Måleteoretiske overvejelser ved løsning af et konkret køproblem.*)

Af JOHN NILSSON**)

Artiklen omhandler et mindre, praktisk OR-arbejde, som skal ses i relation til følgende begrænsninger. Dels var arbejdets varighed fastsat til ca. tre måneder. Dels omfattede analysen kun serviceafdelingen som en del af virksomhedens samlede problemkompleks. Efter en indledende systemanalyse behandles hovedproblemet: Arbejdet med at tilpasse en kømodel til virksomhedens servicefunktion.

Indledning

Det problem der skulle undersøges var, udtrykt meget generelt, om serviceafdelingen i en virksomhed kunne effektiviseres. En konkretisering af virksomhedens målsætninger blev selvfølgelig udarbejdet.

Den foreliggende opgave kunne tænkes løst på to principielt forskellige måder:

1. Gennem analyse af servicefunktionen at finde frem til åbenbare eller sandsynlige forbedringer til denne, altså en rationalisering.

2. Ved analyse og dataindsamling at konstruere en model, som afbilder problemet uden at bekymre sig om aktuelle forbedringer. Formålet her er at give ledelsen et beslutningsgrundlag i hænde.

Denne grove principielle opdeling blot for at skitsere den måde problemet blev løst på, nemlig hensyntagen til begge aspekter. En kømodel blev tilpasset, så den afbildede det aktuelle service-kunde-ventetids-problem

*) Artiklen er baseret på udsnit af analysen for Maskinfabrikken HAKA A/S, og den knytter sig til artiklen: Erik Johnsen, »Anvendelse af en multimålsætningsmodel til styring af en virksomheds servicefunktion«, *Erhvervsøkonomisk Tidsskrift*, nr. 1, 1969.

**) civilingeniør, Metodeforskningsgruppen, Det økonomiske Forskningsinstitut, Handelshøjskolen i København.

Måleteoretiske overvejelser ved løsning af et konkret køproblem.*)

Af JOHN NILSSON**)

Artiklen omhandler et mindre, praktisk OR-arbejde, som skal ses i relation til følgende begrænsninger. Dels var arbejdets varighed fastsat til ca. tre måneder. Dels omfattede analysen kun serviceafdelingen som en del af virksomhedens samlede problemkompleks. Efter en indledende systemanalyse behandles hovedproblemet: Arbejdet med at tilpasse en kømodel til virksomhedens servicefunktion.

Indledning

Det problem der skulle undersøges var, udtrykt meget generelt, om serviceafdelingen i en virksomhed kunne effektiviseres. En konkretisering af virksomhedens målsætninger blev selvfølgelig udarbejdet.

Den foreliggende opgave kunne tænkes løst på to principielt forskellige måder:

1. Gennem analyse af servicefunktionen at finde frem til åbenbare eller sandsynlige forbedringer til denne, altså en rationalisering.

2. Ved analyse og dataindsamling at konstruere en model, som afbilder problemet uden at bekymre sig om aktuelle forbedringer. Formålet her er at give ledelsen et beslutningsgrundlag i hænde.

Denne grove principielle opdeling blot for at skitsere den måde problemet blev løst på, nemlig hensyntagen til begge aspekter. En kømodel blev tilpasset, så den afbildede det aktuelle service-kunde-ventetids-problem

*) Artiklen er baseret på udsnit af analysen for Maskinfabrikken HAKA A/S, og den knytter sig til artiklen: Erik Johnsen, »Anvendelse af en multimålsætningsmodel til styring af en virksomheds servicefunktion«, *Erhvervsøkonomisk Tidsskrift*, nr. 1, 1969.

**) civilingeniør, Metodeforskningsgruppen, Det økonomiske Forskningsinstitut, Handelshøjskolen i København.

(beslutningsgrundlaget), og en række forslag til forbedringer blev anbefalet vedrørende servicefunktionen, som den fungerer i dag.

Indledende problemanalyse

Hvilke kendte OR-modeller kunne tænkes benyttet på nærværende problem, og hvad siger erfaring eller intuition, at der er galt med den eksisterende servicefunktion?

En vaskemaskine placeret et eller andet sted i landet vil ikke vaske, som husmoderen ønsker det. Hun meddeler virksomheden det, og denne skal sende den montør, der arbejder i området, ud for at se på vaskemaskinen. Montøren kan normalt ikke komme dagen efter, da der er andre kunder i hans område, som står i kø for service. Længden af den kø, der venter på service, er bl. a. bestemt af følgende faktorer:

Antal servicekald pr. dag i hele landet.

Det antal servicebesøg, en montør kan udføre pr. dag.

Antal servicekald pr. dag er en faktor, som virksomheden ingen indflydelse har på, på kort sigt. Det afhænger af antallet af vaskemaskiner i landet samt disses tekniske egenskaber.

Antal montører i landet er selvfølgelig en af virksomhedens handlingsparametre.

Med en given montørstab kan den gennemsnitlige kundeventetid ($\overline{W_q}$) reduceres, hvis man på en eller anden måde er i stand til at forøge det gennemsnitlige antal service-besøg pr. dag ($\bar{\mu}$). En effektivisering af den givne montørstab. Det er oplagt og fristende at angribe problemet her. Den tid en montør bruger til et servicebesøg, er summen af en køretid til kunden fra forrige kunde og en netto servicetid (reparationstiden på stedet). Ændringer, der kunne nedbringe enten køretiden og/eller nettoservicetiden, ville formindske bruttoservicetiden (br.serv.), og følgelig forøge det gennemsnitlige antal servicebesøg pr. dag. Derfor blev følgende ændringer overvejet til formindskelse af køretiden. Nettoservicetiden, i det væsentlige et udtryk for montørernes dygtighed, betragtes som givet.

1. Ændring af områdeinddelingen. En montør arbejdede indenfor et bestemt geografisk område. Områderne var af forskellig størrelse, og var den nuværende en bedste inddeling?

   Hvorfor ikke helt ophæve områdegrænserne?

En analyse af værdien af en ophævelse af områdegrænserne ville blive for omfattende til at kunne afsluttes indenfor tidsrammen. Tanken mødte desuden modstand hos montørerne, der var interesseret i at arbejde med faste kunder og foretage rettelser på eget arbejde.

2. Et oplagt teoretisk OR-problem ville være at finde den bedste måde at placere en montør indenfor et givet område, og at finde den korteste daglige kørerute, når et givet antal kunder i området beder om service (»The Travelling Salesman Problem«).

Udbuddet af montører var ikke så stort, at ledelsen havde mulighed for at få en montør, der netop boede på det for området optimale sted. Endvidere ville ansættelse af en ny montør medføre, at et område skulle deles, og en evt. tidligere optimal montørplacering ville ikke længere være opmal.

En optimal daglig ruteplanlægning løst ved lineær- eller dynamisk programmering ville blive for stift et system og derudover kræve et edb-anlæg som optimeringsredskab.

Kømodellen.

En montør kørte indenfor et bestemt område rundt til kunderne, som var faste. Kunne en én-kanal kømodel afbilde situationen? Tilsyneladende ja. Ganske vist var det ikke kunderne, der bevægede sig hen til servicestedet, men principielt var problemerne ens. Næste skridt var derfor ved dataindsamling at få kendskab til de to uafhængige variable λ og μ i kømodellen, d. v. s.

1. det gnst. antal servicekald pr. dag pr. montør ($\bar{\lambda}$), samt fordelingen af λ, og
2. det gnst. antal servicebesøg pr. dag pr. montør ($\bar{\mu}$) eller snarere den gnst. bruttoservicetid (br.serv.) samt dennes fordeling.
   br.serv. $= 1/\mu$.

I den klassiske énkanal kømodel forudsættes λ at være poissonfordelt og $1/\mu$ eksponential-fordelt. Var disse forudsætninger opfyldt i dette konkrete tilælde?

Var det muligt at få data for disse variable i det historiske materiale, virksomheden sad inde med, eller ville det kræve, at man i en tid fremover indhentede oplysninger, som ikke var led i den daglige rutine? Eller mere generelt formuleret: I hvor høj grad skulle man vælge at modificere sin model, så de forhåndenværende oplysninger kunne benyttes, fremfor at indsamle netop de data, som man har lært skal benyttes i ens teoretiske model?

Af historisk materiale fandtes i serviceafdelingen kopier af de rapporter, der skal udfyldes for hvert servicebesøg.

Antallet af rapporter i en periode viste derfor det faktiske antal servicebesøg i perioden. På rapporten var angivet begyndelsestid og sluttid for besøget (nettoservicetiden). Køretiden beregnedes som differencen mellem begyndelsestidspunktet for et besøg og sluttidspunktet for det forrige.

Af en dags eksempelvis 5 rapporter kunne beregnes de 5 nettoservicetider, men kun 4 køretider. Tidspunkterne for montørens start fra og tilbagekomst til hjemmet var ukendte.

Til de 5 besøg måtte svare 5 bruttoservicetider. Den 5. køretid bestemtes kunstigt som den gennemsnitlige køretid for de 4 kendte køretider.

Bestemmelse af λ og μ.

Antallet af servicekald pr. dag (λ) var ikke registreret noget sted, og det var derfor umuligt at finde fordelingen af λ. Men hvis der indenfor et givet område ved en måneds begyndelse venter 15 kunder på service, og køen er uændret ved månedens afslutning, da må antallet af servicebesøg i måneden have været lige så stort som antallet af servicekald. Værdien af λ blev derfor målt som det gennemsnitlige antal servicebesøg, da systemet var i ligevægt. Det blev forudsat, at servicekaldene kom tilfældigt ind og dermed, at λ var poisson-fordelt.

Da $\bar{\lambda}$ blev fundet som det gennemsnitlige antal servicebesøg i perioden, kunde det se ud til, at $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$, og dermed at kundekøen ville vokse i det uendelige. Det uafhængige $\bar{\mu}$ må findes som 1 divideret med bruttoservicetiden. Måles $\bar{\mu}$ i antal besøg pr. dag og bruttoservicetiden i min., er det nødvendigt at kende arbejdsdagens længde i minutter for at kunne finde $\bar{\mu}$ fra bruttoservicetiden.

Hvordan kommer man nu videre, når det viser sig, at arbejdsdagens længde langt fra er konstant. Ikke alene varierer den fra dag til dag for den enkelte montør, men den gennemsnitlige arbejdsdags længde var også forskellig montørerne imellem.

Arbejdsdagens længde i minutter (arb.d) blev indført som ny uafhængig variabel.

Det gennemsnitlige antal servicebesøg pr. dag blev så fundet indirekte ved $\bar{\mu} = \dfrac{\overline{\text{arb. d}}}{\overline{\text{br.serv.}}}$.

Forudsætningen om uafhængighed mellem λ og μ i kømodellen var ikke opfyldt i det foreliggende servicesystem.

Kom der en periode med travlhed og mange servicekald, sendte man flere rapporter ud til montørerne, og disse klarede dette ekstra pres ved at arbejde hurtigere og/eller holde en længere arbejdsdag, d. v. s. at de øgede deres μ. I stille tider (λ lille) formindskede montørerne deres serviceaktivitet, mere eller mindre ubevidst (formindskede μ). Denne hypotese om afhængighed mellem μ og λ syntes at finde støtte i ledelsens erfaring: Ligegyldigt om der var travlt, ferietid eller stille tider, så forblev kundekøen nogenlunde konstant.

Den situation, hvor montøren intet kendskab har til kundekøens længde, og hvor han har fået tilsendt et så stort antal rapporter, at han har mulighed for at udfylde hele sin arbejdsdag, vil svare til den situation, hvor μ er uafhængig af λ. I travle perioder foreligger en sådan situation.

Grundet afhængigheden mellem λ og μ var egentlig testning af modellen udelukket.

De til brug for kømodellen nødvendige data blev hentet fra historiske montørrapporter. Andre på montørrapporten relevante oplysninger blev samtidig registreret. Materialet blev behandlet statistisk for hver montør, og udover beregning af gennemsnit og spredning udregnedes fordelingens skævhed. Med hensyn til »resultater« fra denne statistiske behandling skal henvises til artiklen af Erik Johnsen. Blot skal her resumeres nogle ændringer, som det blev anbefalet virksomheden at foretage på serviceafdelingen, som den fungerede i dag, med henvisning til den udarbejdede statistik.

1. Man bør undgå montører, der fungerer som specialister på en bestemt type maskine. Områderne, de opererer på, er for store og medfører derfor en forholdsmæsig lang køretid.
2. Montøren bør forynes med ekstra rapporter for at udfylde sin arbejdsdag helt.
3. Det for tiden eksisterende montør-reservedelslager problem må løses.

Bruttoservicetidens fordeling.

Som før nævnt forudsættes bruttoservicetiden i standard én-kanal kømodellen at være eksponentialfordelt (»lige mange korte og lange servicetider«). I håb om, at virkeligheden ville arte sig som modellen forlangte, undersøgtes sagen nøjere. Det fremgik dog tydeligt af den udarbejdede statistik, at der ingen meget små servicetider var. Næsten ingen nettoservicetider var under en halv time.

I OR-litteraturen findes en mere raffineret og anvendelig én-kanal kømodel. En analytisk model, hvor kravet til servicetidens fordeling blot er, at den er Erlang-fordelt.*)

Kort om Erlang-fordelingerne:
Fordelingsfunktionen er

*) Se appendiks.

$$f(t/\mu,k) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\mu t}$$

En funktion af tiden t for μ og k fast. For hver værdi af k $(1 \leqslant k < \infty)$ repræsenterer formlen en bestemt fordelingstype med middelværdi $1/\mu$ og variansen $1/(k \cdot \mu^2)$.

For $k = 1$ får man den specielle eksponentialfordeling og for $k \to \infty$ det deterministiske tilfælde, hvor servicetiden er konstant lig $1/\mu$.

På forhånd var det helt klart, at det ikke var muligt at benytte den samme Erlang-fordeling som model for alle montørers bruttoservicetid, da statistikken tydeligt viste, at montørernes gennemsnitlige bruttoservicetid var forskellig. Som bedste skøn over $1/\mu$ i den teoretiske fordeling valgtes naturligt montørens gennemsnitlige bruttoservicetid, som var beregnet på grundlag af dataindsamlingen.

Det var at forvente, at bruttoservicetidsfordelingen for en montør ikke alene adskilte sig fra andre montørers fordelinger ved fordelingens gennemsnit $(1/\mu)$, men også ved fordelingens k-værdi, som udtrykker, hvor varieret længden af servicetiden er. En montør, hvis fordeling har et stort k, udfører sine servicebesøg med nogenlunde konstant bruttoservicetid. Hver enkelt montørs bruttoservicetid måtte altså undersøges.

Problemet blev angrebet på følgende måde:

1. Et foreløbigt k blev bestemt for hver montør baseret på de hidtil indsamlede data ved at sammenholde den empiriske og teoretiske varians:

$$\frac{1}{k \cdot \mu^2} = \text{varians.}$$

Det på denne måde bestemte k viste sig at variere for de forskellige montører lige fra $k = 4$ til $k = 37$.

2. En nøjagtigere grafisk bestemmelse af k for tre montører med k-værdier fundet under pkt. 1 på 4, 18 og 37. Dette krævede yderligere indsamling af data for disse tre montørers bruttoservicetider.

Servicetiderne for en montør blev indtegnet på en slags histogramform. Hver måling for bruttoservicetid udgør en blok, og blokkene lægges ovenpå hinanden i størrelsesorden (se fig. 1 i appendiks). Ved denne fremgangsmåde fås en empirisk fordeling, der blev sammenlignet med den til Erlang-fordelingen svarende teoretiske fordeling $(S_0(t))$ for forskellige værdier af k (se appendiks). Herved var det ikke vanskeligt at skønne over fordelingens k-værdi.

Det viste sig mærkeligt nok, at de empiriske data for de tre montører alle syntes at have fordelinger med samme k-værdi ($k = 10$), på trods af de meget forskellige vurderinger under pkt. 1.

Den videre arbejdshypotese blev derfor, at alle montørerne havde samme k i deres bruttoservicetid-fordeling. Fordelingerne afveg selvfølgelig fra hinanden ved forskellige middelværdier $(1/\mu)$.

Da de til grund for kømodellen indbyggede forudsætninger således med rimelig sikkerhed var opfyldt i det virkelige servicesystem, kunne man tillade sig at sige, at modellen var god, og benytte dens resultat for den gennemsnitlige ventetid W_q (se appendiks).

Bemærk, at modellen udtrykker en ligevægtssituation.

Eksempler på anvendelse af modellen som beslutningsgrundlag.

Den fundne kømodel er i stand til at give ledelsen værdifulde oplysninger om, hvad en ændring af de indgående aktiviteter, gennemsnitlige antal kald pr. dag, den gennemsnitlige bruttoservicetid og den gennemsnitlige længde af en arbejdsdag, vil medføre af ændring på den gennemsnitlige ventetid for kunder i montørens område. Bemærk, at det gennemsnitlige antal servicekald pr. dag egentlig også er en handlingsparameter. Antallet af servicekald pr. dag indenfor et område kan i nogen grad styres ved at ændre områdets størrelse, hvilket kan være tilfældet ved ansættelse af en ny montør.

Eks. 1.

For en montør har man følgende oplysninger:
Gennemsnitligt antal servicekald pr. dag = 7.0 kald/dag
Gennemsnitlig bruttoservicetid = 70 min.

Hvor lang må arbejdsdagen nødvendigvis være for at opretholde en gennemsnitlig kundeventetid $\overline{W_q}$ på 3 dage?

Modellens ventetidsformel benyttes med arb.d som ubekendt: arb.d ca. 503 min.

Eks. 2.

Foren montør kendes: $\bar{\lambda} = 6.8$ kald/dag.

Hvilke værdier for gennemsnitlig bruttoservicetid vil medføre, at køen vil vokse i det uendelige?

Benyttes den på grundlag af ventetidsformlen udviklede tabel, får man, at alle gennemsnitlige bruttoserviceventetider > 80 minutter vil give en uendelig lang kø.

Eks. 3.

Følgende data er aktuelle for en montør:

$\bar{\lambda} = 5.7$ kald pr. dag

Gennemsnitlig bruttoservicetid = 80 min.

Gennemsnitlig længde af arbejdsdag = 480 min.

$\bar{W}_q = 1.8$ dage.

Hvis $\bar{\lambda}$ steg til 5.9 kald/dag, hvorledes ville det ændre $\bar{W}_q$?

Fra tabellen: $W_q = 5.5$ dag.

Dette resultat er nok uacceptabelt, og naturligvis ville man spørge, hvor meget gennemsnitlig bruttoservicetid skulle reduceres med for at holde $\bar{W}_q = 3.0$ dage med det nye $\bar{\lambda}$.

Af tabellen ses, at en reduktion af gennemsnitlig bruttoservicetid til 75 min. vil nedsætte $\bar{W}_q$ til 1.0 dag.

Konklusion.

Ovenfor er forsøgt fremstillet nogle af de problemer, som dukkede op ved løsningen af en konkret, mindre OR-opgave.

Løsningen var dels forslag til forbedring af den eksisterende serviceafdeling, dels en model af montør-kundeventetidskomplekset.

Modellen kan benyttes som tilnærmelse til at skønne over situationen i hele landet, idet der så må regnes med en gennemsnitsmontør.

Egentlig testning af modellen blev overladt til virksomheden selv, da de eksisterende data ikke var i stand til at give de uafhængige værdier af $\bar{\lambda}$ og $\bar{\mu}$.

Til sidst skal nævnes, at knaphed på tid medførte, at det var nødvendigt at sortere hele problemkomplekset, udfra en mere eller mindre subjektiv vurdering, og kun gå i gang med at analysere de problemer, som blev anset for de væsentligste, og som var mulige at analysere indenfor tidsrammen.

Appendiks.

En servicefunktion med Erlang-fordelt servicetid kan formelt repræsenteres ved en sekvens af servicefaser. Hver fase har en eksponentialfordelt servicetid.

Erlang-fordelingens k er lig antallet af faser.

	fase 1	2		k	
$\lambda \rightarrow 0\ 0 \cdots \rightarrow$	μk	μk		μk	$\rightarrow$

Først når en kunde går ud af sidste fase, kan en ny kunde træde ind i første.

Servicetidens fordeling for en sådan formelt faseopdelt servicefunktion er Erlang-fordelingen:

$$f\,(t|\mu,k) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!}\; t^{k-1}\; e^{-k\mu t}$$

Hvis den akkumulerede fordeling kaldes $F(t)$, udtrykker:

$$S_0(t) = 1 - F(t)$$

sandsynligheden for, at servicetiden er større end t.

Tabeller over $S_0(t)$ for forskellige Erlangfordelinger er tabelleret i Morse (Appendiks 2).

Den gennemsnitlige ventetid $(\overline{W_q})$ for det stationære køproblem kan udledes analytisk (Morse, 1958, pg. 72–76):

$$W_q = \frac{\varrho^2}{1-\varrho} \cdot \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

I det aktuelle system indførtes arbejdsdagens længde (arb.d) som en ny uafhængig variabel, og ϱ er da bestemt ved

$$\varrho = \frac{\lambda \cdot \text{br.serv.}}{\text{arb.d}}$$

Referencer:

Johnsen, Erik, »Anvendelse af en multimålsætningsmodel til styring af en virksomheds servicefunktion«, Erhvervsøkonomisk Tidsskrift, nr. 1, 1969.

Morse, P. M., »Queues, Inventories and Maintenance«, ORSA nr. 1, New York, 1958.

Sasieni, M., Yaspan, A. & Friedman, L., »Operations Research: Methods and Problems«, Wiley, New York, 1958.

Eks. 3.

Følgende data er aktuelle for en montør:

$\bar{\lambda} = 5.7$ kald pr. dag

Gennemsnitlig bruttoservicetid = 80 min.

Gennemsnitlig længde af arbejdsdag = 480 min.

$\overline{W}_q = 1.8$ dage.

Hvis $\bar{\lambda}$ steg til 5.9 kald/dag, hvorledes ville det ændre $\overline{W}_q$?

Fra tabellen: $W_q = 5.5$ dag.

Dette resultat er nok uacceptabelt, og naturligvis ville man spørge, hvor meget gennemsnitlig bruttoservicetid skulle reduceres med for at holde $\overline{W}_q = 3.0$ dage med det nye $\bar{\lambda}$.

Af tabellen ses, at en reduktion af gennemsnitlig bruttoservicetid til 75 min. vil nedsætte $\overline{W}_q$ til 1.0 dag.

Konklusion.

Ovenfor er forsøgt fremstillet nogle af de problemer, som dukkede op ved løsningen af en konkret, mindre OR-opgave.

Løsningen var dels forslag til forbedring af den eksisterende serviceafdeling, dels en model af montør-kundeventetidskomplekset.

Modellen kan benyttes som tilnærmelse til at skønne over situationen i hele landet, idet der så må regnes med en gennemsnitsmontør.

Egentlig testning af modellen blev overladt til virksomheden selv, da de eksisterende data ikke var i stand til at give de uafhængige værdier af $\bar{\lambda}$ og $\bar{\mu}$.

Til sidst skal nævnes, at knaphed på tid medførte, at det var nødvendigt at sortere hele problemkomplekset, udfra en mere eller mindre subjektiv vurdering, og kun gå i gang med at analysere de problemer, som blev anset for de væsentligste, og som var mulige at analysere indenfor tidsrammen.

Appendiks.

En servicefunktion med Erlang-fordelt servicetid kan formelt repræsenteres ved en sekvens af servicefaser. Hver fase har en eksponentialfordelt servicetid.

Erlang-fordelingens k er lig antallet af faser.

	fase 1	2		k	
$\lambda \rightarrow 0\ 0 \cdots \rightarrow$	μk	μk		μk	$\rightarrow$

Først når en kunde går ud af sidste fase, kan en ny kunde træde ind i første.

Servicetidens fordeling for en sådan formelt faseopdelt servicefunktion er Erlang-fordelingen:

$$f\,(t|\mu,k) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!}\; t^{k-1}\; e^{-k\mu t}$$

Hvis den akkumulerede fordeling kaldes $F(t)$, udtrykker:

$$S_0(t) = 1-F(t)$$

sandsynligheden for, at servicetiden er større end t.

Tabeller over $S_0(t)$ for forskellige Erlangfordelinger er tabelleret i Morse (Appendiks 2).

Den gennemsnitlige ventetid ($\overline{W}_q$) for det stationære køproblem kan udledes analytisk (Morse, 1958, pg. 72–76):

$$W_q = \frac{\varrho^2}{1-\varrho}\cdot\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

I det aktuelle system indførtes arbejdsdagens længde (arb.d) som en ny uafhængig variabel, og ϱ er da bestemt ved

$$\varrho = \frac{\lambda\cdot\text{br.serv.}}{\text{arb.d}}$$

Referencer:

Johnsen, Erik, »Anvendelse af en multimålsætningsmodel til styring af en virksomheds servicefunktion«, Erhvervsøkonomisk Tidsskrift, nr. 1, 1969.

Morse, P. M., »Queues, Inventories and Maintenance«, ORSA nr. 1, New York, 1958.

Sasieni, M., Yaspan, A. & Friedman, L., »Operations Research: Methods and Problems«, Wiley, New York, 1958.

Eks. 3.

Følgende data er aktuelle for en montør:

$\bar{\lambda} = 5.7$ kald pr. dag
Gennemsnitlig bruttoservicetid = 80 min.
Gennemsnitlig længde af arbejdsdag = 480 min.
$\overline{W}_q = 1.8$ dage.

Hvis $\bar{\lambda}$ steg til 5.9 kald/dag, hvorledes ville det ændre $\overline{W}_q$?
Fra tabellen: $W_q = 5.5$ dag.

Dette resultat er nok uacceptabelt, og naturligvis ville man spørge, hvor meget gennemsnitlig bruttoservicetid skulle reduceres med for at holde $\overline{W}_q = 3.0$ dage med det nye $\bar{\lambda}$.

Af tabellen ses, at en reduktion af gennemsnitlig bruttoservicetid til 75 min. vil nedsætte $\overline{W}_q$ til 1.0 dag.

Konklusion.

Ovenfor er forsøgt fremstillet nogle af de problemer, som dukkede op ved løsningen af en konkret, mindre OR-opgave.

Løsningen var dels forslag til forbedring af den eksisterende serviceafdeling, dels en model af montør-kundeventetidskomplekset.

Modellen kan benyttes som tilnærmelse til at skønne over situationen i hele landet, idet der så må regnes med en gennemsnitsmontør.

Egentlig testning af modellen blev overladt til virksomheden selv, da de eksisterende data ikke var i stand til at give de uafhængige værdier af $\bar{\lambda}$ og $\bar{\mu}$.

Til sidst skal nævnes, at knaphed på tid medførte, at det var nødvendigt at sortere hele problemkomplekset, udfra en mere eller mindre subjektiv vurdering, og kun gå i gang med at analysere de problemer, som blev anset for de væsentligste, og som var mulige at analysere indenfor tidsrammen.

Appendiks.

En servicefunktion med Erlang-fordelt servicetid kan formelt repræsenteres ved en sekvens af servicefaser. Hver fase har en eksponentialfordelt servicetid.

Erlang-fordelingens k er lig antallet af faser.

$$\begin{array}{lcccccl} & \text{fase } 1 & 2 & & k & \\ \lambda \rightarrow 0\ 0 \cdots \rightarrow & \boxed{\mu k} & \boxed{\mu k} & \qquad & \boxed{\mu k} & \rightarrow \end{array}$$

Først når en kunde går ud af sidste fase, kan en ny kunde træde ind i første.

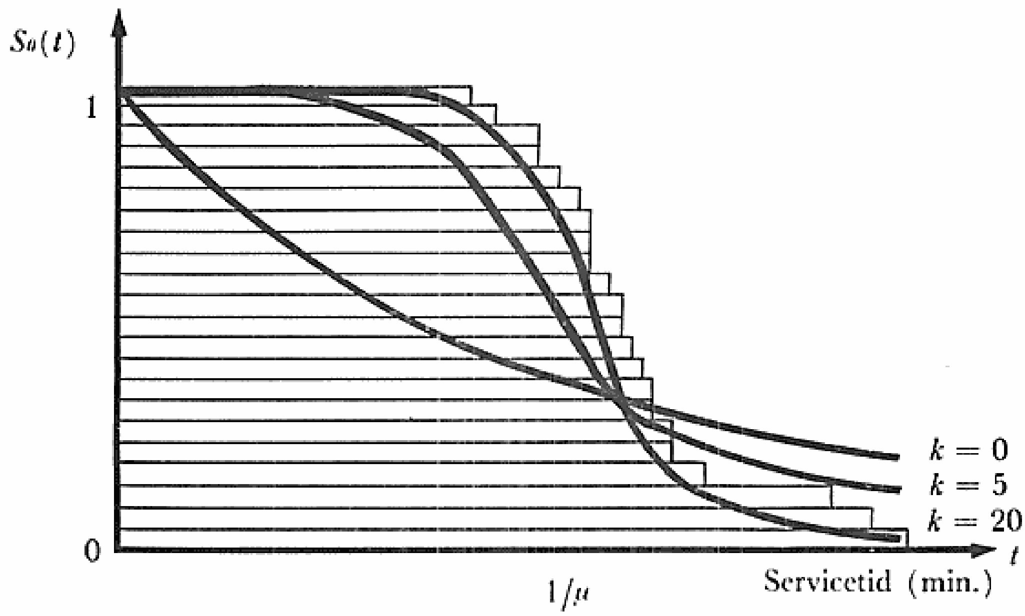

Fig. 1. $So(t)$: Sandsynligheden for, at servicetiden vil tage længere tid end tiden t.

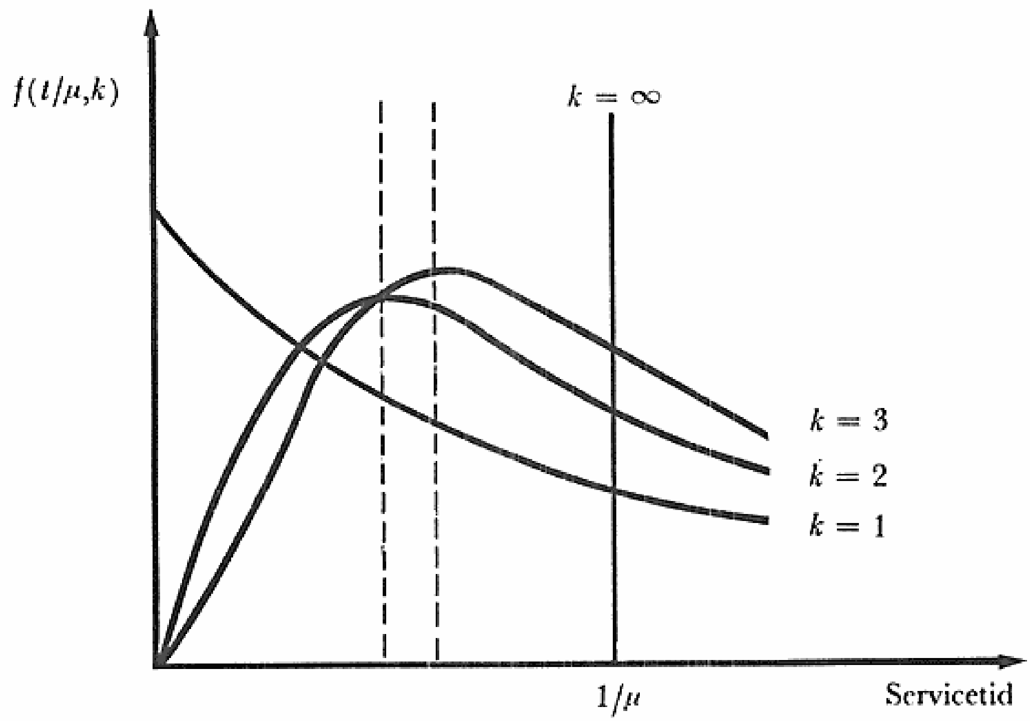

Fig. 2. Eksempler på Erlangfordelinger.

Uddrag af statistiske oversigter udarbejdet på grundlag af det indsamlede datamateriale.

Montør	Antal besøg i alt	Maskinklasse			Prioritering			Fejl						Reserve-dele mangler	Gns. ventetid pr. kunde (dage)
		A %	B %	C %	Haster	Kort sendes	Intet	Mater.	Betj.	Div.	Opst.	Ingen	Ingen hjem-me		
232	167		73	27	7	101	60	114	26	16	4	11	4	7	3.2
243	109		64	36	3	17	89	84	8	12	1	5	7	3	3.6
254	60	33	39	28	1	15	45	47	5	6	0	2	3	1	4.3
265	21	100			0	2	19	26	1	4	0	3	0	3	3.7
⋮			⋮			⋮			⋮			⋮			⋮
394	153		61	39	5	43	105	96	21	19	6	11	6	0	3.0
405	124	31	42	27	9	31	81	101	13	2	5	4	3	5	3.0
416	45		58	42	3	19	23	34	6	3	1	1	3	0	3.4
32 mont. i tilsammen 795 dage	4079	193 %: 4,7	2494 %: 61.1	1394 %: 34.2	294 %: 7.2	1258 %: 30.8	2522 %: 62.0	2875 %: 70.5	490 %: 12.0	404 %: 9.8	102 %: 2.4	220 %: 5.3	115 %: 2.8	141 %: 3.5	3.3

Montør nr.	Data omfang	Antal besøg pr. dag			Netto servicetid (min.)			Brutto servicetid (min.)			Arbejdstid (min.)		
		Middel-tal	Spred-ning	Skævhed	Middel-tal	Spred-ning	Skævhed	Middel-tal	Spred-ning	Skævhed	Middel-tal	Spred-ning	Skævhed
372	26	4.08	1.49	−0.40	40.94	12.34	1.37	87.90	31.37	1.89	324.04	84.78	−0.42
313	27	5.67	1.71	0.33	40.26	14.10	1.50	65.25	19.73	1.50	361.59	116.27	−0.35
291	29	5.86	1.92	−0.74	38.92	11.37	0.27	59.06	14.98	0.02	351.72	126.39	−1.09
33	26	5.73	1.54	−0.20	40.04	10.28	1.40	78.53	12.83	0.90	443.00	109.62	−0.66
⋮			⋮		⋮		⋮			⋮			⋮
55	25	4.20	1.96	0.24	56.18	24.36	1.28	86.47	30.56	1.60	336.00	129.30	−0.54
195	22	4.41	2.42	0.17	42.08	13.50	0.37	65.53	24.15	0.97	274.09	149.57	−0.01
Gennemsnit for alle montører		5.29	1.91	+0.01	46.30	15.80	+1.13						