

## Afbalancering af samlebånd.

Af O. HARTZ\*)

Ved afbalancering af samlebånd tilstræbes en fordeling af montageoperationer mellem operatører ved et bånd, således at disse har tilnærmelsesvis ens arbejdsbelastning.

I artiklen gives en oversigt over problemer ved afbalanceringen, og der gennemgås fem operationsanalytiske metoder til opnåelse af en afbalancering (tre analytiske og to heuristiske metoder). Metoderne kan anvendes dels til håndregning, dels til edb.

### 1. Introduktion

Samlebåndsproduktion er karakteriseret ved, at transportbånd (eller conveyor) flytter arbejdsemner fra operatør til operatør, idet hver af disse udfører forud bestemte operationer på emnerne. Arbejdet ved samlebåndet er betinget af det tidsinterval, hvormed transportbåndet flytter emnerne mellem operatørerne. Båndet kan bevæge sig kontinuert (med konstant hastighed), eller det kan bevæge sig en fastspecificeret længde med konstante tidsintervaller.

Samlebånd benævnes ofte montagelinie, da operatørernes arbejde ved båndet består i montering m. v. af flere emner til en større enhed. Linier, der ikke er hastighedsbestemt ved transportbånd som ovenfor beskrevet, falder uden for denne fremstillings rammer. I nogle tilfælde vil de beskrevne metoder dog kunne benyttes som en tilnærmelse.

Afbalanceringsproblemet ved samlebånd består i at planlægge det fysiske layout og produktionsforløbet (bl. a. rækkefølgen af montageoperationerne) på en sådan måde, at operatørerne har tilnærmelsesvis ens arbejdsbelastning, d. v. s. approksimativ ens arbejdstid på hver enkelt produktenhed på linien. For således at opnå den mest effektive udnyttelse af ressourcerne (mænd, maskiner, værktøjer og lign.) bygger de fleste planlæg-

\*) Amanuensis, civilingeniør, lic. tech., Driftsteknisk Institut, AMT, Danmarks tekniske Højskole.

## Afbalancering af samlebånd.

Af O. HARTZ\*)

Ved afbalancering af samlebånd tilstræbes en fordeling af montageoperationer mellem operatører ved et bånd, således at disse har tilnærmelsesvis ens arbejdsbelastning.

I artiklen gives en oversigt over problemer ved afbalanceringen, og der gennemgås fem operationsanalytiske metoder til opnåelse af en afbalancering (tre analytiske og to heuristiske metoder). Metoderne kan anvendes dels til håndregning, dels til edb.

### 1. Introduktion

Samlebåndsproduktion er karakteriseret ved, at transportbånd (eller conveyor) flytter arbejdsemner fra operatør til operatør, idet hver af disse udfører forud bestemte operationer på emnerne. Arbejdet ved samlebåndet er betinget af det tidsinterval, hvormed transportbåndet flytter emnerne mellem operatørerne. Båndet kan bevæge sig kontinuert (med konstant hastighed), eller det kan bevæge sig en fastspecificeret længde med konstante tidsintervaller.

Samlebånd benævnes ofte montagelinie, da operatørernes arbejde ved båndet består i montering m. v. af flere emner til en større enhed. Linier, der ikke er hastighedsbestemt ved transportbånd som ovenfor beskrevet, falder uden for denne fremstillings rammer. I nogle tilfælde vil de beskrevne metoder dog kunne benyttes som en tilnærmelse.

Afbalanceringsproblemet ved samlebånd består i at planlægge det fysiske layout og produktionsforløbet (bl. a. rækkefølgen af montageoperationerne) på en sådan måde, at operatørerne har tilnærmelsesvis ens arbejdsbelastning, d. v. s. approksimativ ens arbejdstid på hver enkelt produkt-enhed på linien. For således at opnå den mest effektive udnyttelse af ressourcerne (mænd, maskiner, værktøjer og lign.) bygger de fleste planlæg-

\*) Amanuensis, civilingeniør, lic. tech., Driftsteknisk Institut, AMT, Danmarks tekniske Højskole.

ningsmetoder på minimering af den samlede spildtid for operatørerne (jfr. afsnit 2).

Problemstillingen begrænses i denne fremstilling til at omfatte afbalancering af samlebånd for et enkelt produkt (eng. single-model line). Den væsentligt mere komplicerede linieafbalancering for multipelt produktudvalg (eng. mixed-model line) vil kun flygtigt blive berørt i slutningen. Hvis en virksomhed, der kun benytter enkelt-produktlinier, ønsker at producere flere produkter (modeller) på samme linie, må dette ske ved at producere serier med kun én model på linien ad gangen.

Afbalancering af enkelt-produktlinier er dog i sig selv et komplekst problem, og alle de i denne fremstilling omtalte afbalanceringsmetoder bygger da også på forskellige simplificerende forudsætninger. Dette er altid nødvendigt, når man ønsker at afbilde realistiske, komplicerede problemstillinger i sådanne matematiske (operationsanalytiske) modeller. Imidlertid er planlægning ud fra disse matematiske modeller generelt set væsentligt mere effektive end de mere eller mindre tilfældige metoder, der i praksis tidligere blev anvendt til linieafbalancering.

En del af de nedenfor beskrevne metoder kan ved afbalancering af mindre linier anvendes ved almindelige manuelle beregninger, mens det ved større linier er nødvendigt at have metoderne programmeret for datamaskiner. En del datamaskinfabrikanter har færdige standardprogrammer til linieafbalancering, byggende på sådanne afbalanceringsmetoder.

I denne fremstilling vil der først blive redegjort (i afsnit 2) for den terminologi, der her benyttes ved beskrivelse af afbalanceringsproblemerne samt for de grundlæggende forudsætninger for afbalanceringsmetodernes anvendelse. På grundlag af dette begrebsapparat gives da (i afsnit 3) en egentlig formulering af afbalanceringsproblemet i dets to hovedtyper. Derefter foretages (i afsnit 4) en gennemgang af fem udvalgte metoder til frembringelse af en afbalancering.

## 2. Begreber

Inden en nærmere præcisering af problemstillingen ved linieafbalanceringen er det hensigtsmæssigt at fastlægge indholdet af den anvendte terminologi.

*Operator* (eng. operator): en person, der udfører forudbestemte operationer på de produktenheder, som passerer på linien.

*Station* (eng. work station): en operatørs arbejdsplads ved linien. Antal stationer ved linien benævnes  $n$ . En station kan evt. bemannes med flere operatører, ligesom en operatør kan arbejde ved mere end én station.

Med mindre andet anføres, forudsætter de beskrevne metoder, at der er netop én operatør ved hver station.

*Deljob* (eng. job): den mindste samling deloperationer, der hensigtsmæssigt kan overføres fra én operatør til en anden.

*Deloperation* (eng. work element): den mindste bestanddel, hvori et arbejde rationelt kan opdeles.

*Job* (eng. station task): samtlige deljob for en operatør ved en station på en enkelt produktenhed.

*Deljobtid* (eng. job time): normaloperationstiden for at udføre et deljob. Deljobtiden for deljob nr.  $i$  benævnes  $t_i$ .

*Jobtid* (eng. station (task) time): normaloperationstiden for at udføre et job.

De forskellige tillægstider, som personlig tillægstid og træthedstillægstid, indgår ikke i deljob- og jobtider, da disse tillægstider normalt henlægges til pauser, f. eks. ved at hele båndet standses en vis tid med bestemte tidsintervaller. Derved får tillægstiderne ikke betydning for afbalanceringen.

*Cyklustid* (eng. cycle time): den tid, hver produktenhed tilbringer ved hver station på linien. Det er således den tid, hver operatør har til rådighed pr. produktenhed. Den svarer altså for operatøren til normaloperationstid samt procesbetinget ventetid. Cyklustiden benævnes  $c$ .

Ved at forudsætte at stationerne ligger tæt, er cyklustiden lig med tidsintervallet mellem færdiggørelsen af på hinanden følgende produktenheder fra linien.

*Produktenhedstid* (eng. total work content time): summen af deljobtiderne ved alle stationer for en produktenhed, d. v. s. den samlede tid, der ved linien skal arbejdes på en produktenhed ( $\sum_i t_i$ ).

*Gennemløbstid* (eng. through-put time): den tid, som det tager at bevæge en produktenhed fra liniens begyndelse til dens afslutning. Når stationerne ligger tæt, og produktenhederne ikke mellemlagres, er gennemløbstiden lig antal stationer ved linien multipliceret med cyklustiden, altså  $n \cdot c$ .

*Spildtid* (eng. idle time): gennemløbstid minus produktenhedstid, altså  $n \cdot c - \sum_i t_i$ .

*Ubalance* (eng. balance delay): et relativt mål for den ulige fordeling mellem stationerne af arbejdet ved hver produktenhed (produktenhedstiden). Ubalancen,  $d$ , defineres oftest som forholdet mellem spildtid og gennemløbstid:

$$d = (nc - \sum_i t_i) / nc.$$

Den rækkefølge, hvori de enkelte deljob på en produktenhed kan udføres, samt hvilke stationer deljobbene kan knyttes til, er underkastet nogle *restriktioner*. De forskellige metoder tager i større eller mindre udstrækning hensyn til de nedenfor beskrevne rækkefølgerestriktioner, zonerestriktioner og blandede restriktioner.

*Rækkefølgerestriktioner* (eng. precedence restrictions). Disse restriktioner begrænser antallet af muligheder for forskellige kombinationer af rækkefølge af deljobbene for et produkt. Sådanne teknologiske restriktioner skyldes den fastlagte teknologiske udformning af produktet samt den valgte produktionsmetode. Rækkefølgerestriktionerne afbildes ofte i et *ordningsnetværk* (eng. precedence network eller precedence diagram).

Det skal præciseres, at ordningsnetværket normalt er et såkaldt aktivitetsorienteret netværk, hvor aktiviteterne (deljob) afbildes i knudepunkterne (som kasser), mens ordningsrelationerne repræsenteres af grene forbundene knudepunkterne. (Dette er i modsætning til de almindelige projekt-netværk som CPM, PERT m. fl., der er såkaldte begivenhedsorienterede netværk, idet aktiviteterne afbildes ved grene, og knudepunkterne repræsenterer begivenheder).

Et eksempel på et ordningsnetværk, der afbilder rækkefølgerestriktionerne for 9 deljob, er vist i fig. 1. Tallene i kasserne angiver deljobnummer, mens tallene uden for kasserne viser deljobtider.

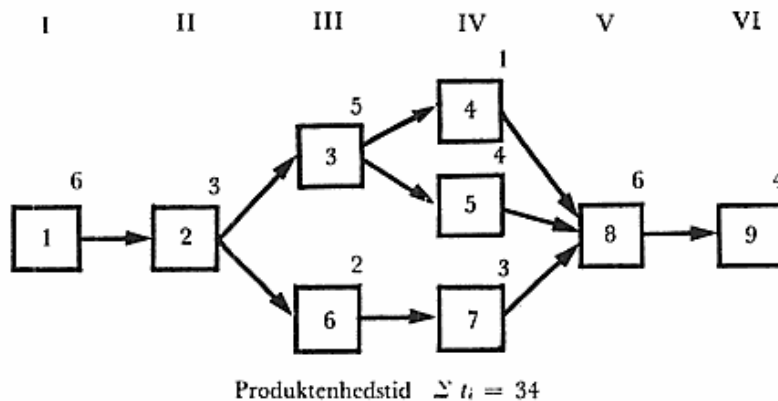


Fig. 1. Ordningsnetværk.

Af netværket ses, at deljob 1 skal gå forud for deljob 2 (d. v. s. deljob 1 skal afsluttes, før deljob 2 påbegyndes), deljob 2 skal gå forud for både deljob 3 og deljob 6, deljob 3 skal gå forud for både deljob 4 og 5, o. s. v. (Romertallene over ordningsnetværket skal først kommenteres under en af afbalanceringsmetoderne).

*Zonerestriktioner* (eng. zoning constraints). Disse restriktioner skyldes dels faste faciliteter ved linien, dels produktenhedens evt. forskellige positionering i forhold til operatørerne.

Faste faciliteter er udstyr (som f. eks. maskiner, prøveapparater og tilstødende linier), der indgår som en integrerende del af montagelinien og danner ubevægelige stationer. Disse ubevægelige stationer opdeler linien i afsnit mellem de ubevægelige stationer (zoner), i hvilke man skal placere de deljob, der kommer før henholdsvis efter deljob ved en ubevægelig station.

Zoneopdeling på grund af positionsrestriktioner kan opstå ved større produktenheder, der ikke let kan håndteres. De såkaldte »for-bag« (front-and-back) restriktioner forefindes ved deljob, der skal udføres på enten for- eller bagsiden af produktenheden. Dette arbejde kan ikke udføres af samme operatør, da linien normalt ikke kan passeres. »Top-bund« (top-and-bottom) restriktioner forefindes, når der skal udføres deljob på både under- og oversiden af en produktenhed. Alle deljob hørende til én af siderne må udføres, mens produktenheden er i rette position (vendt, hævet m. v.).

Et konkret eksempel på zoneopdeling findes f. eks. i litteraturhenvisning (1).

*Blandede restriktioner.* Sådanne kan opstå ved, at visse deljob skal tildeles en bestemt station eller en bestemt operatør på grund af specialisering, uddannelse, psykologiske forhold og lign. Ligeledes opstår restriktioner, hvis nogle stationer skal bemannes med flere operatører m. v.

### 3. Formulering af linieafbalanceringsproblemet

*To hovedproblemstillinger* findes ved linieafbalanceringen. Det fælles udgangspunkt er kendte deljobtider (bestemt ved arbejdsstudier) samt givne rækkefølgerestriktioner og andre restriktioner som nævnt i afsnit 2. Problemstillingerne er:

- a) For given produktionsmængde pr. tidsenhed skal antallet af operatører ved linien minimeres.
- b) For givet operatørantal skal produktionsmængden pr. tidsenhed maksimeres.

I begge tilfælde er løsningerne underkastet følgende begrænsninger:

- 1) Deljobbene skal fordeles på stationer, således at hvert deljob anbringes ved en og kun én station.
- 2) Rækkefølgerestriktionerne samt andre restriktioner overholdes.
- 3) Jobtiden ved hver station må ikke overskride cyklustiden.

*ad a.* Med en ønsket produktionsmængde pr. tidsenhed, f. eks.  $Q$  enheder pr. dag og med linien i drift  $M$  minutter pr. dag (d. v. s. eksklusiv de tidligere omtalte pauser), er cyklustiden givet:

$$c = \frac{M}{Q} \text{ minutter}$$

Problemstillingen kan altså udtrykkes: for given cyklustid skal operatørantallet  $n$  minimeres. Dette foretages hyppigst ved at minimere spildtiden, ofte udtrykt ved ubalancen  $d$  (defineret i afsnit 2).

De senere omtalte metoder er alle primært udformet til løsning af denne formulering af afbalanceringsproblemet.

*ad b.* Denne problemstilling kan ifølge ovenstående omformuleres til: for givet operatørantal skal cyklustiden minimeres. Dette opnås ved at simulere – jfr. afsnit 4 – en række alternative produktionsmængder pr. tidsenhed med de metoder, der egentlig er bestemt for problemstilling a). Herved får man bestemt det til enhver angiven værdi af produktionsmængde pr. tidsenhed svarende minimale antal operatører. For et givet operatørantal kendes hermed den minimale cyklustid (svarende til den maksimale produktionsmængde pr. tidsenhed).

Problemstilling a) kan optræde ved oprettelse af helt ny montagelinier og anden afbalancering, hvor der er stor fleksibilitet med hensyn til operatørantallet. Problemstilling b) vil f. eks. forekomme ved eksisterende linier med en given bemanning, når linien ønskes afbalanceret til fremstilling af et andet produkt.

*En blanding* af de to problemstillinger kan forekomme, når hverken produktionsmængde eller operatørantal er nøje fastlagt på forhånd. Her vil målsætningen ofte være at udnytte de operatører, der anbringes ved linien, bedst muligt. Dette sker ved at minimere ubalancen (eller spildtiden). I disse tilfælde vil man kunne benytte de samme beregningsmetoder som til a), og på samme måde som ved b) simulere en række alternative produktionsmængder pr. tidsenhed inden for et ønsket interval. Herved kan man få bestemt de tilsvarende minimale operatørantal samt den til ethvert alternativ hørende ubalance (eller spildtid). Man vil således kunne

udvælge en specifik produktionsmængde pr. tidsenhed, der resulterer i et operatørantal inden for ønskede rammer og samtidig minimerer ubalancen.

*Deterministisk eller stokastisk deljobtid.* Deljobtiderne betragtes ved de fleste af løsningsmetoderne som deterministiske (konstante). Uanset operatør eller station regnes et deljob altså udført på den ved arbejdsstudier fastslåede normaltids.

Da deljobtiderne reelt er stokastiske variable (d. v. s. variable med en sandsynlighedsfordeling) er den deterministiske betragtningsmåde en simplifikation. For at undgå ulemperne ved operatørernes manglende færdiggørelse af deres deljob inden for cyklustiden, indskydes undertiden bufferlagre ved »kritiske« stationer. En anden mulighed er at omformulere begrænsning 3) således, at jobtiden ved hver station ikke må overskride en bestemt procent af cyklustiden (f. eks. 90 %). For operatører af forskellig dygtighed er det en almindelig tommelfingerregel (2) at anbringe de hurtigste operatører nær liniens begyndelse. Det giver erfaringsmæssigt de mindste forstyrrelser.

#### 4. Afbalanceringsmetoder

Teoretisk kan afbalanceringsproblemet for en linie løses, ved at man danner alle fysisk mulige (feasible) kombinationer af samtlige de specificerede deljob – og herunder fastsætter deres placering ved de enkelte stationer. At disse løsninger på afbalanceringsproblemet er fysisk mulige vil sige, at de givne begrænsninger er opfyldt. Af disse løsninger kunne den (de) bedste (optimale) udvælges. Imidlertid bliver antallet af løsninger, der skal udvikles og sammenlignes, ofte uhyre stort. For  $N$  deljob og  $r$  rækkefølgerrestriktioner er der (2) ca.  $N!/2^r$  mulige løsninger (11 deljob og 13 rækkefølgerrestriktioner giver ca.  $11!/2^{13} = 4870$ , men 70 deljob og 105 rækkefølgerrestriktioner giver ca.  $70!/2^{105} = 10^{65}$  løsninger!). Til løsning af dette særdeles komplekse problem er udviklet en række specifikke operationsanalytiske (O. R.) metoder, hvoraf de grundlæggende principper i nogle af de væsentligste skal omtales i dette afsnit.

#### *Generelt om O. R. metoder.*

Disse kan groft opdeles i: analytiske metoder, heuristiske metoder og simulering. De *analytiske* metoder kan karakteriseres ved, at de med sikkerhed fører frem til en optimal løsning. Til disse analytiske (også kaldet algoritmiske) metoder hører de velkendte O. R. metoder, som lineær programmering, kvadratisk programmering, m. v., se f. eks. (3) og (4). At anvende sådanne optimeringsmetoder på et så stort kombinatorisk pro-



blem som linieafbalancering kan imidlertid medføre uhyre stor beregningstid.

De *heuristiske* metoder kan kort beskrives som beregningsprocedurer, der ikke med fuld sikkerhed fører frem til en optimal løsning. Derimod ønsker man ved væsentlig mindre beregningstid at finde en tilfredsstillende (satisfierende) løsning. De heuristiske metoder – ofte programmeret for datamaskiner – har i de senere år fundet betydelig anvendelse inden for kombinatoriske problemer som ruteplanlægning, investeringsbeslutninger, sekvensproblemer ved produktionsplanlægning – og specielt linieafbalancering.

Ved (numerisk) *simulering* udfører man eksperimenter med en matematisk model i stedet for det virkelige system, idet man frembringer konsekvenserne af forskellige mulige handlinger. Simulering er altså et analyseværktøj og ikke en selvstændig løsningsmetode.

De nedenfor omtalte specifikke afbalanceringsmetoder er som tidligere nævnt opbygget med henblik på løsning af problemstilling a) i afsnit 3.

For linieafbalancering gælder det generelt ved problemstilling a), at en afbalancering, der resulterer i en spildtid  $(n \cdot c - \sum_i t_i)$  mindre end

cyklustiden  $c$ , er optimal for den valgte cyklustid. Antallet af operatører  $n$  kan ikke reduceres yderligere. Dette er umiddelbart klart, da en reduktion af  $n$  med én vil medføre at  $(n-1) \cdot c < \sum_i t_i$ . Hermed vil den samlede tid,  $(n-1) \cdot c$ , som de  $n-1$  operatører har til rådighed for arbejdet på hver produktenhed blive mindre end den nødvendige tid, produkt-

enhedstiden  $\sum_i t_i$ .

Modsat gælder det imidlertid, at en optimal afbalancering ikke nødvendigvis skal medføre, at spildtiden bliver mindre end cyklustiden.

I det følgende behandles først tre analytiske metoder, og derefter omtales to heuristiske afbalanceringsmetoder. Alle disse metoder vil ved simulering kunne benyttes til løsning af problemstilling b) som nævnt i afsnit 3.

Redegørelsen for metoderne og kommentarerne til deres anvendelse kan af pladmæssige hensyn kun gives i hovedtræk. For detaljerede beskrivelser må henvises til de refererede publikationer. En række andre metoder er nævnt i f. eks. (2).

#### *Jacksons algoritme.*

J. R. Jackson fremkom i 1956 (5) med en meget enkel metode (algoritme) til opnåelse af det minimale antal stationer for given cyklustid. En optimal løsning fremkommer ved successiv tildeling af alle fysisk mulige kombinationer af arbejdsenheder til de enkelte stationer.

ner af deljob til på hinanden følgende stationer. Metoden er særdeles velegnet for *håndregning* ved mindre linier med op til omkring 30 deljob (2).

Grundtrækkene i beregningsproceduren, som nedenfor skal illustreres med et simpelt eksempel, er:

- 1) Bestem alle fysisk mulige kombinationer af deljob, der kan udgøre station nr. 1, d. v. s. samtlige kombinationer af deljob, der tilfredsstiller restriktionerne uden at overskride den valgte cyklustid. (Hvis der ikke forekommer zonerestriktioner, og blandede restriktioner er de eneste restriktioner rækkefølgerestriktionerne, som fremgår af ordningsnetværket, jfr. fig. 1).
- 2) For enhver således mulig sammensætning af station nr. 1 bestemmes samtlige fysisk mulige sammensætninger af station nr. 2, d. v. s. samtlige kombinationer af deljob tilfredsstillende restriktionerne inden for cyklustiden.
- 3) Således fortsættes indtil alle deljob er tildelt stationer.

Yderligere benyttes dog to kriterier til afbrydelse af en påbegyndt udvikling af en afbalancering:

- a) Gentagelse. Ved enhver station, nr.  $k$ , undersøges om en tidligere udviklet afbalancering indeholder netop de samme deljob inden for de  $k$  første stationer, uden at de to afbalanceringer dog er fuldt identiske (d. v. s. har netop de samme deljob ved de samme stationer). Hvis dette kriterium er opfyldt, afbrydes den igangværende afbalancering, da den ikke er bedre end den tidligere afbalancering, til og med de  $k$  første stationer, og da den vil blive en gentagelse af en tidligere afbalancering i de resterende stationer.
- b) Dominans. Ved enhver station, nr.  $k$ , undersøges om en tidligere udviklet afbalancering i de  $k$  første stationer indeholder ét eller flere deljob udover samtlige de deljob, der findes i de  $k$  stationer i den igangværende afbalancering. Hvis dette er tilfældet, afbrydes den igangværende afbalancering, da det allerede ved den  $k$ 'te station kan konstateres, at den ikke kan blive bedre end den tidligere afbalancering.

Som et eksempel på metoden skal foretages en afbalancering af en montageproces bestående af de 9 deljob, der er vist i ordningsnetværket fig. 1. Afbalanceringen er vist i fig. 2 for cyklustiden  $c = 8$ . Hver linie i diagrammet danner en afbalancering. Nederst i hvert skema er anført spildtiden pr. station ved den resulterende afbalancering.

Burgeson og Daum (6), (7) har udformet datamaskinprogrammer på grundlag af Jacksons algoritme. Programmet er i stand til at medtage op til 99 zonerestriktioner. Der findes programmer for IBM 650, 1401 og 1620.

Cyklustid  $c = 8$

Station nr.	1	2	3	4	5	6	7	Afbalancering nr.
	1	2-6-7	3-4	5	8	9		1 minimum
	1	2-3	4-5-6	7	gentagelse af afbalanc. nr. 1			2
	1	2-3	4-6-7	5	gentagelse af afbalanc. nr. 1			3
Spiltdid pr. station	2	0	2	4	2	4		

$$\text{Ubalance } d = \frac{nc - \sum_i t_i}{nc} = \frac{6 \cdot 8 - 34}{6 \cdot 8} = 0,293$$

Fig. 2. Afbalancering med Jacksons algoritme.

#### Afbalancering ved lineær programmering.

Linieafbalanceringsproblemet er blevet formuleret i heltals lineær programmering af Salvesson, Bowman og White (8). Metoden har begrænset praktisk interesse, da beregningstiden på datamaskine i forhold til andre metoder ofte bliver temmelig stor. Formuleringen skal derfor kun omtales kort i Whites modifikation. Som tidligere fastlagt benævnes cyklustiden  $c$ , og  $t_i$  betegner deljobtiden for deljob nr.  $i$ . Variablen  $x_{si}$  er lig 1, hvis deljob nr.  $i$  udføres ved station  $s$ , ellers 0. Med  $n$  deljob og maksimalt  $m$  stationer er problemet da:

Bestem  $x_{si}$  ( $s = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n$ )

således at følgende tre sæt begrænsninger er opfyldt, og kriteriefunktionen minimeres:

$$\sum_{i=1}^n t_i \cdot x_{si} \leq c \quad \text{for } s = 1, 2, \dots, m$$

Dette sæt begrænsninger sikrer, at summen af deljobtider ved en station ikke overskrider cyklustiden, idet venstre side af ulighedstegnet angiver summen af deljobtider for de ved station nr.  $s$  placerede deljob.

$$\sum_{s=1}^m x_{si} = 1 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

Dette sikrer, at ethvert deljob anbringes ved en og kun én station. Hvis venstre side af lighedstegnet blev lig nul, ville deljob nr.  $i$  ikke være placeret ved nogen station, og hvis venstre side blev større end én, ville deljob nr.  $i$  være placeret ved mere end én station.

Ordningsnetværkets rækkefølgerestriktioner afbildes for eksemplet i fig. 1 med maksimalt 9 stationer i begrænsninger af formen:

$$\begin{aligned} x_{12} &\leq x_{11}; & x_{22} &\leq x_{11} + x_{21}; \\ x_{32} &\leq x_{11} + x_{21} + x_{31}; \\ &\dots \\ x_{99} &\leq x_{18} + x_{28} + x_{38} + \dots + x_{98} \end{aligned}$$

F. eks. angiver den første ulighed, at deljob nr. 2 ikke må placeres ved station nr. 1, med mindre deljob nr. 1 er placeret ved denne station.

Desuden skal der opstilles en kriteriefunktion, der skal minimeres. Den kan vanskeligt opstilles generelt, men den skal sikre, at de minimale operatørantal opnås, f. eks. ved at tillægge stationerne omkostninger stigende med stationens nummer.

#### *Afbalancering ved dynamisk programmering.*

Held, Karp og Shareshian (9) har formuleret linieafbalanceringsproblemet i dynamisk programmering. Dynamisk programmering er en optimeringsmetode for problemer, der kan beskrives som en flertrinsbeslutningsproces. Kriteriefunktionen optimeres ved anvendelse af den såkaldte funktionalligning (rekursivformel), der forbinder de enkelte trin i beslutningssekvensen.

Linieafbalanceringsproblemetets detaljerede formulering i dynamisk programmering skal ikke behandles i denne fremstilling, men det skal nævnes, at der findes et standardprogram til IBM 7090/94 (10) byggende på denne beregningsmetode. På IBM 7090 er en linie med 36 deljob afbalanceret på 20 sek. (2), hvilket med en datamaskinleje på ca. 6000 kr/time svarer til en beregningsomkostning på ca. 35 kr. Ved større linier kan den dynamiske programmering ikke benyttes eksakt på grund af datamaskinens begrænsede lagerplads. Approksimativ anvendelse af programmet menes dog at give løsninger liggende nær det optimale. En linie med 180 deljob

er afbalanceret på ca. 6 min. svarende til en omkostning på ca. 600 kr. Programmet kan behandle linier med op til 612 deljob.

*Kilbridge og Westers heuristiske metode.*

Denne beregningsprocedure er et eksempel på en heuristisk metode, hvor man ved beskedne beregninger ofte kan opnå en såkaldt tilfredsstillende, men ikke givetvis optimal afbalancering. Kilbridge og Westers metode (11), (12), (1) er med sine særdeles enkle beregninger specielt udformet til *håndregning*.

Metoden bygger på et ordningsnetværk som i fig. 1, hvor man placerer søjlenumre over hver søjle af deljob. Søjlenummeret I står over deljob 1, II står over deljob 2, III står over deljob 3, . . . , og VI står over deljob 9.

Grundtanken er da:

1. Deljobbene i samme søjle kan udføres i vilkårlig orden.
2. Deljobbene kan flyttes mellem søjlerne under overholdelse af restriktionerne.
3. Arbejdet ved hver af stationerne, jobbene, opbygges successivt station for station ved flytning og gruppering af deljobbene under overholdelse af cyklustiden (jobtiden ved enhver station skal være mindre end eller lig cyklustiden). Langvarige deljob søges benyttet før kortvarige deljob.

Da gruppering af deljob til job foregår, ved at man prøver sig frem, kræver metoden en vis intuition. Imidlertid vil en planlægger hurtigt kunne få erfaring i metodens anvendelse. Metoden er specielt velegnet ved afbalanceringer, hvor cyklustiden er stor i forhold til den gennemsnitlige deljobtid, da antallet af nødvendige flytninger af deljob herved er ringe.

En afbalancering af det simple eksempel, ordningsnetværket fig. 1, er foretaget i fig. 3. Skemaets øverste halvdel udfyldes direkte ud fra ordningsnetværket. Nederste halvdel af skemaet viser den resulterende afbalancering for cyklustiden  $c = 12$ . Afbalanceringen opnås ved at betragte den kumulerede deljobtid i skemaets øverste halvdel. Den kumulerede tid for de tre første søjler er 16. Ved at udskyde deljob 3 opnås en kumuleret tid på 11, altså placeres deljob 1, 2 og 6 ved station 1. Det resterende deljob fra søjle III samt deljobbene fra søjle IV har en samlet deljobtid på 13. Udskydes deljob 4, opnås en samlet tid på 12, altså placeres deljob 3, 5 og 7 ved station 2. Det resterende deljob fra søjle IV samt deljobbene fra søjle V og VI har en samlet tid på 11, altså placeres deljobbene 4, 8 og 9 ved station 3. Hermed er der fundet en afbalancering med 3 stationer.

I dette tilfælde er en optimal løsning fundet, da det absolut minimale antal stationer,  $n'$ , er det mindste heltal for hvilket  $n' \cdot c \geq \sum_i t_i$ , eller her  $n' \cdot 12 \geq 34$ , som giver  $n' = 3$ . (Det er imidlertid ikke i alle tilfælde, at den optimale løsning er lig det således beregnede absolut minimale antal stationer  $n'$ ).

(1) Søjlenummer fra ordnings- netværk	(2) Delob- nummer	(3) Deljob- tid $t_i$	(4) Sum af deljob- tider	(5) Kumuleret deljob- tid
I	1	6	6	6
II	2	3	3	9
III	3	5		
	6	2	7	16
IV	4	1		
	5	4		
	7	3	8	24
V	8	6	6	30
VI	9	4	4	34
I	1	6		
II	2	3		
III	6	2	11	11
	3	5		
IV	5	4		
	7	3	12	23
	4	1		
V	8	6		
VI	9	4	11	34

Fig. 3. Kilbridge og Westers metode for eksemplet fig. 1 med cyklostid  $c = 12$ .

Den ovenfor skitserede heuristiske metode er gennemgået af Kilbridge og Wester (1) ved et stort og illustrativt praktisk eksempel med forskellige typer af restriktioner. I øvrigt angives det i 1962 (11), at metoden har vist sig nyttig til lineafbalancering ved håndregning inden for adskillige industrigrene.

*Helgeson og Birnies positionelle vægtteknik.*

Ved denne heuristiske metode (13) og (14) udregnes for hvert deljob en såkaldt positionel vægt, der er lig deljobtiden  $t_i$  for det pågældende deljob plus summen af deljobtider for alle de deljob, der jfr. ordningsnetværket skal efterfølge det. Den nedenfor angivne procedure er enkel at benytte ved håndregning, men ved store linier er anvendelse af datamaskine mest hensigtsmæssig. Helgeson og Birnie har programmeret metoden for Univac datamaskiner.

Grundtrækkene i beregningsproceduren er:

- 1) Bestem den positionelle vægt for alle deljob.
- 2) Bestem den (de) direkte forgænger(e) for ethvert deljob jfr. ordningsnetværket.
- 3) Opstil deljobbene i sekvens efter faldende positionel vægt.
- 4) Placer det første deljob i sekvensen (altså deljobbet med højest positionel vægt) ved første station.
- 5) Fortsæt med successivt at placere deljobbene i sekvensen ved den betragtede station. Hvis et deljob kræver større tid end den aktuelle disponible tid ved stationen, eller dets placering vil bryde restriktionerne, springes deljobbet over, og der fortsættes med næste deljob. Således fortsættes indtil der ikke kan placeres flere deljob ved stationen.
- 6) Placer successivt de resterende deljob ved næste station ifølge 5), idet der begyndes med det første deljob i den tilbageblevne sekvens. Således fortsættes indtil alle deljob er placeret.

Trin 1), 2) og 3) anvendt på eksemplet i ordningsnetværket giver:

Deljob	1	2	3	6	5	7	4	8	9
Positionel vægt	34	28	20	15	14	13	11	10	4
Direkte forgænger(e)		1	2	2	3	6	3	4,5,7	8

Fig. 4. Den positionelle vægtteknik.

Anvendelse af trin 4), 5) og 6) resulterer for cyklostid  $c = 10$  i følgende afbalancering:

Station 1:	deljob 1,2	(spildtid = 1)
Station 2:	deljob 3,6,7	(spildtid = 0)
Station 3:	deljob 5,4	(spildtid = 5)
Station 4:	deljob 8,9	(spildtid = 0)

Da spildtiden  $1 + 0 + 5 + 0 = 6$  er mindre end cyklustiden  $c = 10$ , er afbalanceringen i dette tilfælde optimal.

Helgeson og Birnie foreslår i øvrigt en alternativ løsning opnået ved samme procedure anvendt fra højre mod venstre (i stedet for fra venstre mod højre) ved blot at ændre vægtene til summen af deljobtider for det betragtede deljob samt for de deljob, der skal gå forud for det. Man kan da udvælge den bedste af de to afbalanceringer. Denne omvendte positionelle vægtteknik giver for eksemplet følgende afbalancering med stationerne nummereret »bagfra«:

Station 1:	deljob 9,8	(spildtid = 0)
Station 2:	deljob 5,4,7,6	(spildtid = 0)
Station 3:	deljob 3,2	(spildtid = 2)
Station 4:	deljob 1	(spildtid = 4)

Generelt må den positionelle vægtteknik karakteriseres som en hurtig og bekvem metode til opnåelse af en foreløbig afbalancering, der måske i nogen grad kan forbedres yderligere af en dygtig planlægger.

### 5. Konklusion

I denne fremstilling er linieafbalanceringsproblemet to hovedformuleringer fremstillet efter en gennemgang af de til linieafbalancering knyttede begreber. Der er behandlet tre analytiske og to heuristiske metoder til opnåelse af afbalancering, og metodernes anvendelsesmuligheder er kommenteret. Generelt må det siges, at man ved det stærkt komplicerede linieafbalanceringsproblem oftest må foretrække en god heuristisk metode. Denne kan med beskeden beregningstid føre til en tilfredsstillende afbalancering, mens en optimal afbalancering – selv af stærkt simplificerede problemer – for det meste kun kan opnås ved en væsentlig større beregningstid med en analytisk metode.

Metoderne kan anvendes direkte også på forgrenede, konvergerende linier. Med given cyklustid for hovedlinien er cyklustiden for en tilstødende sidelinie lig med hovedliniens cyklustid divideret med det antal produktenheder fra sidelinien, der skal indgå i hver produktenhed på hovedlinien. Med således kendte cyklustider kan hver del af den forgrenede linie afbalanceres separat.

Denne fremstilling blev i introduktionen afgrænset til kun at omfatte enkelt-produkt linier, d. v. s. afbalancering for et enkelt produkt (model). Dersom en virksomhed ønsker at fremstille flere produkter på samme linie, findes der to muligheder. Virksomheden kan producere en serie (f. eks. i to uger) med kun ét produkt på linien. Derefter omstilles linien til næste



produkt, der så produceres alene på linien i et fastlagt tidsrum. Til denne mulighed kan de beskrevne metoder direkte anvendes.

Den anden mulighed er at producere flere produkter (modeller) blandet på linien. Til afbalancering af et sådant multipelt produktudvalg må anvendes metoder, der er væsentligt mere komplicerede end de ovenfor beskrevne. Ved Driftsteknisk Institut, AMT, er der i 1968 udført et eksamensprojekt angående linieafbalancering for multipelt produktudvalg (15). I øvrigt er der næsten intet publiceret om afbalancering af multipelt produktudvalg, men den igangværende forskning vil utvivlsomt inden for de kommende år resultere i effektive metoder til behandling af dette problemområde.

- (1) Wester, L. and M. D. Kilbridge: Heuristic Line Balancing: A Case, *Journal of Industrial Engineering*, v 13, n 3, May-June 1962, p. 139-149.
- (2) Ignall, E. J.: A Review of Assembly Line Balancing, *Journal of Industrial Engineering*, v 16, n 4, July-August 1965, p. 244-254.
- (3) Churchman, C. W., R. L. Ackoff and E. L. Arnoff: *Introduction to Operations Research*, Wiley, New York 1957.
- (4) Ackoff, R. L. (ed.): *Progress in Operations Research*, vol. 1, Wiley, New York 1961.
- (5) Jackson, J. R.: A Computing Procedure for a Line Balancing Problem, *Management Science*, v 2, n 3, April 1956, p. 261-271.
- (6) Burgeson, J. W. and T. E. Daum: *Production Line Balancing*, File no. 10.3.002, IBM Corp., Akron, Ohio 1958.
- (7) IBM 1620 *Production Line Balancing*, General Information Manual, E 26-5593-0, IBM, New York 1961.
- (8) White, W. W.: Comment on a Paper by Bowman, *Operations Research*, v 9, n 2, March-April 1961, p. 274-276.
- (9) Held, M., R. M. Karp and R. Shreshian: Assembly Line Balancing - Dynamic Programming with Precedence Constraints, *Operations Research*, v 10, n 3, May-June 1963, p. 442-459.
- (10) IBM 7090/94 *Assembly Line Balancing*, Program Reference Manual (7090-MF-02X), H 20-0043, IBM, New York (uden angivelse af publikationsår).
- (11) Kilbridge, M. D. and L. Wester: A Review of Analytical Systems of Line Balancing, *Operations Research*, v 10, n 5, September-October 1962, p. 626-638.
- (12) Kilbridge, M. D. and L. Wester: A Heuristic Method of Assembly Line Balancing, *Journal of Industrial Engineering*, v 12, n 4, July-August 1961, p. 292-298.
- (13) Helgeson, B. and D. P. Birnie: Assembly Line Balancing Using the Ranked Positional Weight Technique, *Journal of Industrial Engineering*, v 12, n 6, November-December 1961, p. 394-398.
- (14) Reed, R. jr.: *Plant Location, Layout, and Maintenance* (Chap. 9: Production Line Balancing Considerations), Irwin, Homewood 1967.
- (15) Koch, C.: *Linieafbalancering for multipelt produktudvalg*, eksamensprojekt ved Driftsteknisk Institut, AMT, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1968.

produkt, der så produceres alene på linien i et fastlagt tidsrum. Til denne mulighed kan de beskrevne metoder direkte anvendes.

Den anden mulighed er at producere flere produkter (modeller) blandet på linien. Til afbalancering af et sådant multipelt produktudvalg må anvendes metoder, der er væsentligt mere komplicerede end de ovenfor beskrevne. Ved Driftsteknisk Institut, AMT, er der i 1968 udført et eksamensprojekt angående linieafbalancering for multipelt produktudvalg (15). I øvrigt er der næsten intet publiceret om afbalancering af multipelt produktudvalg, men den igangværende forskning vil utvivlsomt inden for de kommende år resultere i effektive metoder til behandling af dette problemområde.

- (1) Wester, L. and M. D. Kilbridge: Heuristic Line Balancing: A Case, *Journal of Industrial Engineering*, v 13, n 3, May-June 1962, p. 139-149.
- (2) Ignall, E. J.: A Review of Assembly Line Balancing, *Journal of Industrial Engineering*, v 16, n 4, July-August 1965, p. 244-254.
- (3) Churchman, C. W., R. L. Ackoff and E. L. Arnoff: *Introduction to Operations Research*, Wiley, New York 1957.
- (4) Ackoff, R. L. (ed.): *Progress in Operations Research*, vol. 1, Wiley, New York 1961.
- (5) Jackson, J. R.: A Computing Procedure for a Line Balancing Problem, *Management Science*, v 2, n 3, April 1956, p. 261-271.
- (6) Burgeson, J. W. and T. E. Daum: *Production Line Balancing*, File no. 10.3.002, IBM Corp., Akron, Ohio 1958.
- (7) IBM 1620 *Production Line Balancing*, General Information Manual, E 26-5593-0, IBM, New York 1961.
- (8) White, W. W.: Comment on a Paper by Bowman, *Operations Research*, v 9, n 2, March-April 1961, p. 274-276.
- (9) Held, M., R. M. Karp and R. Shreshian: Assembly Line Balancing - Dynamic Programming with Precedence Constraints, *Operations Research*, v 10, n 3, May-June 1963, p. 442-459.
- (10) IBM 7090/94 *Assembly Line Balancing*, Program Reference Manual (7090-MF-02X), H 20-0043, IBM, New York (uden angivelse af publikationsår).
- (11) Kilbridge, M. D. and L. Wester: A Review of Analytical Systems of Line Balancing, *Operations Research*, v 10, n 5, September-October 1962, p. 626-638.
- (12) Kilbridge, M. D. and L. Wester: A Heuristic Method of Assembly Line Balancing, *Journal of Industrial Engineering*, v 12, n 4, July-August 1961, p. 292-298.
- (13) Helgeson, B. and D. P. Birnie: Assembly Line Balancing Using the Ranked Positional Weight Technique, *Journal of Industrial Engineering*, v 12, n 6, November-December 1961, p. 394-398.
- (14) Reed, R. jr.: *Plant Location, Layout, and Maintenance* (Chap. 9: Production Line Balancing Considerations), Irwin, Homewood 1967.
- (15) Koch, C.: *Linieafbalancering for multipelt produktudvalg*, eksamensprojekt ved Driftsteknisk Institut, AMT, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby 1968.