_5$$

Vi antager, at investeringsbeløbene til de tre projekter er henholdsvis 100.000 kr., 20.000 kr. og 60.000 kr., og at projekterne ikke har nogen forbindelse med hinanden ud over den finansielle sammenhæng. Kan man herefter konkludere, at projekt x_2 skal realiseres? Nej, det behøver ikke at være tilfældet. Projekt x_1 og projekt x_5 har måske tilsammen større *KV* end projekt x_2. Eller, hvis der er mulighed for at realisere et multiplum af x_1 og x_5 – jfr. projekternes definition – har måske $5\,x_1$ større *KV* end x_2. Problemet er et typisk allokeringsproblem, der som bekendt kan løses ved grænseværdibetragtninger. *KV*-modellen er i princippet anvendelig til løsning af kapitalallokeringsproblemet, men for blot et nogenlunde stort antal projekter bliver beregningsarbejdet overordentligt omfattende.

I tilknytning til eksemplet kan man stille spørgsmålet, om *KV*-rangordningen af de tre projekter er holdbar, hvis projekterne har forskellige levetider. Svaret er bekræftende, hvis modellens forudsætning: om ledig kapital inclusive frigjort kapital fra projekterne investeres til kalkulationsrentefoden, er opfyldt.

Et andet spørgsmål angår sammenhæng mellem projekternes genereringstidspunkt og likviditetsudvikling, dvs. den hastighed med hvilken projekterne frigør kapital.

Eksempel: Projekt 1 og projekt 2 er uafhængige investeringer, der begge er gunstige, men projekt 1 har størst kapitalværdi. Hvis størrelsen af den disponible kapital ikke muliggør realisering af begge projekter på tidspunkt t_0, er det ikke dermed givet, at projekt 1 skal realiseres og projekt 2 udskydes til et senere tidspunkt, hvor der er tilstrækkelig kapital til dets igangsættelse. Projekt 2 skal måske realiseres først, hvis det genererer en likviditetsudvikling, der gør det muligt at sætte projekt 1 igang kort tid efter t_0. Løsningen på problemet kan findes ved at beregne kapitalværdierne for de to alternative investeringsprogrammer:

1) realisere projekt 1 i t_0 og projekt 2, når der er indvundet tilstrækkelig kapital.
2) realisere projekt 2 i t_0 og projekt 1, når der er indvundet tilstrækkelig kapital.

Det ses, at selv om *KV*-modellen i princippet er anvendelig for kombinationer, vil et større antal gunstige investeringsmuligheder forøge beregningsarbejdet ganske væsentligt.

Vi har hidtil forudsat, at der var en given egenkapital til rådighed for investeringsformål. Men en virksomhed har mere eller mindre begrænsede muligheder for at låne kapital mod at betale omkostningerne og acceptere kapitalgivernes øvrige betingelser. Hvorledes tager *KV*-modellen hensyn til dette forhold?

Kalkulationsrentefoden (r) er et udtryk for beslutningstagerens afkastningskrav til den investerede kapital. Spørgsmålet er, hvordan fastsættes afkastningskravet? Hvis virksomheden udelukkende anvender egenkapital, må kapitalbudgettets marginelle afkastningskrav mindst være lig afkastet ved alternative externe kapitalplaceringer i f.eks. pengeinstitutter og værdipapirer. Men der er risiko forbundet med at gennemføre en investering, og som kompensation herfor må afkastningskravet til investeringen være større end afkastet ved externe kapitalplaceringer med mindre risiko. Hvis virksomheden anvender både egenkapital og fremmedkapital er afkastet på den investerede egenkapital foruden den nævnte forrentningsmæssige risiko udsat for en finansiel risiko på grund af de sikre forpligtelser til forrentning og amortisering.

Dvs. der er en sammenhæng mellem forrentningskravet til egenkapitalen og gældsandelen (= fremmedkapital i forhold til totalkapital). Ved sammenvejning af forrentningskravene til egenkapital og fremmedkapital med de respektive kapitalandele bestemmes for en given kapitaldækning den faktor, der i finansieringslitteraturen kaldes virksomhedens kapitalomkostning (k).

Finansieringen indgår i modellen ved at sætte kalkulationsrentefoden (r) lig virksomhedens kapitalomkostning (k). Kapitalværdien af en investering kan kun beregnes, når r er en kendt størrelse; men r er jfr. ovenstående afhængig af investeringens finansiering, som ikke kendes i udgangssituationen, da investeringsomfanget ikke er kendt. Dvs. *KV*-modellen er utilstrækkelig til at afspejle interaktionen mellem investerings- og finansieringsprojekter.

Afkastet af en investering kan ifølge sagens natur kun budgetteres med en vis sandsynlighed. Den simple udgave af *KV*-modellen tager ikke hensyn hertil. Et projekts nettoindbetalinger antages implicit at være sikre værdier, dvs. risikoen eller spredningerne på betalingerne er lig nul.

Finansieringslitteraturen rummer dog forskellige udvidelser af den simple *KV*-model. En metode er som nævnt ovenfor at forøge kalkulationsrenten med et tillæg for risikoen ved at investere. Kalkulationsrentefoden bliver som i den simple model en konstant størrelse, dvs. investeringsafkastene diskonteres med samme faktor uanset forfaldstidspunkt. Herved får metoden en væsentlig svaghed, idet forudsætningen for at anvende en konstant diskonteringsfaktor er

1) risikoen vokser eksponentielt med tiden og
2) afkastene er uafhængige af hinanden.

En anden metode diskonterer afkastene (lig forventede værdier) og deres spredninger med en risikofri kalkulationsrentefod og opnår herved en fordeling for investeringens kapitalværdi.

Et tredie og bedre forslag til løsning af risikoproblemet i *KV*-modellen tager udgangspunkt i sandsynlighedsfordelinger for samtlige betalinger, der determinerer i investeringsafkastet på et givet tidspunkt. Ved hjælp af simulationsteknikken kædes sandsynlighedsfordelingerne sammen til en fordeling for projektets *KV*-værdi.

Intern rentemodellen

Modellen bygger på de samme komponenter som *KV*-modellen, nemlig beløbs- og tidskomponenter. Modellens optimeringskriterium er maksimering af den interne rente (i), der fremkommer som den k værdi, der er løsning i nedenstående ligning, hvor symbolerne har samme betydning som tidligere:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j (1+k)^{-j} = c$$

Det fremgår heraf, at en investerings interne rente er lig diskonteringsfaktoren, der resulterer i en kapitalværdi på 0 kr. Accepteringskriteriet er

$$i \geq r$$

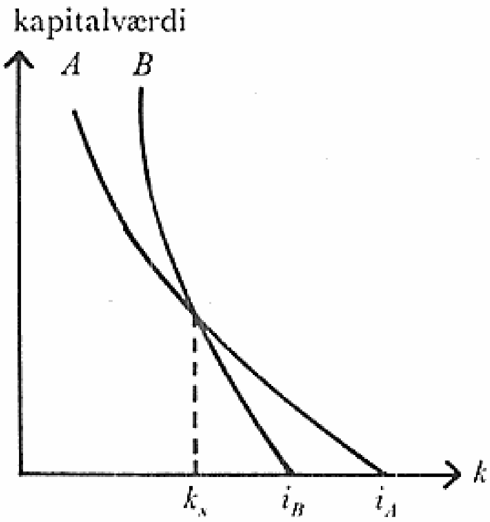
dvs. en gunstig investerings interne rente må være større end eller lig med virksomhedens kalkulationsrentefod.

Modellen muliggør en kardinal rangordning af investeringsprojekter. Det er dog en forudsætning for at kunne rangordne projekter med forskellig levetid og grundinvesteringsbeløb, at ledig kapital kan reinvesteres til den interne rentefod. Projekternes rangordning er ikke nødvendigvis lig med *KV*-modellens rangordning jfr. figur 3, hvor to projekters kapitalværdier er beregnet for varierende diskonteringsfaktor.

Projekterne A og B har en intern rente på henholdsvis i_A og i_B, dvs. projekt A altid er at foretrække for projekt B. Betingelsen for, at begge projekter er gunstige, er $r \leq i_B$.

KV-modellen rangordner på samme måde, hvis $r > k_x$. Men B er det gunstigste projekt, hvis $r < k_x$, dvs. kalkulationsrentefodens størrelse er afgørende for, om modellerne giver konsistente rangordninger af investeringsprojekterne.

Spørgsmålet er, om den ene model er at foretrække fremfor den anden? Blandt teoretikere er der enighed om, at *KV*-modellen bør foretrækkes. Argumentationerne går på modellernes forudsætning om forrentning af ledig kapital. Kalkulationsrentefoden er som nævnt udtryk for virksomhedens alternative kapitalforrentningsmuligheder, hvorimod den interne rente er projektbestemt. Et eksempel kan illustrere det uhensigtsmæssige i at anvende den interne rente som forrentningsfaktor for ledig



Figur 3

kapital: en virksomhed, der i sine investeringsovervejelser anvender en kalkulationsrentefod på 20 %, har blandt sine investeringsmuligheder et exceptionelt projekt med en intern rentefod på 300 % p.a. Hvis projektet gennemføres vil det være urealistisk at forvente at den over tiden frigjorte kapital kan reinvesteres til 300 % p.a., medmindre projektet kan gentages. Det forekommer mere fornuftigt at regne med 20 % p.a. i forrentning af reinvesteringer.

Intern rente- og *KV*-modellen er to alen af ét stykke, og de tidligere bemærkninger angående interdependensproblemer gælder tilsvarende for intern rente modellen.

Usikkerhedsproblemet kan behandles via simulationsteknikken. For hvert projekt beregnes en sandsynlighedsfordeling for den interne rente, og der foretages en sammenligning med kalkulationsrentefoden. Beslutning om valg af projekter træffes på basis af virksomhedens indstilling til risiko.

Lineær programmerings modellen

LP-modellen er en standardmodel med en given struktur og givne egenskaber, der kan beskrives ved: optimering af en lineær funktion af et endeligt antal ikke negative variable under hensyntagen til et endeligt antal begrænsninger, for variablerne og lineære kombinationer af variablerne. Et generelt *LP*-problem kan formuleres: Find et sæt af variable $x_1, x_2, \ldots x_n$, der tilfredsstiller et system af lineære (*u*) uligheder:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \lesseqgtr b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \lesseqgtr b_m$$

og et sæt af begrænsninger for ikke-negativitet:

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

for hvilket den lineære funktion (kriteriefunktionen):

$$F = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_m$$

har optimum (maksimum eller minimum).

Løsning af modellen er relativ simpel, og idag findes der standard-programmer til EDB maskiner, der kan løse rimeligt store *LP*-problemer.

I en økonomisk fortolkning i forbindelse med investeringsproblemet er *LP*-modellen en metode til beregning af den bedste anvendelse af begrænsede ressourcer eller kapaciteter (b-erne) til at opnå et specifikt mål, f.eks. maksimal rentabilitet af den investerede kapital. I modellen symboliseres investeringsprojekterne ved x-erne og nytten af de enkelte projekter ved de respektive c-værdier. a-erne angiver, hvor meget projekterne forbruger af eller forøger de respektive ressourcer.

Kriteriefunktionen kan f.eks. være formuleret som minimering af projekternes payback-tid, maksimering af den interne rente eller maksimering af kapitalværdien. Hvis vi antager det sidste optimeringskriterium, er c-erne lig de respektive projekters kapitalværdier.

Mulighederne for at anvende begrænsningsulighederne på investeringsproblemet kan bedst illustreres ved mindre eksempler.

En virksomhed har mulighed for at investere i to maskintyper (x_{10} og x_{11}) til fremstilling af en vare, hvoraf der årligt kan sælges 100.000 enheder. Hvis maskinerne har en årlig produktionskapacitet på henholdsvis 25.000 og 10.000 enheder kan salgsbegrænsningen indbygges i *LP*-modellen ved:

$$25.000\,x_{10} + 10.000\,x_{11} \leq 100.000$$

hvor enhedsstørrelsen for begge projekter er een maskine. Projekterne skal finansieres ved en egenkapital på 15.000 kr. Hvis anskaffelsessummen for x_{10} er 8.000 kr. og for x_{11} 5.000 kr., får vi følgende finansielle restriktion:

$$8.000\,x_{10} + 5.000\,x_{11} \leq 15.000$$

Hvis virksomheden har mulighed for at optage et lån (y_1) op til 50.000 kr. omformuleres den finansielle restriktion til:

$$8.000\, x_{10} + 5.000\, x_{11} - y_1 \leq 15.000$$
$$y_1 \leq 50.000$$

Det bemærkes, at lånets kapitalværdi bør indgå i kriteriefunktionen.

Investeringer har i almindelighed nettoudbetalinger i et tidsrum efter igangsættelsen; i eksemplet 1000 kr. (x_{10}) og 800 kr. (x_{11}) i første periode. Hvis vi alt andet lige antager, at lånet skal forrentes og afdrages med 10 % kan vi opbygge følgende likviditetsrestriktion for periode 1:

$$1.000\, x_{10} + 800\, x_{11} + 0{,}1\, y_1 \leq 15.000 + y_1 - 8.000\, x_{10} - 5.000\, x_{11}$$

hvor højresiden er lig likviditetsoverskuddet efter investeringernes anskaffelsessum er betalt.

I *LP*-modellen indgår likviditetsrestriktionen som:

$$9.000\, x_{10} + 5.800\, x_{11} - 0{,}9\, y_1 \leq 15.000$$

Tilsvarende begrænsninger for likviditeten kan udvikles for de følgende perioder.

Interaktionen mellem projekternes igangsættelsestidspunkt og virksomhedens likviditetsudvikling kan løses ved heltalsprogrammering, der er en variant af lineær programmering. Hvis vi i ovenstående eksempel hæfter et fodtegn mere på variablerne til at angive projekternes eventuelle igangsættelsestidspunkt, fortæller følgende restriktion for x_{10}:

$$x_{10,0} + x_{10,1} + x_{10,2} \leqq 1$$

hvor $x_{10,j}$ enten kan være 0 eller 1 ($j = 0,1,2$)
at projektet enten kan igangsættes i periode 0, 1 eller 2. Uligheden angiver tilmed, jf. heltalsrestriktionerne, at projektet kun kan påbegyndes i én af perioderne. Det bemærkes, at vi har ændret eksemplets forudsætninger med hensyn til projekt x_{10}, til der kun kan anskaffes én maskine. Restriktionerne for likviditeten (finansieringen) bliver nu:

for periode t_0:

$$8.000\, x_{10,0} + 5.000\, x_{11} - y_1 \leq 15.000$$
$$y_1 \leq 50.000$$

og for periode t_1:

$$9.000\, x_{10,0} + 8.000\, x_{10,1} + 5.800\, x_{11} - 0{,}9\, y_1 \leq 15.000$$

Ved hjælp af heltalsprogrammering kan eventuelt direkte sammenhænge mellem investerings- og finansieringsprojekter indkorporeres i *LP*-modellen.

Eksempel: En virksomhed har mulighed for at opføre en ny fabrikshal (x_1) til 300.000 kr. og forventer i forbindelse hermed at kunne optage et kreditforeningslån (y_2) på maksimalt 50 % eller 150.000 kr. Hvis lånet forventes solgt til kurs 50, kan interdependensforholdet udtrykkes ved

$$y_2 \leq 75.000\, x_1$$

$$\text{hvor } x_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Det fremgår, at låneoptagelsen bliver på 0 kr., hvis hallen ikke bygges, dvs. $x_1 = 0$. Bygges hallen ($x_1 = 1$), kan virksomheden optage lån i kreditforeningen på op til nominelt 150.000 kr. og realisere et nettoprovenu på maksimalt 75.000 kr.

Interdependenser mellem investeringsprojekter kan på tilsvarende måde formuleres ved hjælp af heltalsprogrammering. En sammenhæng mellem to projekter (x_{15} og x_{16}), der gensidigt udelukker hinanden, kan udtrykkes ved

$$x_{15} + x_{16} \leq 1$$

hvor x_{15} og x_{16} kun kan antage værdien 0 eller 1. En sammenhæng mellem to projekter (x_{20} og x_{21}), hvor x_{21} kun kan gennemføres, hvis x_{20} accepteres, kan udtrykkes ved:

$$x_{21} \leq x_{20}$$

hvor heltalsbegrænsningen gælder for begge variable. Følgende sammenhænge mellem fire projekter (x_{31}, x_{32}, x_{33} og x_{34}):

1) x_{31} og x_{32} udelukker gensidigt hinanden,
2) x_{33} og x_{34} udelukker gensidigt hinanden, og
3) accept af projekterne x_{33} og x_{34} er betinget af accept af enten x_{31} eller x_{32}, kan udtrykkes ved:

$$x_{31} + x_{32} \leq 1$$
$$x_{33} + x_{34} \leq x_{31} + x_{32}$$
$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{for } (i = 31,32,33,34) \\ 1 \end{cases}$$

Empiriske undersøgelser fortæller, at usikkerheden om fremtiden motiverer mange virksomheder til at formulere subjektive begrænsninger på ressourcerne. Begrænsningerne udtrykkes ofte som tærskelværdier f.eks.: beholdningen af likvide midler må aldrig understige 10.000 kr., eller: gældsandelen må ikke være større end 30 %. Hvis E og F symboliserer henholdsvis egenkapital og fremmedkapital kan sidstnævnte restriktion indbygges i *LP*-modellen:

$$\frac{F}{E+F} \leq \frac{1}{3}$$

dvs.

$$2\,F - E \leq 0.$$

Hvis sandsynlighedsfordelingerne for variablerne i et investeringsproblem er standardfordelinger, kan usikkerheden indbygges i en variant af *LP*-modellen, der benævnes »chance constrained programming«. Metoden forudsætter tillige, at virksomheden kan specificere sin risikoaversion.

Eksempel: En virksomhed ønsker, at anskaffelsessummen for nye investeringsprojekter skal være mindre end den disponible kapital (K) med sandsynligheden p, dvs.

$$Pr\left(\sum_{i=1}^{p} a_i x_i \leq K\right) \geq p$$

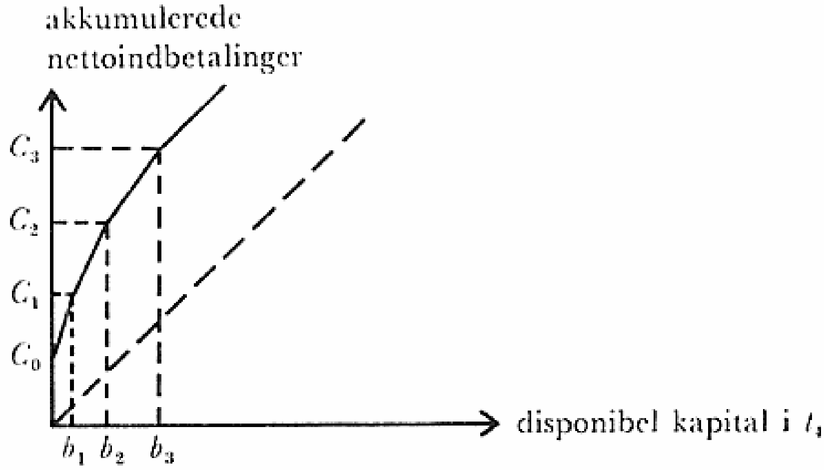
Hvis anskaffelsessummerne f.eks. er normalt fordelt kan udtrykket repræsenteres i en *LP*-model.

Vi har hidtil anvendt maksimering af kapitalværdien som mål eller kriteriefunktion for virksomheden. De nævnte vanskeligheder ved at bestemme kalkulationsrentefoden kan imidlertid elimineres ved at omformulere kriteriefunktionen til: maksimering af de kumulative nettoindbetalinger.

Denne målformulering forekommer umiddelbart at være i uoverensstemmelse med forudsætningen om investors tidspræferencer med hensyn til projekternes kapitalfrigørelse; men det er ikke tilfældet.

Et investerings- og finansieringsprogram skal i enhver tidsperiode opfylde likviditetskravet om, at indbetalingerne skal være større eller lig med udbetalingerne. For hver periode er det muligt at beregne, hvor meget virksomheden ofrer ved ikke at have yderligere en krone til disposition i perioden. Ofringen eller den marginale rente er eksempel på *LP*-modellens såkaldte skyggepriser, der ved modellens løsning, udsiger, hvor knappe de enkelte ressourcer er, dvs. med hvor stort et beløb en yderligere ressourceenhed vil forøge de akkumulerede nettoindbetalinger.

Ved optimering af kriteriefunktionen vejer *LP*-modellens løsningsalgoritme de knappe ressourcer med de respektive skyggepriser. Det vil



Figur 4

for kapitalens vedkommende sige, at den for hver periode vejes eller i princippet diskonteres med den marginale rente.

I figur 4 illustreres den marginale rentes funktionsmåde.

Hvis der ingen disponibel kapital (b) er i t_4, er de akkumulerede nettoindbetalinger (C) lig $C_0 \cdot 0 < b \leq b_1$ betyder en tilvækst i C på $(1 + r_{m1})\, b$.

Hvis $b_1 < b \leq b_2$ forøges C med $(1 + r_{m1})\, b_1 + (1 + r_{m2})\,(b - b_1)$.

Hældningskoefficienten for kurven er $1 +$ den marginale rente (r_{mi}). Det bemærkes, at (r_{mi}) aftager med voksende disponibel kapital. For $b > b_3$ er hældningskoefficienten 1 og $r_{mi} = 0$, dvs. kapitalen begrænser ikke gennemførelsen af rentable projekter. I denne situation kan andre faktorer som arbejdskraft og salget tænkes at have restriktive virkninger.

LP-modellens væsentligste egenskaber i forhold til de traditionelle investeringsmodeller er, 1) at den optimerer ikke blot med hensyn til kapitalen, men til alle knappe ressourcer, 2) at den løser interdependensproblemet i én rutine modsat f.eks. *KV*-modellen, 3) at den kan løse investeringsproblemet uden explicit anvendelse af kalkulationsrentefoden.

LITTERATURFORTEGNELSE

Albach, H.: Investition und Liquidität. Wiesbaden 1962.

Aszetély, Sandor: Investeringsplanering. Göteborg 1965.

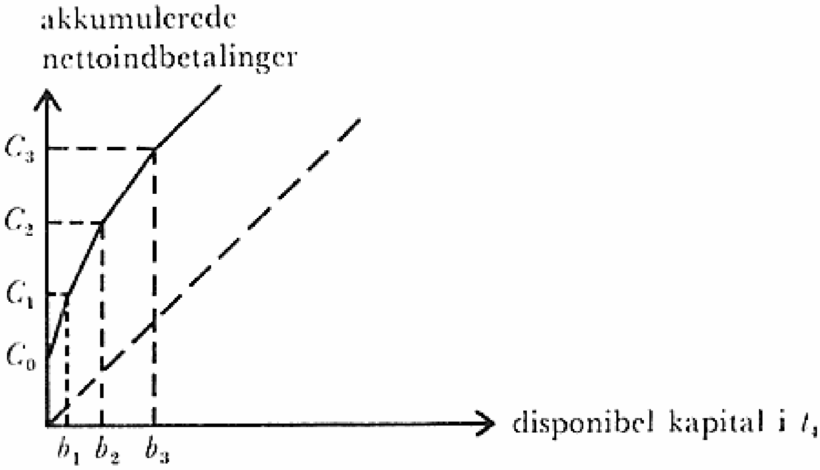
Donaldson, Gordon: Corporate Debt Capacity. Boston 1961.

Jääskelainen, Veikko: Optimal Financing and Tax Policy of the Corporation. Helsinki 1966.

Porterfield, J. T. S.: Investment decisions and capital costs. New Jersey 1965.

Weingartner, H. M.: Mathematical Programming and the Analysis of Capital budgeting Problems. 1965.

Weingartner, H. M.: Capital Budgeting of Interrelated Projects. Management Science NO 7 1966.



Figur 4

for kapitalens vedkommende sige, at den for hver periode vejes eller i princippet diskonteres med den marginale rente.

I figur 4 illustreres den marginale rentes funktionsmåde.

Hvis der ingen disponibel kapital (b) er i t_4, er de akkumulerede nettoindbetalinger (C) lig $C_0 \cdot 0 < b \leq b_1$ betyder en tilvækst i C på $(1 + r_{m1})\, b$.

Hvis $b_1 < b \leq b_2$ forøges C med $(1 + r_{m1})\, b_1 + (1 + r_{m2})\, (b - b_1)$.

Hældningskoefficienten for kurven er $1 +$ den marginale rente (r_{mi}). Det bemærkes, at (r_{mi}) aftager med voksende disponibel kapital. For $b > b_3$ er hældningskoefficienten 1 og $r_{mi} = 0$, dvs. kapitalen begrænser ikke gennemførelsen af rentable projekter. I denne situation kan andre faktorer som arbejdskraft og salget tænkes at have restriktive virkninger.

LP-modellens væsentligste egenskaber i forhold til de traditionelle investeringsmodeller er, 1) at den optimerer ikke blot med hensyn til kapitalen, men til alle knappe ressourcer, 2) at den løser interdependensproblemet i én rutine modsat f.eks. *KV*-modellen, 3) at den kan løse investeringsproblemet uden explicit anvendelse af kalkulationsrentefoden.

LITTERATURFORTEGNELSE

Albach, H.: Investition und Liquidität. Wiesbaden 1962.

Aszetély, Sandor: Investeringsplanering. Göteborg 1965.

Donaldson, Gordon: Corporate Debt Capacity. Boston 1961.

Jääskelainen, Veikko: Optimal Financing and Tax Policy of the Corporation. Helsinki 1966.

Porterfield, J. T. S.: Investment decisions and capital costs. New Jersey 1965.

Weingartner, H. M.: Mathematical Programming and the Analysis of Capital budgeting Problems. 1965.

Weingartner, H. M.: Capital Budgeting of Interrelated Projects. Management Science NO 7 1966.