# Optimal rutestruktur i et internationalt luftfartsselskab

*Af* Torben Michael Roepstorff[1])

I artiklen gives et kort resumé og uddrag af forfatterens hovedafhandling på det nye cand. merc.-dagstudium under titlen »En analyse af et udsnit af tilgængelige modeller som disponeringsgrundlag for internationale luftfartsselskabers fastlæggelse af passagertrafikken«. Artiklen, der må opfattes som en introduktion til emnet, omhandler en analyse af lineær programmering og simulation som middel til at løse problemet omkring optimal rutestruktur. Herved forstås 1) optimal allokering af en given flypark, 2) optimal investering samt 3) optimalt rutenet. Hovedvægten lægges på optimal allokering. Artiklen konkluderer, at de opstillede modeller kan være et middel til at træffe bedre beslutninger gennem analyse, planlægning og kontrol.

## I *Indledning.*

Den kraftige vækst i den internationale luftfart i de sidste årtier har medført et stigende behov for transportplanlægning og transportforskning, som følge af de store økonomiske konsekvenser ved fejldisponeringer.

Det økonomiske hovedproblem i et vilkårligt luftfartsselskab er optimal rutestruktur. Herved forstås 1) optimal allokering af en given flypark på et rutenet, 2) optimal investering samt 3) optimalt rutenet. Man kan hævde, at samtlige aktiviteter, og dermed også samtlige indtægter og omkostninger, er betinget af rutestrukturen. Det må derfor være væsentligt at analysere, om der findes modeller, som kan bidrage til at løse problemet.

Det er artiklens formål at give en kort introduktion og oversigt over mulighederne for at løse problemet. Hovedvægten lægges på problemfor-

[1]) Civiløkonom, cand. merc.

# Optimal rutestruktur i et internationalt luftfartsselskab

*Af* Torben Michael Roepstorff[1])

I artiklen gives et kort resumé og uddrag af forfatterens hovedafhandling på det nye cand. merc.-dagstudium under titlen »En analyse af et udsnit af tilgængelige modeller som disponeringsgrundlag for internationale luftfartsselskabers fastlæggelse af passagertrafikken«. Artiklen, der må opfattes som en introduktion til emnet, omhandler en analyse af lineær programmering og simulation som middel til at løse problemet omkring optimal rutestruktur. Herved forstås 1) optimal allokering af en given flypark, 2) optimal investering samt 3) optimalt rutenet. Hovedvægten lægges på optimal allokering. Artiklen konkluderer, at de opstillede modeller kan være et middel til at træffe bedre beslutninger gennem analyse, planlægning og kontrol.

## I *Indledning.*

Den kraftige vækst i den internationale luftfart i de sidste årtier har medført et stigende behov for transportplanlægning og transportforskning, som følge af de store økonomiske konsekvenser ved fejldisponeringer.

Det økonomiske hovedproblem i et vilkårligt luftfartsselskab er optimal rutestruktur. Herved forstås 1) optimal allokering af en given flypark på et rutenet, 2) optimal investering samt 3) optimalt rutenet. Man kan hævde, at samtlige aktiviteter, og dermed også samtlige indtægter og omkostninger, er betinget af rutestrukturen. Det må derfor være væsentligt at analysere, om der findes modeller, som kan bidrage til at løse problemet.

Det er artiklens formål at give en kort introduktion og oversigt over mulighederne for at løse problemet. Hovedvægten lægges på problemfor-

[1]) Civiløkonom, cand. merc.

muleringen samt modellernes målsætnings-, aktivitets- og informationsafbildning (måling). Selve løsningsmetodikken af modellerne behandles af pladsmæssige grunde ikke.

Vi beskæftiger os såvel med ruteselskaber som med charterselskaber. Man kan betragte charterselskaberne som et simplificeret specialtilfælde af ruteselskaberne. Det indebærer, at de beslutningsregler, der gælder for ruteselskaberne også som hovedregel vil gælde for charterselskaberne. Den modsatte konklusion kan naturligvis ikke drages. Vi beskæftiger os kun med passagertrafikken.

## II. *Problemformulering.*

Problemet vedrørende optimal rutestruktur indebærer 3 deloptimeringer og kan formuleres på følgende måde:

1) Ved optimal allokering er problemet at undersøge, hvorledes en flypark skal allokeres på $n$-ruter, givet at flyparken består af $A = \sum_{i=1}^{m} a_i$ fly, hvor $a_i$ er antal fly af flytype $(i)$ for $(i = 1, 2, 3, \ldots m)$.
2) Ved optimal investering er problemet at undersøge om, og i givet fald hvornår, det er rationelt at udskifte et fly og/eller investere i nye flytyper. Problemet er at finde den optimale værdi af $(A)$, givet $(n)$.
3) Ved optimalt rutenet er problemet at undersøge om, og i givet fald hvornår, det er rationelt at oprette resp. nedlægge en rute. Problemet er at finde den optimale værdi af $(n)$, givet $(A)$.

Hovedvægten lægges på optimal allokering. Som det imidlertid vil fremgå senere, indebærer de optimale allokeringsmodeller samtidig potentielle muligheder for at løse problemerne vedr. optimal investering og rutenet. Fra et beslutningssynspunkt er optimal allokering mere korttidspræget end de øvrige 2 optimeringer. Det vil ses, at optimal rutestruktur er et samlet optimum optimorum, af 3 deloptimeringer. Problemet kan omformuleres således, at vi ønsker at finde de optimale værdier af $x_{ij}$ for $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ og $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, givet selskabets målsætning. Vi skal altså finde det optimale antal fly af type $(i)$, som skal allokeres på rute $(j)$, d. v. s. $x_{ij}$, hvor den optimale kombination af $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ og $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ ligeledes skal findes.

## III. *Lineær programmering anvendt ved optimal rutestruktur.*

### 3–1 *Optimal allokering ved deterministisk efterspørgsel.*

Der indføres følgende symboler:

| | |
|---|---|
| $x_{ij}$ | = antal fly af flytype ($i$), som skal allokeres på rute ($j$) |
| $a_i$ | = antal fly til disposition af flytype ($i$) |
| $e_j$ | = efterspørgsel på rute ($j$) (antal passagerer) |
| $k_{ij}$ | = totale direkte omkostninger for flytype ($i$) på rute ($j$) |
| $p_{ij}$ | = passagerkapacitet for flytype ($i$) på rute ($j$) |
| $n$ | = antal ruter |
| $m$ | = antal flytyper |
| $i$ | = flytype ($i$) $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ |
| $j$ | = rute ($j$) $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ |
| $x_{i,n+1}$ | = antal ledige (ikke-allokerede) fly af type ($i$) |
| $k_{m+1,j}$ | = offeromkostninger ved ikke at kunne transportere 1 passager på rute ($j$) på grund af kapacitetsmangel (= billetprisen) |
| $x_{m+1,j}$ | = antal passagerer på rute ($j$), som ikke kan transporteres på grund af kapacitetsmangel |
| $k_{i,n+1}$ | = stilstandsomkostninger for flytype ($i$) |

$x_{ij}$ er den ubekendte kontrollerbare variable set fra beslutningstagers synspunkt. $x_{i,n+1}$ og $x_{m+1,j}$ er begge residualstørrelser. Foreløbig betragtes samtlige andre variable som kendte konstanter. Efterspørgselen på rute ($j$), d. v. s. ($e_j$), antager en deterministisk værdi.

Et lineært minimumsproblem kan nu formuleres på følgende velkendte måde med sædvanlige forudsætninger.

Problemet er at finde

(1) $\sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n+1} k_{ij}x_{ij} = K =$ minimum, hvor $K =$ totale direkte omk.

under følgende begrænsninger

(2) $\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, (m+1))$

(3) $x_{ij} \geqslant 0$

(4) $\sum_{i=1}^{m+1} p_{ij}x_{ij} \geqslant e_j \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, (n+1))$

Enhver allokering af $x_{ij}$, som tilfredsstiller (2), (3) og (4), er en mulig løsning. Når samtidig (1) er opfyldt, er der tale om en optimal løsning.

En hensigtsmæssig gruppering af – og oversigt over talmaterialet – kan foretages ved hjælp af følgende matrix:

| Flytype ($i$) | Rute ($j$) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Rute 1 | Rute 2 | – | Rute $n$ | antal ledige fly = $x_{i,n+1}$ | antal fly = $a_i$ |
| *Flytype I.*<br>passagerkapacitet<br>totale dir. omk. | $x_{11}$<br>$p_{11}$<br>$k_{11}$ | $x_{12}$<br>$p_{12}$<br>$k_{12}$ | – | $x_{1n}$<br>$p_{1n}$<br>$k_{1n}$ | $x_{1,n+1}$<br><br>$k_{1,n+1}$ | $a_1$ |
| *Flytype II.*<br>passagerkapacitet<br>totale dir. omk. | $x_{21}$<br>$p_{21}$<br>$k_{21}$ | $x_{22}$<br>$p_{22}$<br>$k_{22}$ | – | $x_{2n}$<br>$p_{2n}$<br>$k_{2n}$ | $x_{2,n+1}$<br><br>$k_{2,n+1}$ | $a_2$ |
| – | – | – | – | – | – | – |
| *Flytype m.*<br>passagerkapacitet<br>totale dir. omk. | $x_{m1}$<br>$p_{m1}$<br>$k_{m1}$ | $x_{m2}$<br>$p_{m2}$<br>$k_{m2}$ | – | $x_{mn}$<br>$p_{mn}$<br>$k_{mn}$ | $x_{m,n+1}$<br><br>$k_{m+n+1}$ | $a_m$ |
| Offeromkostninger ved ikke at kunne transportere 1 passager: | | | | | | |
| antal passagerer<br>omk. = billetpris | $x_{m+1,1}$<br>$k_{m+1,1}$ | $x_{m+1,2}$<br>$k_{m+1,2}$ | – | $x_{m+1,n}$<br>$k_{m+1,n}$ | – | – |
| efterspørgsel =<br>antal pas. ($e_j$) | $e_1$ | $e_2$ | – | $e_n$ | – | $A = \sum_{i=1}^{m} a_i$ |
| | $E = \sum_{j=1}^{n} e_j$ | | | | | |

*Tabel I:* Matrix for beregning af optimal allokering.

Det ses af tabel I, at problemet er at finde de optimale værdier af $x_{ij}$. F. eks. hvis $x_{12} = 1$, betyder det, at der allokeres 1 fly af type I på rute 2 pr. tidsenhed. Frekvensen er lig 1. Selve løsningen skal vi af pladsmæssige grunde ikke komme nærmere ind på. Det afgørende er, at man ud fra de opstillede forudsætninger er i stand til at finde optimum. Løsningsproceduren er principielt en simplexmetode, men dog mere kompliceret end denne. Dette skyldes, at der i hver »celle« foruden $x_{ij}$ indgår 2 konstanter, $p_{ij}$ og $k_{ij}$. Som henvisning til selve løsningsproceduren kan bl. a. anføres Ferguson & Dantzig[1]), S. Vajda[2]) samt Mortons disputats fra 1952[3]).

1) Aero Engine Review 1955, nr. 14.

2) S. Vajda: Readings in Mathematical Programming. London 1962.

3) Econometrica 1953, pag. 193.

3–2 *Optimal allokering ved stokastisk efterspørgsel.*

Ved stokastisk efterspørgsel benyttes tæthedsfunktionen samt den kumulative sandsynlighedsfunktion for efterspørgselen. Den afgørende økonomiske forskel mellem deterministisk og stokastisk efterspørgsel ligger i indtægten. Ved deterministisk efterspørgsel er indtægten givet, når man kender efterspørgslen $(e_j)$. I det stokastiske tilfælde er indtægten ikke givet, før man har fundet sandsynlighedsfordelingen. Indtægten på rute $(j)$ afhænger nu ikke alene af efterspørgselen, men afhænger netop yderligere af sandsynligheden for alternative efterspørgselsværdier. Den forventede indtægt på rute $(j)$ kan udtrykkes ved:

(5) $I_j = B_j\ (s_{1j}e_{1j} + s_{2j}e_{2j} + \ldots + s_{rj}e_{rj})$ hvor

$I_j$ = den totale forventede indtægt på rute $(j)$
$B_j$ = billetprisen/indtægten pr. passager på rute $(j)$
$s_{hj}$ = sandsynligheden for at efterspørgselen *mindst* er $(e_{hj})$, hvor
$e_{hj}$ = efterspørgsel (antal passagerer) på rute $(j)$ i det $h$'te sandsynlighedsinterval for $(h = 1, 2, 3, \ldots, r)$.

Såfremt $h \to \infty$, bliver fordelingen kontinuert. For $h \to$ en øvre grænseværdi, bliver fordelingen diskret, hvilket er en fordel rent beregningsmæssigt. For $h \to \infty$ må $s_{hj} \to 0$. Heraf følger det elementære, at såfremt kapaciteten går mod uendelig, d. v. s. $x_{ij}p_{ij} \to \infty$, vil indtægten pr. passager blive mindre og mindre.

Vi er nu i stand til at reformulere problemstillingen fra tidligere. Problemet er at finde allokeringen af $x_{ij}$, således at:

(6) $\text{minimum} = K = [\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} k_{ij}x_{ij}] + [I_{total} - \sum_{j=1}^{n} (B_j \sum_{h=1}^{r} s_{hj}e_{hj})]$ [4])

under hensyntagen til følgende begrænsninger:

(7) $\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, (m+1))$,

(8) $x_{ij} \geqslant 0$

(9) $\sum_{i=1}^{m+1} p_{ij}x_{ij} \geqslant e_{1j} + e_{2j} + \ldots + e_{rj}$

for $(h = 1, 2, 3, \ldots, r)$ og $(j = 1, 2, 3, \ldots, (n+1))$.

Dette er et lineært minimumsproblem. Det er principielt det samme som det deterministiske. Det er dog væsentlig mere kompliceret, navnlig hvad

[4]) $I_{total}$ = totale indtægter, såfremt der er ubegrænset kapacitet.

$I_f = [\sum_{j=1}^{n} B_j (\sum_{h=1}^{r} s_{hj}e_{hj})]$ = indtægt ved »faktisk« kapacitet.

$(I_{total} - I_f)$ i (6) er således lig de tilsvarende offeromkostninger i det deterministiske tilfælde.

angår selve løsningsproceduren. Det afgørende er dog, at der ikke er nogen principielle hindringer for at finde optimum ud fra de opstillede forudsætninger. Som henvisning til selve løsningsproceduren kan bl. a. anføres Dantzig[5]).

### 3–3 *Optimal investering, rutenet samt rutestruktur.*

I de traditionelle investeringsmodeller er investeringskriteriet, at såfremt kapitalværdien er positiv og større end alternative investeringers kapitalværdi, da er investeringen den mest rentable. Kapitalværdien kan bl. a. gøres stokastisk.

I investeringsmodellen for udskiftning er kriteriet, at det er rationelt at udskifte, når grænseomkostningerne m. h. t. tiden for den gamle maskine er lig de totale gennemsnitsomkostninger m. h. t. tiden for den nye maskine. Herunder er forudsat konstant grænseindtægt.

Samtlige disse investeringskriterier må udvides. Baggrunden for dette er det fundamentale, at en ny flytype påvirker allokeringen af den bestående flypark. Herved påvirker en ny flytype/maskine såvel indtægterne som omkostningerne i selskabet som helhed. Hvorledes skal der tages hensyn til disse forhold? Svaret er, at vi kan benytte vor tidligere allokeringsmodel til at korrigere for forholdet.

Ved hjælp af den lineære programmeringsmodel kan vi finde, hvilken flytype(r) og hvor mange fly af hver flytype det er rationelt at anskaffe, givet rutenettet. Hvis der f. eks. fra flyfabrikanternes side er udbudt 2 forskellige flytyper på markedet, kan man gennemregne allokeringsmodellen (jfr. matrix tabel I) med tilføjelse af først den ene flytype, dernæst den anden flytype og endelig med såvel den ene som den anden flytype. Dette gøres med samtlige relevante kombinationer af antal fly og flytype. Hver beregning gennemføres for investeringsperiodens længde. Man får herved en række nettoindbetalinger på forskellige tidspunkter, som tilbagediskonteres efter traditionelle investeringsmodeller. Hver allokering beregnes jo pr. tidsenhed. Man sammenligner herefter kapitalværdien af de forskellige kombinationsmuligheder og vælger den største af disse. Der skal også sammenlignes med den bestående flyparks kapitalværdi, uden nye fly eller flytyper. Disse betragtninger gælder såvel for nyinvestering som for udskiftning. Det er forudsat, at der ikke sker nogen påvirkning på de indirekte omkostninger.

Det ses således, at det afgørende ved metoden er, at man gennemregner alternative relevante kombinationsmuligheder og vælger den løsning, som

[5]) Dantzig: Linear Programming and Extensions. Princeton 1963.

giver det største bidrag til dækning af indirekte omkostninger og overskud (»kapitalværdi«).

Den samme principielle fremgangsmåde kan anvendes ved optimalt rutenet. Man gennemregner potentielle alternative rutekombinationsmuligheder, givet flyparken.

Det vil hurtigt ses, at når man skal finde optimal rutestruktur, altså optimum optimorum, da er såvel allokeringen, investeringen som rutenettet ubekendt. Princippet er imidlertid det samme som tidligere. Man skal gennemregne samtlige relevante flypark-rute-kombinationsmuligheder og vælge den løsning, som giver størst beløb til dækning af indirekte omkostninger og overskud.

Det erkendes, at det teoretiske antal kombinationsmuligheder er meget stort. Imidlertid kan man ved almindelig common-sense-betragtninger udelukke en række kombinationsmuligheder. Det er dog klart, at en EDB-løsning vil være helt naturlig her.

Med disse betragtninger munder vor konklusion ud i, at man ud fra de opstillede forudsætninger kan finde optimal rutestruktur i et luftfartsselskab v. h. a. lineær programmering. Vi vender senere tilbage til forudsætningernes relevans og betydning.

### 3–4 *Modellens potentielle muligheder.*

Modellen kan udover gevinstmaximeringsmålsætningen udvides til at omfatte flere delmålsætninger. Det kan f. eks. være minimumsfrekvens på rute ($j$), maximal belægningsprocent (på f. eks. 90 %) p. g. a. overbooking, dårlig service, ventelister o. s. v. ved 100 % belægning m. v.

En afgørende fordel ved modellen er endvidere, at man bliver i stand til at forudsige virkningen på systemets effektivitet som følge af ændringer i kontrollerbare og/eller ikke-kontrollerbare variable og disponere derefter. Det kan f. eks. være ændringer i omkostninger, priser, efterspørgsel, tekniske fremskridt, hurtigere ekspedition, virkningen af at et fly må tages ud af drift m. v.

## IV. *Simulation anvendt ved optimal rutestruktur.*

### 4–1 *Optimal allokering ved såvel deterministisk som stokastisk efterspørgsel.*

For simulationsmodellens vedkommende er der ingen grund til at skelne mellem deterministisk og stokastisk efterspørgsel. Den førstnævnte betragtes som et specialtilfælde af den sidstnævnte.

De betragtninger, som blev gjort gældende under lineær programmering m. h. t. problemformuleringen, data m. v. kan også anvendes ved simulation.

Det er interessant at bemærke, at medens der ved lineær programmering er tale om optimering ved en totalbetragtning, er der ved simulationsmodellen tale om optimering ved grænsebetragtning.

Simulationsmodellen tager sit udgangspunkt i følgende figur:

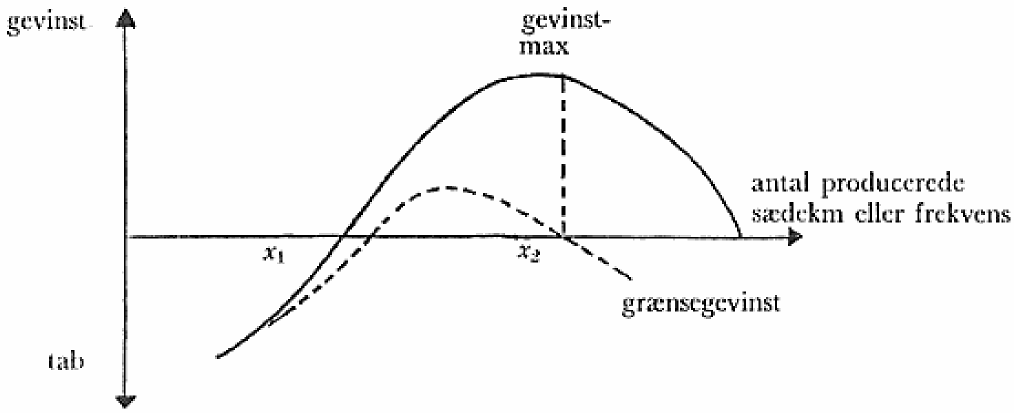


*Fig. I:* Optimal produktion.

Grænsegevinsten i fig I kan opfattes som grænseindtægt minus grænseomkostning. Som det senere skal ses, er grænseindtægten stokastisk, hvorfor beslutningstager selv må fastsætte sit sandsynlighedskrav til grænsegevinsten. Grænsegevinsten kan opfattes som ændringen i gevinsten ved udvidelse af produktionen med 1 enhed, d. v. s. forøgelse af frekvensen med 1 enhed. Det forudsættes, at grænseomkostningerne består af de direkte variable omkostninger, hvorved de indirekte omkostninger er upåvirkede af allokeringen. Grænsegevinsten kan således opfattes som et grænsedækningsbidrag.

Det ses af fig. I, at produktionen skal antage en vis størrelse, før der er tale om gevinst på grund af de faste omkostninger. Det fremgår endvidere, at grænsegevinsten er først negativ, men dog stigende. Tabet bliver mindre ved at udvide produktionen. Ved $x_1$ er break-even nået, og grænsegevinsten er herefter positiv indtil $x_2$, hvor den optimale produktion er nået. Enhver forøgelse af frekvensen ud over $x_2$ medfører et fald i gevinsten p. g. a. den negative og faldende grænsegevinstkurve. Den maximale gevinst nås ved $x_2$, idet grænseindtægt og grænseomkostning her er lige store.

Det principielle i hele simulationsproceduren er, at man v. h. a. EDB gennemregner samtlige rute-fly-kombinationsmuligheder, som er relevante, og allokerer først de fly-rute-kombinationer, som giver størst grænsegevinst.

Det er ikke givet, at vi kan producere, indtil grænseomkostning er lig grænseindtægt. Der kan være knaphed på fly. I så fald stoppes proceduren automatisk, når det sidste fly er allokeret. Det vil let ses, at heri ligger hele investeringsproblematikken. Det kan også tænkes, at der er for mange fly. I så tilfælde bliver de ledige fly ikke allokeret. Allokeringen stopper automatisk, når grænseindtægt er lig grænseomkostning, d. v. s. når grænsegevinsten bliver negativ og faldende.

I fig. II vises et simpliferet flow-diagram fra en simulationsmodel udarbejdet af Lockheed[6]). Flow-diagrammet er simplificeret og bearbejdet efter den oprindelige Lockheed model af hensyn til formålet med nærværende artikel.

Det ville være for omfattende at kommentere flow-diagrammet yderligere her. Det skulle i sig selv være tilstrækkeligt til at vise ideen i simulationsmodellen.

4–2 *Optimal investering, rutenet og rutestruktur.*

De betragtninger, der blev gjort gældende ved lineær programmering, kan stort set anvendes ved simulation. Fremstillingen skal derfor gøres kortfattet.

Det essentielle er, at man gennemregner samtlige relevante rute-fly-kombinationer og tilbagediskonterer disse. Man simulerer, at der er et uendeligt antal fly og flytyper til rådighed.

Ved optimalt rutenet simulerer man ligeledes, at der er en række potentielle ruter såvel m. h. t. oprettelse som nedlæggelse.

Ved optimal rutestruktur foretager man en beregning af samtlige relevante kombinationsmuligheder og vælger den løsning, hvor grænseindtægt og grænseomkostning er lige store.

Ud fra de opstillede forudsætninger er der således ingen principielle hindringer for at finde optimal rutestruktur v. h. a. simulation.

4–3 *Simulationsmodellens potentielle muligheder.*

Simulation kan udvides til at inkludere one-stop-ruter, hvilket er særdeles relevant for ruteselskaber. Indførelse af one-stop-ruter medfører, at der opstår 3 forskellige efterspørgselskilder til et givet udbud af sæder. Herved må der foretages en prioritering af passagererne. Beslutningstager kan enten give prioritet til de »gennemgående« passagerer eller til de pas-

[6]) Operations Research. March–April 1964, nr. 2, vol. 12, pag. 206 ff.

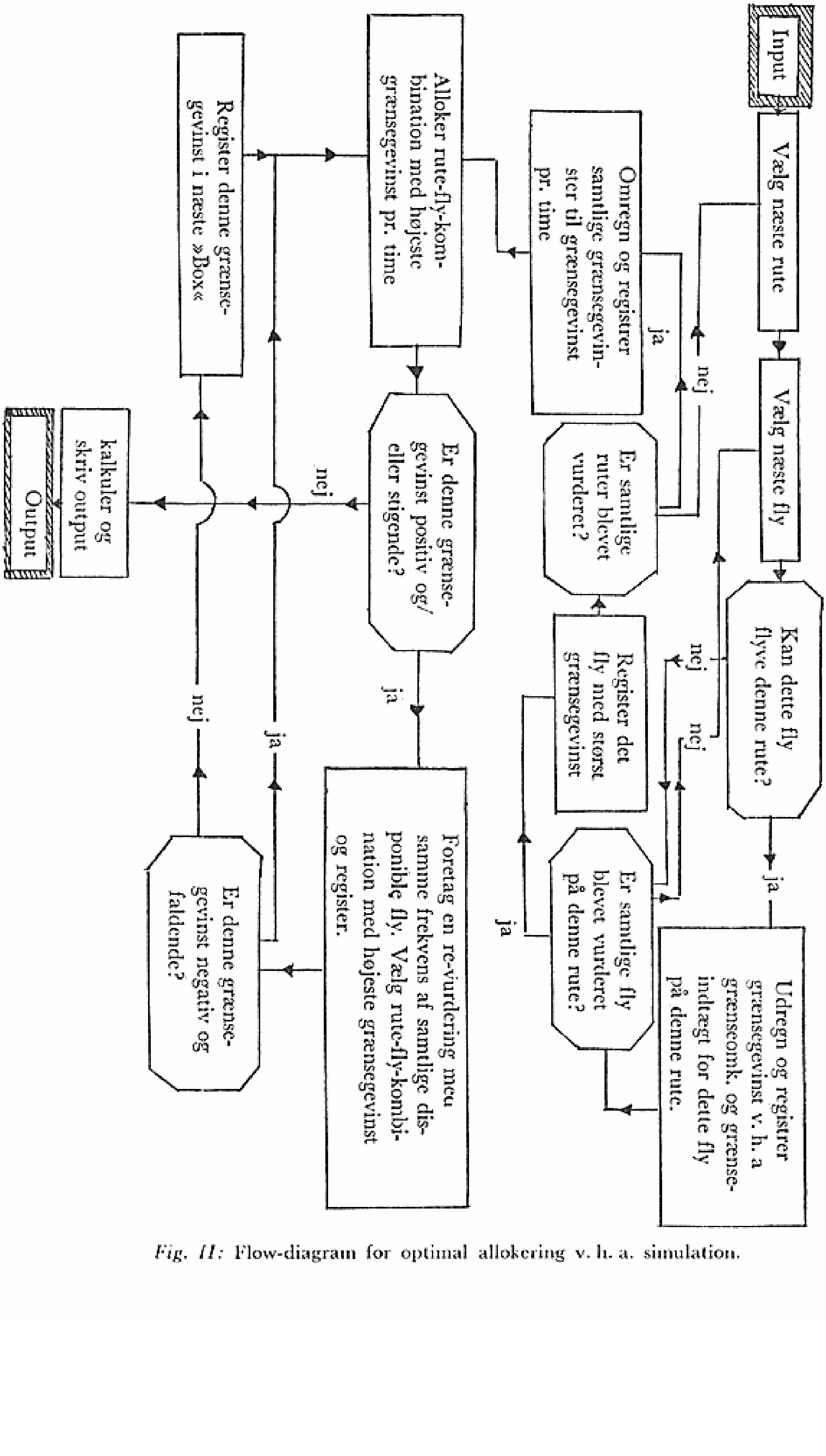


*Fig. II:* Flow-diagram for optimal allokering v. h. a. simulation.

sagerer, der kommer først (reserverer først). Denne prioriteringsproblematik har stor økonomisk betydning. Den kan principielt løses. Man kommer her bl. a. ind i komplicerede kømodeller.

De betragtninger, der blev gjort gældende vedr. de potentielle muligheder for lineær programmering, kan også gøres gældende ved simulation. Vi skal derfor ikke gentage de forhold.

Det skal dog bemærkes, at herudover kan simulationsmodellen tage hensyn til evt. uligevægt i den retningsbestemte efterspørgsel. Endvidere kan post- og fragttrafikken indbygges samt en række andre faktorer.

I et senere kapitel foretages der en sammenligning mellem lineær programmering og simulation.

## V. *Måling.*

### 5–1 *Måleproblemet. Hvor kritisk er optimalpunktet?*

Hidtil har analysen været baseret på den forudsætning, at værdierne af de kontrollerbare og ikke-kontrollerbare variable var kendte. Vi vil nu rejse spørgsmålet, om beslutningstager virkelig har mulighed for at kende disse værdier. Måleproblemet drejer sig om måling af omkostninger (d. v. s. $k_{ij}$) og efterspørgsel (d. v. s. $e_j$, $s_{hj}$ og $e_{hj}$). Øvrige variable og konstanter i modellerne er ikke forbundet med måleproblemer.

Virksomhedens afsætning forudsættes fastsat med en bestemt markedsandel v. h. a. usikkerheds-, risiko- og spilmodeller. I forbindelse med måleproblemet er det naturligt at spørge, hvor afgørende det er, at vi lige netop finder optimalpunktet. De krav, vi stiller til vore målemodeller, vil afhænge af, hvor kritisk optimalpunktet er. Hvis systemets effektivitet kun påvirkes relativt lidt på grund af difference mellem de faktiske og prognosticerede værdier, så vil vore krav til målemodeller være mindre, end hvis systemets effektivitet påvirkes relativt meget. En sådan sensitivitetsanalyse kan meget let gennemføres i allokeringsmodellerne. Den bør gennemføres, før man tager stilling til valg af målemodeller. Resultatet af sensitivitetsanalysen er delvis afgørende for, hvor præcise vore målemodeller skal være. Der må tages hensyn til omkostningerne ved at opnå denne information (præcision). Det gælder helt generelt, at værdien af marginal information (præcision) skal være større end de omkostninger, der er forbundet med at opnå denne præcision.

### 5–2 *Måling af omkostninger.*

Det, vi søger at måle, er de omkostninger, der varierer i. f. t. vor allokering. Det er de omkostninger, som varierer (såvel opad som nedad) ved indsættelse af 1 enhed af flytype ($i$) på rute ($j$). Vort måleproblem går ud på at finde de direkte variable omkostninger. På grund af måleproblemerne beskæftiger man sig, som næsten altid, med de direkte omkostninger i stedet for særomkostningerne. Det er dog klart, at i de tilfælde, hvor man kan konstatere en virkning på de indirekte omkostninger, bør der tages hensyn hertil.

Der skal ikke gås i dybden med omkostningsklasifikation og omkostningsmodeller. Vi skal blot gøre opmærksom på, at man indenfor rimelige konfidensintervaller er i stand til at måle de omkostninger, vi skal bruge som input i vore allokeringsmodeller, d. v. s. $k_{ij}$. Af disse kan bl. a. nævnes The Society of British Aircraft Constructors[7]), Magnar Henriksen[8])[9]) samt Air Transport Association[10]).

## 5–3 *Måling af efterspørgselen.*

### 5–3–1 *Korttids-prognoser.*

Vort problem er at måle efterspørgselen. Afsætningen forudsættes fastsat med en bestemt markedsandel.

Generelt kan man sige, at jo kortere prognoseperiode, jo mere præcis har prognosen mulighed for at blive. Ved korttids-prognoser kan man indenfor rimelige konfidensintervaller prognosticere efterspørgselen ved hjælp af antal reservationer på prognosetidspunktet samt oplysning om konsumenternes adfærd m. h. t. reservation fra tidligere perioder. Man kan

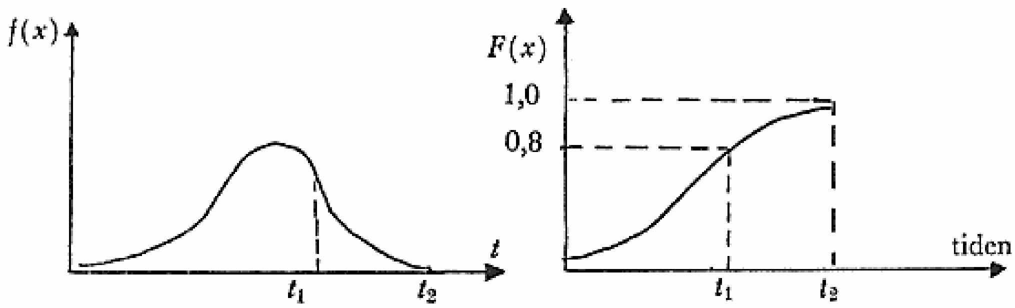


*Fig. III:* Tæthedsfunktionen $f(x)$ og den kumulative sandsynlighedsfunktion $F(x)$ for antallet af reservationer.
$t_1$ = prognosetidspunkt, $t_2$ = afrejsetidspunkt.

7) Standard Method for the Estimation of Direct Operation Costs of Aircraft: The Society of British Aircraft Constructors.

8) Magnar Henriksen: Kostnader ved nye flyruter i Nordnorge. Transportøkonomisk Udvalg. Kjelsås 1963.

9) Magnar Henriksen: Kostnadsanalyse ved flydrift. Transportøkonomisk Udvalg. Kjelsås 1962.

10) Operations Research 1964, nr. 2, pag. 220.

med andre ord finde tæthedsfunktionen og den kumulative sandsynligheds-funktion hhv. $f(x)$ og $F(x)$, hvor $x$ er lig antallet af reservationer. Disse korttidsprognoser har speciel relevans m. h. t. allokering. Efterspørgselen er stokastisk.

5–3–2 *Korrellationsanalyse.*

Den enkleste form for korrellationsanalyse er simpel korrellation, hvor der kun indgår 1 exogen variabel, jfr. f. eks. 5–3–1. Herunder hører extrapolation, hvor tiden er exogen variabel. Der skelnes mellem lineær-, exponential- og logistisk extrapolation. Extrapolationsmetoden bør som hovedregel benyttes i forbindelse med andre prognosemetoder. Beslutningstager må selv vælge sin extrapolationskurve på basis af en vurdering. Metoden er relativ subjektivt præget.

Et af problemerne ved at prognosticere efterspørgselen i den internationale luftfart er, at konsumenterne på en rute ikke er defineret rent geografisk. Der er transitpassagerer, som kan stamme fra mange forskellige områder. Antallet af rejsekombinationsmuligheder på det internationale rutenet er uendelig stort. Man kan benytte mange forskellige rejsekombinationsmuligheder for at nå et givet mål. Derfor kommer der en omfattende transittrafik, som besværliggør og undertiden umuliggør en prognose.

Gunn[11]) har formuleret en prognosemodel, hvor efterspørgselen på en rute, ceteris paribus, er en funktion af frekvensen, perioden og konsumenternes tidsmæssige villighed til at fremskynde eller udsætte deres afrejse. Kurven ($e$) i fig. IV viser funktionssammenhængen mellem efterspørgselen og frekvensen. Der er tale om en degressiv funktion. Kurven nærmer sig asymptotisk en øvre grænseværdi ($y_1$). Dette fortolkes således, at når frekvensen har nået et vist stade, vil en yderligere frekvensforøgelse ikke forårsage nogen stigning i efterspørgselen. ($y_1$) kan opfattes som efterspørgsel ved ubegrænset kapacitet eller »potentiel« efterspørgsel. Efterspørgselen er stokastisk, hvilket er udtrykt i kurverne ($e+o$) og ($e-o$) samt det skraverede felt.

Kurvens form afhænger af begrebet »tidsbegrænset« efterspørgsel. Den er forskellig fra rute til rute. På en rute København–Malmö vil den »tidsbegrænsede« efterspørgsel måske være 2 timer, medens den på ruten København–New York måske er 24 timer.

For et charterselskab er den »tidsbegrænsede« efterspørgsel måske ½ eller 1 uge. At den »tidsbegænsede« efterspørgsel f. eks. er 24 timer be-

[11]) Operations Research, vol. 12, no. 2, 1964, pag. 209 ff.

tyder, at konsumenterne er villige til maximalt at udskyde eller fremskynde deres afrejse 24 timer. Konsumenterne vil benytte alternative transportmidler, såfremt denne grænse overskrides, afhængig af den tid, det tager at nå frem med disse transportmidler. Det ses, at frekvensen netop er udtryk for, hvor lang tid en vilkårlig passager må fremskynde eller udsætte sin afrejse. Frekvensen er jo udtrykt pr. tidsenhed. Jo større den »tidsbegrænsede« efterspørgsel er, jo hurtigere vil kurven ($e$) nå sit maximum. Såfremt den »tidsbegrænsede« efterspørgsel derimod er relativ kort, skal der indsættes en relativ stor frekvens, før man har nået rutens potentielle efterspørgsel. Den »tidsbegrænsede« efterspørgsel må fastlægges for hver rute på basis af empiriske undersøgelser over konsumenternes adfærd.

Grafisk har Gunn's model følgende udseende:

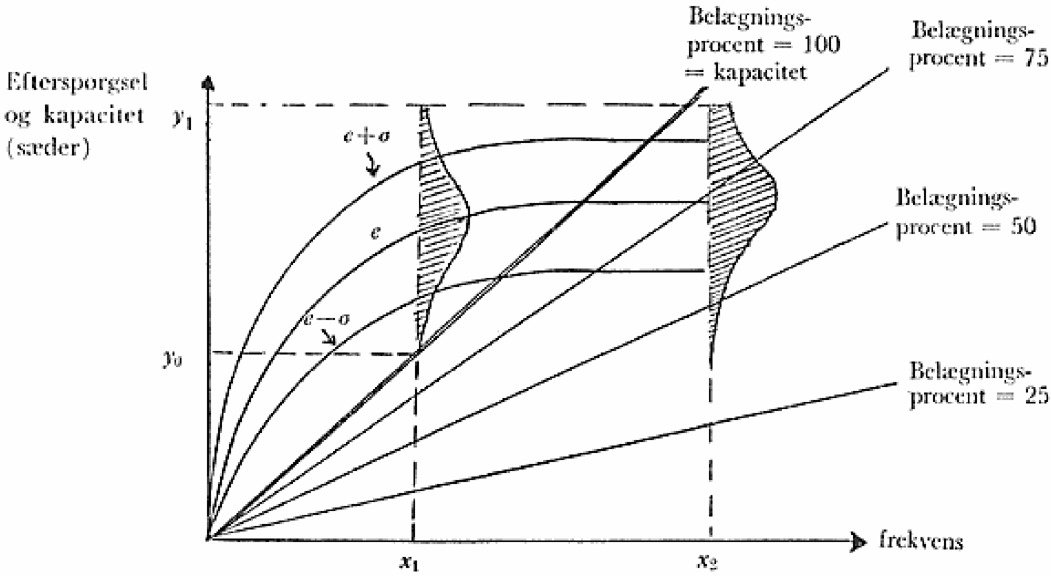


*Fig. IV.* Sammenhængen mellem frekvens, efterspørgsel, kapacitet og belægningsprocent.

I fig. IV er endvidere indtegnet kapaciteten, som er en lineær funktion. Kapaciteten er lig 100 % belægning. På basis heraf kan man uden vanskeligheder indtegne alternative belægningsprocenter. Kapacitetskurven vil være forskellige fra flytype til flytype, man kan f. eks. konstatere, at ved frekvensen $x_1$ er sandsynligheden = 1 for at opnå 100 % belægning. Ved frekvensen $x_2$ er sandsynligheden ca. = 1 for at belægningsprocenten skal være 50 o. s. v. Det vil hurtigt ses, at man på basis af disse oplysninger kan finde grænseindtægten og grænseomkostningerne og hermed grænsegevinsten. Dette er nøjagtigt det input, vi behøver til simulationsmodellen.

Det skal bemærkes, at modellen er en korttidsmodel, som navnlig er anvendelig til allokering. Til investering og valg af rutenet må der tages hensyn til væsentlige ændringer i efterspørgselsdeterminanterne, f. eks. prisændringer o. l. Sådanne ændringer medfører f. eks., at kurven $(e)$ forskydes opad. Kurvens form kan evt. også ændres. Den potentielle efterspørgsel $(y_t)$ kan enten forskydes opad eller nedad.

Det skal bemærkes, at det interessante ved modellen er den helt fundamentale idé, at efterspørgselen efter transport bl. a. er en funktion af tidspunktet og tidsrummet.

Det skal tilføjes, at i en model formuleret af SAS[12], har man fundet samme principielle funktionssammenhæng mellem efterspørgselen og frekvensen, omend man har benyttet en anden fremgangsmåde.

### 5–3–3 *Andre prognosemetoder.*

Af andre prognosemetoder skal kort nævnes den metode, som går ud på at prognosticere rejsehyppigheden pr. konsumentenhed, hvor disse er stratificeret efter en række kriterier[13]). Endvidere findes der tyngdekraftmodellerne[14]).

Andre prognosemetoder støtter sig til analogier fra andre lande, vurdering af branchekyndige, undersøgelser over konsumenternes købsplaner[15]) samt korrellationsanalyser mellem antal telefonopringninger og efterspørgselen[16]). Endelig må nævnes Björkman's model[17]).

Ved prognosticering af nye ruter opstår der et særligt problem med at vurdere den nye rutes substitutions- og komplementaritetsvirkning i forhold til selskabets øvrige ruter. Det samme gælder ved nedlæggelse af ruter.

Uanset hvilken prognosemetode man benytter, vil prognosen være subjektiv præget.

12) Magnar Henriksen: Kapacitetsudbud og etterspörsel i Transportsektoren. Erhvervsøkonomisk Tidsskrift nr. 4, 1966.

13) Se f. eks. The Port of New York Authority: Forecast of the Overseas Air Passenger Market through New York 1965–75.

14) Se f. eks. Walter Isard: Methods of Regional Analysis. An Introduction to Regional Science. MIT 1966.

15) Se f. eks. Joel Dean: Managerial Economics, pag. 164, N. J. 1962.

16) Bjørn Elle: The Interplay between Supply and Demand in Air Transport. Linköping 1962.

17) Ingeniøren, International Edition, vol. 5, pag. 31. T. Rallis: Airport Traffic Forecasting.

Det skal tilføjes, at erfaringerne viser, at mulighederne for at prognosticere chartertrafikken er større end for rutetrafikken, bl. a. fordi der er begrænsede rejsekombinationsmuligheder i den internationale chartertrafik.

Konklusionen munder ud i, at for korttids-prognoser er det muligt at måle/prognosticere efterspørgselen indenfor visse rimelige konfidensintervaller. For langtidsprognoser er der, uanset hvilken prognose der benyttes, tale om mere subjektive prognoser. I næste kapitel skal vi vurdere konsekvensen af dette for vore optimeringsmodeller.

## VI. *Afsluttende vurdering af de opstillede modeller.*

### 6–1 *Konsekvensen af måleproblemerne.*

På baggrund af måleproblemerne må vi forlade ordet optimering til fordel for satisfiering. Man kan dog diskutere, om der ikke er tale om optimering under begrænset viden. Måleproblemerne medfører 2 kritikpunkter mod lineær programmering.

For det første tager lineær programmering ikke hensyn til, at efterspørgselen bl. a. er en funktion af frekvensen. Efterspørgselen var jo givet som input og blev ikke ændret p. g. a. allokeringen (frekvensen). Dette er en væsentlig indvending mod modellen. Problemet kan dog principielt løses v. h. a. dynamisk programmering. Det er dog givet, at det er en vanskelig tilgængelig metode. Simulationsmodellen har her en væsentlig og måske afgørende fordel frem for lineær programmering.

Et andet kritikpunkt mod lineær programmering er, at omkostningerne ikke indgår som en funktion af bl. a. passagerantallet. Problemet kan dog principielt løses v. h. a. dynamisk programmering. Ligeledes her har simulation et fortrin frem for lineær programmering, idet simulation har taget hensyn til dette forhold.

For allokeringsmodellerne medfører måleproblemerne i. f. m. efterspørgselen, at allokeringsperioden bør være så kort som mulig. Vi konstaterede jo tidligere, at korttidsprognoserne var de mest præcise. Jo mere præcis målingen er, jo bedre er allokeringen. Der er dog praktiske grænser for, hvor kort allokeringsperioden kan være. Da passagererne har præferencer for flytyperne og deres hastighed (d. v. s. afgangs- og ankomsttidspunkt), kan man ikke altid, af gode grunde, uden videre ændre allokeringen fra salgstidspunktet til afgangstidspunktet. Dette gælder sandsynligvis i størst omfang for ruteselskabernes vedkommende. Allokeringsperioden bør altså være så kort som mulig. Den bør dog ikke være kortere end dens meromkostninger berettiger til. Der bør tages hensyn til de meromkostninger, der knytter sig til en allokering.

Måleproblemerne får størst betydning for investering samt valg af rutenet. Disse beslutninger er langtidsprægede. Efterspørgselsprognoserne er mest subjektive, d. v. s. upræcise, jo længere prognoseperioden er. Konsekvensen af dette er, at beslutningstager må stille sig selv følgende spørgsmål: Hvilken efterspørgsel er jeg sikker på at opnå på de forskellige ruter, d. v. s. hvilket minimum vil efterspørgselen antage indenfor de opstillede sandsynlighedskrav? Dette kan konstateres ved sammenligning mellem de forskellige prognosemetoders resultater. Prognoserne er næppe mere subjektive, end at de kan give os denne information. Såfremt beslutningstager benytter disse efterspørgselsdata som input i lineær programmering og simulation, har han et sikkert beslutningsgrundlag. Han kan være sikker på, at han i hvert fald opnår den gevinst, som de to modeller vil vise. Beslutningstager løber stort set ingen risiko ved sin beslutning, indenfor visse sandsynlighedskrav.

Beslutningstager har dog mulighed for at opnå større gevinst. Det kan imidletid kun ske på betingelse af, at han vil løbe risikoen for at træffe forkerte beslutninger og dermed risikere mindre gevinst end ovenfor. Dette kan ske ved at beslutningstager indsætter højere efterspørgselsdata i de to modeller end minimumsprognoserne viser. Han har en vis chance for, at efterspørgselen antager disse værdier, men han løber samtidig risikoen for at træffe en forkert beslutning, såfremt efterspørgselen faktisk bliver mindre. Det vil således ses, at beslutningsgrundlagets grad af sikkerhed ligger i efterspørgselstallene. Denne sikkerhed må fastsættes af beslutningstager selv. Såfremt han er en forsigtig natur, vil han vælge minimumsprognoserne. Såfremt han er en »spillernatur«, vil han vælge højere efterspørgselstal. Konklusionen bliver, at på trods af de subjektive prognoser kan vi stadig benytte lineær programmering og simulation.

### 6–2 *Er problemstillingen og problemløsningen tilfredsstillende?*

Ved hjælp af lineær programmering og simulation har vi løst problemet ved at finde, hvilke fly, og hvor mange, der skulle anskaffes og beflyve hvilke ruter. Vi har også taget stilling til, hvor ofte de pågældende ruter skulle beflyves. Dette er udtrykt gennem frekvensen.

Tilbage står dog spørgsmålet, hvornår og i hvilken rækkefølge de enkelte fly skal allokeres rent tidsmæssigt, når dette skal ske med lavest mulige omkostninger. Dette problem er der ikke taget stilling til. Problemet kan uden vanskeligheder løses selvstændigt v. h. a. sekvensmodeller og evt. transportmetoden i lineær programmering. Når man imidlertid samtidig skal løse såvel et allokeringsproblem som et sekvensproblem, bliver der tale om et meget kompliceret problem, som vi ikke har nogen generel løsning på. Det, der reelt er sket i vore allokeringsmodeller, er, at vi har forudsat, at et fly kunne tilvejebringes øjeblikkeligt uden omkostninger. Vi har forudsat, at der hverken var tidsmæssige eller geografiske hindringer for tilvejebringelse af flyet. Det har været forudsat, at et fly øjeblikkeligt kunne skaffes til veje uden omkostninger, selv om det i en tidligere periode måske var allokeret på en anden og evt. fjerntliggende rute.

Om dete problem udtaler Gunn[18]):

> "The problem of optimizing under restraints of aircraft positioning, taking into account time-of-day effects and generally returning the system to its original status at the beginning of each scheduling period, does appear to be formidable."

Om samme problem anfører A. M. Lee, specielt med henblik på lineær programmering[19]):

> "Indeed, any mathematical treatment of the scheduling problem ... would be immensely complicated."

Det kan tilføjes, at Stanford Research Institute[20]) har udarbejdet en simulationsmodel for allokering af fragtfly. Problemstillingen er dog nogenlunde den samme som i denne artikel, blot mindre kompliceret. I denne simulationsmodel har man ligeledes forudsat, at flyene kunne tilvejebringes øjeblikkeligt og uden omkostninger, idet det anføres[21]):

> "In the model, the logic for routing the transport aircraft assumes that the aircraft engaged in shuttling movements, i. e. they always return to their original loading point for possible reloading after they have been unloaded at their destination ... By restricting transport aircraft movements to shuttling movements, an important simplification occurs."

Dette er i realiteten den samme forudsætning, som er anvendt i nærværende artikel.

W. Lampkin og P. D. Saalmans[22]) har i en simulationsmodel beskæftiget

18) Operations Research, nr. 2, 1964, pag. 229.

19) Proceedings of the 3rd International Conference on Operational Research. Oslo 1963, London 1964, pag. 929.

20) D. A. D'Esopo, H. L. Dixon and B. Lefkowitz, Stanford Research Institute: A Model for Simulating an Air-Transportation System. Naval Research Logistics Quarterly, vol. 7, nr. 3, Sept.-60, pag. 213–220.

21) Se 20, pag. 215.

22) W. Lampkin and P. D. Saalmans: The design of routes, service frequencies and schedules for a municipal bus undertaking. A case study. Operations Research Quarterly, vol. 18, nr. 4.

sig med et noget tilsvarende problem. For et lokalt busselskab i Nord-England har de bl. a. 1) valgt rutenet, 2) fundet frekvens på disse ruter, 3) udfærdiget køreplaner og 4) allokeret busser tidsmæssigt i denne køreplan m. v. De fundne resultater kan ikke overføres direkte. Bus-caset er simplificeret i. f. t. problemstillingen i nærværende artikel. Imidlertid er modellen et vigtigt led i den søge-lære-proces, man skal igennem for at løse problemet.

Konklusionen munder ud i, at vi må opretholde forudsætningen i såvel lineær programmering som simulation om, at flyene kan tilvejebringes øjeblikkeligt uden omkostninger. Dette er en begrænsning i modellen. I hele denne problemstilling ligger en interessant forskningsopgave. Det er givet, at en løsning ligger i anvendelse af simulation og ikke lineær programmering.

Spørgsmålet er imidlertid, hvor væsentlig forudsætningen er. Det afgørende her er rutenettets udseende.

For de fleste charterselskabers vedkommende er det interessant at bemærke, at de har et stjerneformet rutenet. Dette betyder, at flyene altid vender tilbage til samme udgangsbase. Når det er tilfældet, har det i realiteten ikke nogen betydning, at man forudsætter, at et fly kan tilvejebringes øjeblikkeligt og uden omkostninger. Sekvensproblemet har således i realiteten ikke nogen betydning for charterselskabernes vedkommende.

For ruteselskabernes vedkommende har sekvensproblemet derimod ofte relevans, idet rutenettet som oftest ikke er stjerneformet. Jo mindre rutenettet minder om et stjerneformet rutenet, jo større betydning har forudsætningen, alt andet lige. Det er dog ikke nødvendigvis på forhånd givet, at forudsætningen har stor betydning.

### 6–3 *Sammenligning mellem Simulation og Lineær programmering.*

Simulation kan løse de samme problemer som lineær programmering. Imidlertid kan lineær programmering ikke løse de samme problemer som simulation. Simulation kan løse væsentlig mere komplicerede problemer (og realistiske) end lineær programmering.

Fordelen ved simulation frem for lineær programmering er, at:

1) simulation tager hensyn til, at efterspørgselen bl. a. er en funktion af frekvensen,

2) simulation tager hensyn til, at omkostningerne bl. a. er en funktion af antal passagerer,

3) simulation kan udbygges til at tage hensyn til one-stop-ruter, two-stop-ruter m. v.,

4) simulation formodes at rumme potentielle muligheder for at løse problemerne vedr. forudsætningen om, at flyene kan tilvejebringes øjeblikkeligt og uden omkostninger (sekvensproblemet),

5) simulation tager hensyn til et hvilket som helst omkostningsforløb. Lineær programmering tager kun hensyn til lineære omkostningsforløb samt tilnærmelsesvis lineære kurver (konveks/konkav).

Lineær programmering kan principielt løse pkt. 1) og 2), men kun v. h. a. en vanskelig tilgængelig metode (dynamisk programmering). Punkt 3), 4) og 5) kan næppe løses v. h. a. lineær programmering. Til ruteselskaber kan vi derfor kun anbefale simulationsmodellen. Til charterselskaber kan vi ligeledes anbefale simulation. Vi kan dog også anbefale lineær programmering til charterselskaberne. Det forudsætter dog, at punkt 2) og 5) ovenfor ikke har væsentlig betydning i det pågældende selskab.

## VII. *Konklusion.*

Af det foregående vil være fremgået, at vi v. h. a. de opstillede modeller er i stand til at finde optimal rutestruktur, ud fra de anførte forudsætninger.

Modellernes målsætnings-, aktivitets- og informationsafbildning af virkeligheden medfører dog, at man kan diskutere, om der er tale om optimering under begrænset viden eller satisfiering.

Konklusionen munder ud i, at de opstillede modeller er et middel til at træffe bedre beslutninger i et luftfartsselskab gennem planlægning og kontrol.

*Referencer:*

(1) Dantzig: Linear Programming and Extensions. Princeton 1963.

(2) Dean, Joel: Managerial Economics. N. J. 1962.

(3) Econometrica 1953, pag. 193.

(4) Elle, Bjørn: The Interplay between Supply and Demand in Air Transport. Linkjöbing 1962.

(5) Ferguson & Dantzig: The problem of routing aircraft. Aero Engine Review 1955, nr. 14.

(6) Henriksen, Magnar: Kapacitetsudbud og efterspörsel i Transportsektoren. Erhvervsøkonomisk Tidsskrift nr. 4, 1966.

(7) Henriken, Magnar: Kostnader ved nye flyruter i Nordnorge. Transportøkonomisk Udvalg. Kjelsås 1963.

4) simulation formodes at rumme potentielle muligheder for at løse problemerne vedr. forudsætningen om, at flyene kan tilvejebringes øjeblikkeligt og uden omkostninger (sekvensproblemet),

5) simulation tager hensyn til et hvilket som helst omkostningsforløb. Lineær programmering tager kun hensyn til lineære omkostningsforløb samt tilnærmelsesvis lineære kurver (konveks/konkav).

Lineær programmering kan principielt løse pkt. 1) og 2), men kun v. h. a. en vanskelig tilgængelig metode (dynamisk programmering). Punkt 3), 4) og 5) kan næppe løses v. h. a. lineær programmering. Til ruteselskaber kan vi derfor kun anbefale simulationsmodellen. Til charterselskaber kan vi ligeledes anbefale simulation. Vi kan dog også anbefale lineær programmering til charterselskaberne. Det forudsætter dog, at punkt 2) og 5) ovenfor ikke har væsentlig betydning i det pågældende selskab.

## VII. *Konklusion.*

Af det foregående vil være fremgået, at vi v. h. a. de opstillede modeller er i stand til at finde optimal rutestruktur, ud fra de anførte forudsætninger.

Modellernes målsætnings-, aktivitets- og informationsafbildning af virkeligheden medfører dog, at man kan diskutere, om der er tale om optimering under begrænset viden eller satisfiering.

Konklusionen munder ud i, at de opstillede modeller er et middel til at træffe bedre beslutninger i et luftfartsselskab gennem planlægning og kontrol.

*Referencer:*

(1) Dantzig: Linear Programming and Extensions. Princeton 1963.

(2) Dean, Joel: Managerial Economics. N. J. 1962.

(3) Econometrica 1953, pag. 193.

(4) Elle, Bjørn: The Interplay between Supply and Demand in Air Transport. Linkjöbing 1962.

(5) Ferguson & Dantzig: The problem of routing aircraft. Aero Engine Review 1955, nr. 14.

(6) Henriksen, Magnar: Kapacitetsudbud og efterspörsel i Transportsektoren. Erhvervsøkonomisk Tidsskrift nr. 4, 1966.

(7) Henriken, Magnar: Kostnader ved nye flyruter i Nordnorge. Transportøkonomisk Udvalg. Kjelsås 1963.

(8) Henriksen, Magnar: Kostnadsanalyse ved Flydrift. Transportøkonomisk Udvalg. Kjelsås 1962.

(9) Isard, Walter: Methods of Regional Analysis. An Introduction to Regional Science. MIT 1966.

(10) Lampkin, W. and P. D. Saalmans: The Design of Routes, Service, Frequencies and Schedules for a Municipal Bus Undertaking. A case study. Operations Research Quarterly, vol. 18. No. 4.

(11) Operations Research. March–April 1964, No. 2, Vol. 12: Airline System Simulation.

(12) Port of New York Authority, the: Forecast of the Overseas Air Passenger Market through New York 1965–1975.

(13) Proceedings of the 3rd International Conference on Operational Research. Oslo 1963. (London 1964).

(14) Rallis, T.: Airport Traffic Forecasting. Ingeniøren, International Edition, vol. 5.

(15) Roepstorff, Torben Michael: En analyse af et udsnit af tilgængelige modeller som disponeringsgrundlag for internationale luftfartsselskabers fastlæggelse af passagertrafikken. (Cand.-merc.-hovedafhandling, Handelhøjskolen i København, marts 1968. Økonomisk-statistisk faggruppe).

(16) Society of Britich Aircraft Constructors: Standard Method for the Estimation of Direct Operation Costs of Aircraft.

(17) Vajda, S.: Readings in Mathematical Programming. London 1962.