

# Matematisk programmering i økonomien belyst ved fysiske analogier.

Af OLE IMMANUEL FRANKSEN\*)

De økonomiske problemer, hvis løsning søges bestemt ved matematisk programmering, må i princippet formuleres som deterministiske modeller. Økonomisk realitet kræver imidlertid, at der i modellerne tages hensyn til problemernes grundlæggende statistiske natur. Én af de fremgangsmåder, der i dag i førende amerikansk og engelsk økonomisk forskning anses for mest lovende i så henseende, er udvidelse af de deterministiske modellers størrelsesmæssige omfang. Mere konkret søger man at udvikle specielle makrosprog for datamaskiner, således at disse på en for brugeren simpel måde kan benyttes til at løse systemer med i størrelsesordenen tusinde ubekendte.

En sådan fremgangsmåde stiller helt ændrede krav til formuleringen af de grundlæggende begreber og den teoretiske struktur, der knytter dem sammen. De seneste års økonomiske forskning har derfor været præget af en stadig voksende tendens i retning af en udnyttelse af de i ingeniørvidenskaberne – og her specielt den elektrotekniske – opnåede resultater.

Herhjemme kan denne tilnærmelse mellem økonometri og ingeniørvidenskaber føres tilbage til Ivar Jantzen's banebrydende arbejde fra 1923. Den foreliggende artikel tager sigte på at videreføre denne tradition, idet hovedvægten er lagt på en fremstilling af de begrebsmæssige forhold, der betinger en datamatisk løsning af ovenfor skitserede problemer.

## *Introduktion*

Erkendelse af analogier mellem forskellige faggrene eller omformulering af teorier ved udnyttelse af duale aspekter har medført nogle af de mest bemærkelsesværdige fremskridt i videnskabens historie. Fra den individuelle disciplins synspunkt hidrører fastlæggelsen af en analogi eller en dual fra en erkendelse af en strukturel symmetri i den teoretiske formulering af det aktuelle problem. Matematisk er begreberne en analogi og en dualitet nært tilknyttet de gruppeteoretiske begreber isomorfi og automorfi.

\*) lektor, lic. techn., Stærkstrømsafdelingen, Danmarks tekniske Højskole, Lyngby. Manuskript august, 1967.

Matematisk programmering blev, i sin oprindelige form af aktivitetsanalyse, udviklet som en kvantitativ generalisering af Walras' økonomiske ligningssystem. Matematikere og i særlig grad elektroingeniører har ofte bestræbt sig på at formulere elektriske netværksmodeller af økonomiske problemer. P. O. Pedersens model af en produktionsfunktion fra 1935 er et typisk forsøg. Andre eksempler er Koopmans og Reiter's (Koopmans, 1951), Enke's (Enke, 1951), Tustin's (Tustin, 1957) og Dennis' (Dennis, 1959). Et fælles karaktertræk for alle disse arbejder er, at de elektriske netværksanalogier fremkommer ved en heuristisk undersøgelse af ligningerne for de individuelle økonomiske modeller. Formålet med denne artikel er (1) at opstille en analogi mellem de grundlæggende love for fysik og økonomi og (2) at bruge denne grundlæggende sammenhæng til at etablere en elektrisk analogi af Walras' system og dermed af det matematiske programmeringsproblem.

#### *Det økonomiske produktionsproblem*

Fra det økonomiske synspunkt er det et af de alvorligste kritikpunkter ved den matematiske programmeringsmodel af Walras' system, at den udover muligheden for koefficientvariationer (d. v. s. parametrisk programmering) ikke sikrer substitutionalitet. Imidlertid er det, som Ivar Jantzen understregede i sit grundlæggende arbejde fra 1924 (se også: Jantzen 1939 og 1954; Brems 1952 a og b), meget mere realistisk at erstatte den konventionelle økonomiske produktionsanalyse med en formulering i to trin.

Det første, *valg af teknik*, er det heuristiske problem at etablere de kausale logisk-fysiske og tidsmæssige forbindelser, som for den aktuelle produktion specificerer sammenhængen mellem produktionsfaktorerne og aktiviteterne: nemlig de tekniske koefficienter, udbudskurver for produktionsydelser og efterspørgselskurver. Dette er et typisk åbent konstruktionsproblem, for hvilket en optimal løsning *ikke* kan defineres. Alle ændringer i den ovenfor specificerede systemkonfiguration opfattes som valg af en ny teknik. Dette betyder, at man i stedet for at substituere produktionsfaktorer og definere tekniske koefficienter som specificerede funktioner af faktorpriserne erstatter én specifik systemkonfiguration eller teknik med en anden. Udover at være nær normal ingeniørmæssig praksis, har denne formulering den yderligere fordel, at alle forhold, der medfører stigende udbytte, når der ses bort fra virkningen af disses udelelighed, er indbefattet i substitueringen af teknik. Dette er den grundlæggende tanke, der ligger bag Jantzen's *højere tekniks lov* (Schneider, 1934; Zeuthen,

1955). Matematisk er fastlæggelsen af en teknik ud fra et regnemaskinemæssigt synspunkt nært tilknyttet simulationsprocesser. Det såkaldte *Planning-Programming-Budgeting-System* (PPBS), der er udviklet af USA's forsvarsministerium, er en anden systematisk formulering, der er tilknyttet fastlæggelsen af en teknik (Jackson og Reed, 1965).

Det andet trin, *optimal produktion med en given teknik*, er det analytiske problem at bestemme ekstremumstilstanden af en given produktions systemkonfiguration. Dette er et veldefineret matematisk problem, som kan formuleres i Walras' ligningssystem med limitationale produktionsfaktorer og faste tekniske koefficienter. Ser man bort fra begrebet udelelighed, giver denne model konstant eller aftagende udbytte. Problemet at fastlægge den optimale produktion med en given teknik kan således identificeres med en matematisk programmeringsmodel. For de tilfælde hvor der må tages hensyn til udelelighed, formulerede Jantzen i den berømte *harmonilov* (Jantzen, 1924) de karakteristiske egenskaber ved, hvad der senere er blevet kendt som den optimale løsning på heltalsprogrammeringsproblemet. I moderne vendinger kan denne lov udtrykkes: »Hvis en aktivitet i et produktionssystem er baseret på brugen af en række forskellige ikke fuldt delelige faktorydelser, opnås den mest harmoniske koordination (d. v. s. den størst mulige udnyttelsesgrad af alle de forskellige involverede ydelser) kun i de tilfælde, hvor antallet af enheder af produktet, der er resultatet af aktiviteten, er et fælles multiplum af ydelsernes til rådighed stående kapacitet, hver divideret med den faste tekniske koefficient«. Det skal her tilføjes, at Brems i sin diskussion af Jantzen's harmonilov (Brems, 1952 a) foregreb heltalsprogrammeringen ved at bruge diagrammer, der illustrerer helstalsgitterpunkter, d. v. s. punkter hvis koordinater er heltal.

I denne artikel skal vi alene beskæftige os med formuleringen af en given tekniks elektriske analogi, således at der, når der ses bort fra udelelighed, kan ske en fastlæggelse af den optimale produktion ved denne teknik som ekstremumstilstanden for analogmodellen.

### *De grundlæggende forudsætninger*

Det væsentligste kendetegn ved Walras' system er, at det er en makroskopisk dynamisk model af mikroskopiske statistiske fænomener. I fysik bliver lignende makroskopiske anvendelser af en dynamisk teori på mikroskopiske statistiske fænomener brugt ved formuleringen af termodynamiske problemer og i den elektriske netværksteori. Etableringen af en fysisk analog til Walras' økonomiske system må derfor begynde med en sammenligning mellem de fysiske og økonomiske sæt af statistiske forudsætninger.

En eksplicit erkendelse af et grundlæggende konsekvent sæt fysiske forudsætninger udvikledes i forbindelsen med undersøgelsen af materialers molekulære og atomistiske opførsel (Lindsay og Margenau, 1936; Callen, 1960). De økonomiske forudsætninger blev formuleret analytisk som et sæt ideelle betingelser, hvis opfyldelse betegnes som fuldkommen konkurrence (Zeuthen, 1955; Henderson og Quandt, 1958). En skematisk sammenligning kan opstilles på følgende måde:

Fysiske forudsætninger	Økonomiske forudsætninger
1a) Alle mikrotilstande hidrørende fra en given makrotilstand er lige sandsynlige. 1b) De mikroskopiske elementer er ikke til at skelne fra hinanden.	1a) Fri til- og afgang af firmaer til og fra markedet. 1b) Ingen aftaler, vedtægter og bestemmelser for firmaerne. 1c) Homogene produkter og tjenesteydelser.
2) Antallet af mikroskopiske elementer er stort.	2) Antallet af både firmaer og forbrugere er stort.
3) Den diskrete variation af de mikroskopiske elementer kan repræsenteres ved kontinuert varierede gennemsnit.	3) Den individuelle køber og sælger har ingen indflydelse på markedets priser og fysiske strømme.
4) Udbredelsestiden er så lille i forhold til varigheden af den enkelte proces fremkaldt af en ændring i omgivelserne, at systemet makroskopisk kan betragtes som et kontinuum.	4a) Simultane forløb, dvs. uendelig hurtig tilpasning for både information og fysiske strømme. 4b) Fuld delelighed.
5) Isoleret univers eller system.	5) Isoleret økonomisk system.

Det er indlysende, at det ikke er muligt at skabe en éntydig korrespondance mellem de to sæt forudsætninger. I det ovenstående skema er det snarere tiltænkt at samle de økonomiske forudsætninger i klasser med så

lille overlappning som muligt og derefter jævnføre hver af disse klasser med en af de fysiske forudsætninger. Forudsætningerne er søgt delt op på en sådan måde, at 1 og 2 refererer til tilfredsstillelsen af de probabilistiske postulater; 3 og 4 til gyldigheden af de direkte makroskopiske målinger som et kvalitativt udtryk for de statistiske fordelinger; og 5 til muligheden for ved hjælp af en invariant, additiv skalar (energi eller effekt) at kunne etablere en kvantitativ sammenhæng imellem det mikroskopiske og det makroskopiske synspunkt. Resultatet af denne fremgangsmåde giver, som det ses, en tilfredsstillende basis for skabelsen af en sammenhæng mellem fysikkens og økonomiens grundlæggende love.

### *De grundlæggende fysiske love*

Den grundlæggende teoretiske struktur, som klassisk mekanik, elektrisk netværksteori og termodynamik (eller mere korrekt, termostatik) bygger på, erkendes fra et makroskopisk synspunkt under de nævnte forudsætninger lettest ved at betragte termodynamikken. Her er hele teorien udviklet fra to grundlæggende love, der generelt kan udtrykkes som:

1. lov: Invariansprincippet
2. lov: Det statistiske strømretningsprincip.

Igennem hele fysikkens historie har de to mest diskuterede og kritiserede af de tidligere nævnte forudsætninger været den, der angår henholdsvis isolation, og udbredelsestid kontra procesvarighed. En undersøgelse af økonomisk litteratur viser, at disse to emner også indirekte ligger bag en række diskussioner indenfor dette område. Der vil derfor blive givet en kort gennemgang af disse to forudsætninger set i forhold til de ovennævnte to love.

Den tanke, at der *i et isoleret univers må være en invariant størrelse, foranderlig i form, men uforgængelig*, blev først erkendt i 1693 af Leibnitz i forbindelse med studiet af massepunkter i et almindeligt gravitationsfelt. Matematisk blev den invariante størrelse skildret som en additiv skalar størrelse, den såkaldte energi. Efterhånden som yderligere typer af fysiske systemer blev betragtet, viste det sig, at dette invariansprincip gentagne gange ikke passede. I hvert eneste tilfælde var det imidlertid muligt at genskabe det ved at addere et nyt matematisk udtryk, der blev opfattet som »energibidraget« fra den resterende, og indtil da, ukendte del af det isolerede univers.

Dybest set kan alle direkte fysiske målinger, i det mindste begrebsmæssigt, opløses i manipulationer eller operationer med to-terminal instrumenter. En særlig egenskab ved de direkte fysiske målinger er imidlertid, at de ikke kan foretages imellem systemer af forskellig fysisk art. For eksempel

eksisterer der ikke et instrument, hvis ene terminal kan forbindes til én af de elektriske klemmer på en elektromotor, samtidigt med at den anden forbindes til den mekaniske aksel. Invariansprincippet er derfor den eneste måde, hvorpå vekselvirkningen mellem sådanne systemer kan beskrives. Det matematiske udtryk for dette princip kan derfor betragtes som en tvangsbindingsligning mellem systemer af forskellig art. At dette virkelig er tilfældet illustreres ved, at den matematiske behandling af formeludtrykket for dette princip i fysikken er nært beslægtet med behandlingen af sættet af tvangsbindingsligninger i klassisk mekanik.

Udtrykt mere specifikt er energi potentialet for mekanisk arbejde. Principielt kan ethvert energiudtryk skrives som produktet af to størrelser, f. eks. kraft og forskydning. Vekselvirkningen mellem et arbitrært system og dets adskilte omgivelser, der tilsammen udgør et isoleret univers, bestemmes ved først at tage differentialen af invariansligningen, der, når der tages hensyn til fortegn, består af en sum af to produkter. Fra dette differential kan udskilles en undersum udelukkende bestående af de udtryk, der indeholder differentialerne til det udvalgte sæt af uafhængige parametre, der repræsenterer systemet og omgivelsernes uafhængige påvirkninger eller kilder. Hvis den udskilte undersum viser sig at være et totalt differential af en bestemt funktion, er der fundet en såkaldt tilstandsfunktion. I fysikken defineres en *tilstandsfunktion* som en enkelt-værdifunktion, der er afledt fra de grundlæggende naturlove, og hvis værdi på et givet tidspunkt udelukkende afhænger af systemets tilstand og ikke af forudgående hændelser. Til sammenligning bygger den klassiske mekaniske inddeling af tvangsbindingsligninger i holonome og ikke-holonome (dvs. integrable og ikke-integrable) på en lignende erkendelse af totale differentialer (Lanczos, 1949).

Det er et velkendt fænomen, at et energiudtryk i en tilstandsfunktion kan afhænge implicit af tiden. Således er kinetisk energi f. eks. en funktion af hastigheden, dvs. den tidsafledede af forskydningen. I den klassiske mekanik har megen diskussion imidlertid været koncentreret om muligheden for, at den totale energi skulle være eksplicit afhængig af tiden. I disse tilfælde vil energien naturligvis ikke bevares. Det blev derfor normalt antaget, at energiens tidsvariationer var af en sådan karakter, at der ved passende transformationer, der i princippet bestod af en addition af tiden  $t$  til de mekaniske variable, kunne defineres en ny invariansligning og dermed en ny tilstandsfunktion.

I den elektriske netværksteori afhænger energiomsætningen i kilder og dissipative elementer eksplicit af tiden. Af denne grund er invariansprincippet for elektriske netværk siden Maxwell (Maxwell, 1891) blevet an-

givet som effektudtryk, hvor effekten er den tidsafledede af energien. Det bemærkes, at effekt principielt defineres som produktet af to tidsafledede størrelser (f. eks. elektrisk strøm og spænding). Senere opdagedes det (Millar, 1951), at Maxwell's formulering kun gjaldt i det lineære tilfælde, og der blev derfor indført to nye »effekt«-tilstandsfunktioner, der er analoge med dem, der blev benyttet i klassisk mekanik. Disse to tilstandsfunktioner, »content« og »co-content«, vil blive defineret og brugt senere i denne artikel. Det vil på dette sted være tilstrækkeligt at nævne, at et stort flertal af de effektive, men fysisk set ofte vanskeligt forståelige, moderne netværksmetoder på simpel måde kan forklares ud fra disse to effektudtryk (Franksen, 1965).

Når invariansprincippet udtrykkes ved på den ene side energi og dennes tidsafhængighed og på den anden side sætningen om isolation, er det nært tilknyttet problemet omkring anvendelse af de ovennævnte tilstandsfunktioner til fastlæggelse af ligevægtstilstanden. De variable, der indgår i en tilstandsfunktion, er alle makroskopiske. Disse variable og den tilsvarende tilstandsfunktion er imidlertid kun defineret, hvis systemet mikroskopisk set er homogent, hvilket betyder, at det kontinuert ændres fra én mikroskopisk ligevægtstilstand til en anden. I hver mikroskopisk ligevægtstilstand vil systemets ydre påvirkninger ophæve hinanden, hvilket medfører, at systemet også makroskopisk vil være i ligevægt. Alt i alt vil en beskrivelse af et statistisk system udtrykt ved makroskopiske tilstandsfunktioner ske i form af en række ligevægtstilstande; om det er muligt elltr umuligt på denne måde at beskrive et statistisk system med en makroskopisk dynamisk teori udtrykt ved ligevægtstilstande afhænger af effektiviteten af overgangsmekanismen på det mikroskopiske eller atomistiske niveau. Den tidligere nævnte udbredelsestid er den karakteristiske overgangsegenskab i denne forbindelse.

Principielt er udbredelsestiden et mål for den tid det tager for systemet at gå fra én ligevægtstilstand til en anden for at tilpasse sig en ændring i omgivelserne. Udbredelsestiden er i virkeligheden en tidskonstant i betydning af eksponentiel afhængighed for udbredelsen på det mikroskopiske niveau. Derfor kan for et givet system med en given udbredelsestid kun ændringer, der finder sted over tidsrum, der er meget længere end udbredelsestiden, beskrives ved makroskopiske målinger som en række af ligevægtstilstande. På den anden side svarer ændringer, der sker i tidsrum, der er kortere end udbredelsestiden, til en række mikroskopiske uligevægtstilstande, for hvilke det ikke er muligt at definere meningsfyldte makroskopiske målinger.

Indenfor termodynamikken er udbredelsestiden så stor, at ændringerne

må ske »uendeligt langtsomt« for, at de kan defineres makroskopisk gennem ligevægtstilstande. Dette medfører, at systemet til ethvert tidspunkt er i en kvasistationær tilstand. Termodynamik er derfor i virkeligheden termostatik, i hvilken alle betragtede ændringer er kvasistatiske, forstået sådan, at de kan beskrives som en ordnet række statiske ligevægtstilstande, af hvilke ingen involverer hastigheder eller tid.

I den elektriske netværksteori er udbredelseshastigheden i modsætning til det ovenstående i størrelsesordenen lysets hastighed. Indenfor mange anvendelser kan man derfor benytte en repræsentation ved diskrete parametre med uendelig udbredelsestid i den aktuelle problemformulering. De involverede tilstandsfunktioner henføres alle til effekt (dvs. energiens ændringshastighed), hvis sum er nul for et netværk med diskrete parametre, når det opfattes som et isoleret system. Dette betyder, at netværket til ethvert tidspunkt er i en ligevægtstilstand karakteriseret ved opfyldelsen af Kirchhoff's love. Det understreges imidlertid, at ligevægtstilstandene ikke er statiske, men dynamiske stationære eller ekstremum tilstande. Ved at benytte effekt i stedet for energi i problemformuleringen er det dynamiske problem imidlertid reduceret til et statisk på en måde, der fuldstændig svarer til brugen af d'Alembert's princip i den klassiske mekanik. Dette betyder selvfølgelig ikke, at det dynamiske problem kan løses ved hjælp af statiske metoder. De dynamiske ligninger, der udtrykker den øjeblikkelige makroskopiske systemtilstand, er blot blevet udledt ved statiske ligevægtsbetragtninger.

Det bemærkes, at denne formulering udtrykt ved øjeblikkelige stationære tilstande *ikke* indebærer noget om systemets stabilitet i tid.

Betragter man den anden lov, det statistiske strømretningsprincip, skal det først understreges, at denne lov ikke er absolut sikker, men kun yderst sandsynlig. I termodynamikken fandt man, på grundlag af Joule's grundlæggende forsøg, at det for et isoleret system, hvis der er specificeret to tilstande, altid er muligt at forene dem gennem et antal mekaniske ændringer; men at det ikke altid er muligt at definere ændringer, der fører systemet både frem og tilbage. Denne eksperimentelt fundne asymmetri eller irreversibilitet, der er kendt som termodynamikkens anden hovedlov, har fået adskillige formuleringer. Den almindeligst brugte er sandsynligvis, at et isoleret systems entropi søger mod et maksimum. I denne artikel vil Clausius' formulering, der er langt mere anvendelig fra et interdisciplinært synspunkt blive benyttet. I almindelige vendinger kan anden lov udtrykkes: *en strøm løber kun fra højere til lavere potential.*

Som et eksempel på denne kvalitative, men éntydige lov betragtes friktionen i forbindelse med forskydningen af et mekanisk system. Ved for-



skydning afgives der energi på grund af friktionen, hvilket vil sige at energien fra en form (mekanisk energi) inkluderet i systemanalysen konverteres til en form (varme), der ikke er inkluderet i systemanalysen. Et fortegnsskifte for forskydningen vil ikke medføre fortegnsskifte for den dissipative energikonvertering. Ideelle kilder er dualer til dissipation, da energi her konverteres fra en form, der ikke er inkluderet i systemanalysen, til en form inkluderet i systemanalysen. Taget sammen er dissipation og kilder ensbetydende med en éntydig kausal orientering, som anden lov er et mere generelt udtryk for.

### *Måling og dertil knyttede begreber*

Principielt er økonomiske målinger orienteret mod en beskrivelse af psykologiens og sociologiens tidsafhængige biologiske fænomener. Behovstilfredsstillelse og lignende emner fra den økonomiske teori betragtes imidlertid som liggende uden for det nærværende interesseområde, hvorved dette begrænses til udelukkende at omhandle det tekniske-økonomiske problem at styre en produktion.

I denne forbindelse skelnes mellem to grundlæggende former for målinger: målinger af priser og målinger af mængdestrømme. Begge stammer fra den økonomiske teori for udbud og efterspørgsel, hvor, som det senere vil blive påvist deres indbyrdes afhængighed som påvirkninger på en produktion er givet i form af udbuds- og efterspørgselskurver. I denne forbindelse er det tilstrækkeligt at sige, at de er bestemt som øjebliksværdier.

Måling er den eneste forbindelse mellem den fysiske virkelighed og en hertil svarende teoretisk model. De teoretiske begreber, som kan henføres til hinanden ved hjælp af matematikens abstrakte regler, stammer således fra målinger. I fysikken gives de teoretiske begreber mening i forhold til virkeligheden ved at fortolke grundbegreberne repræsenterende målingerne på én af to forskellige måder. Begge afhænger af tid og sted, men adskiller sig ved at være orienteret mod målingens henholdsvis kvalitative og kvantitative egenskaber. Disse to synspunkter benævnes her det operationelle og det symbolske synspunkt.

Det *operationelle* synspunkt er karakteriseret ved, at de målte begreber gives mening ved at henføres til de veldefinerede manipulationer, der skal udføres af iagttageren for at gennemføre de tilsvarende målinger. Dette er ensbetydende med, at målinger kvalitativt klassificeres ved, at de fortolkes ud fra det sæt operationer, der udgør den aktuelle måleprocedure.

Principielt kan der, afhængigt af den måde hvorpå måleinstrumentet i det mindste begrebsmæssigt bruges, skelnes mellem to forskellige slags målinger. En *transvariabel* (across-variable) måles ved at instrumentet

samtidigt tilknyttedes to forbindelsespunkter i systemet, uden at dettes forbindelser skæres op. Eksempler på transvariable er spænding, forskydning, rotation og temperatur. Det bemærkes, at det ene forbindelsespunkt kan være et fast referencepunkt, som det f. eks. er tilfældet ved måling af knudepunktsspændinger, forskydning af masser i et gravitationsfelt og i økonomi priser. En *intervariabel* (through-variable) måles i modsætning hertil ved at skære systemet op i det aktuelle forbindelsespunkt og indsætte instrumentet i opskæringspunktet. Eksempler på intervariable er elektrisk strøm, mekanisk kraft, drejningsmoment og varmem strøm. I økonomien må strømme af ressourcer og varer karakteriseres som intervariable.

Fra et matematisk synspunkt kan operationelt definerede målinger af en arbitrær observerbar egenskab opfattes som elementer af den samme matematisk gruppe. For at klassificeres som målinger må elementerne i det mindste tilfredsstillende en binær ækvivalensrelation. Hvis elementerne kun tilfredsstillende denne relation, siges de at blive målt på en *nominel skala* (ækvivalensskala). Hvis elementerne ud over den binære ækvivalensrelation også tilfredsstillende en binær ordnende relation, siges de at være målt på en *ordnende skala*. Det bemærkes, at den resulterende ordning af et sæt målinger i en rækkefølge forudsætter en topologisk orientering af tid og rum. Operationelt definerede målinger tilfredsstillende ikke en binær operation som f. eks. additionsreglen. Målingerne kan imidlertid give afgørende vidnesbyrd for mulighederne for at postulere en sådan operation.

Psykofysik og teorien for behovstilsættelse er videnskabelige områder, indenfor hvilke teoretiske modeller etableres ud fra operationelt definerede målinger (Samuelson, 1938; Stevens, 1959; og Baumol, 1965). Den generelle filteori, der ligger bag konstruktionen af integrerede databehandlings-systemer, er et andet område, baseret på operationelt definerede målinger (Orchard-Hayes, 1959; Franksen og Rømer, 1963).

Det *symbolske* synspunkt er karakteriseret ved, at de teoretiske begreber gives mening ved at blive udledt fra postulater, hvis gyldighed ikke kan bevises, men som erfaringsmæssigt er i overensstemmelse med virkeligheden. Et sæt postulater som kan bruges ved den kvantitative identifikation af teoretiske begreber med observerbare egenskaber er følgende tre.

Første postulat vedrører forholdet, om den teoretiske model er baseret på *kausaltitet* eller *sandsynlighed*. Som tidligere nævnt kan en makroskopisk måling opfattes som en repræsentation af såvel en *deterministisk* som en *probabilistisk* observerbar egenskab. Valget afhænger af den resulterende teoris samlede overensstemmelse med virkeligheden (Papoulis, 1964).

Det andet postulat introduceres for at tillade fastsættelse af fællesbegreber, der udtrykker *identitet* mellem operationelt forskellige størrelser

(Bridgman, 1927 og 1936). Det symbolske synspunkt erkender ikke, at en oprindelig observérbar størrelse, efterhånden som måleobjektets fysiske størrelse tiltager, ophører med at eksistere og derfor må erstattes med en anden observérbar størrelse, der operationelt er forskellig fra den første. Et eksempel på dette forhold er begrebet længde, som både bruges til at beskrive astronomiske længder, tekniske længder og atomare længder.

Det tredje postulat vedrører antagelsen om *kontinuitet* eller i det mindste stykkevis kontinuitet. Kontinuitet er en matematisk idealisering, som målinger i kraft af selve deres natur ikke kan bekræfte. Betingelsen for at introducere kontinuitet ligger i den operationelle erkendelse af afgørende vidnesbyrd for muligheden af at postulere eksistens af en *binær additionsregel*. Det er på denne måde muligt at repræsentere de teoretiske begreber ved metriske, symbolske størrelser som, i det mindste indenfor visse områder, er anvendelige til numeriske beregninger.

Sidestillet med kontinuitetsforudsætningen er *differentiabilitetsforudsætningen*. Sidstnævnte forudsætning har forbindelse med begreberne *ekstensive* og *intensive* variable, der stammer fra termodynamikken. Ekstensive variable er her direkte proportionale med systemets masse eller størrelse, hvilket intensive variable ikke er. Indenfor økonomien betragtes analogt *mængder af varer eller ressourcer som ekstensive variable*, mens *tidsafledede som priser eller strømme af varer eller ressourcer er intensive variable*.

En vurdering af de operationelt definerede målinger, transvariable og intervariable, ud fra et matematisk syn på deres fortolkning som metriske størrelser giver følgende resultater. Afhængigt af, om den metriske måleskala indebærer kendskab til et absolut nulpunkt eller ej, skelnes mellem en *forholdsskala* og en *intervalskala* (Stevens, 1959). Forholdsskalaen er karakteristisk ved at have et absolut nulpunkt, således at den er invariant overfor transformationer af typen  $x' = ax$ . I modsætning hertil er intervalskalaen karakteriseret ved ikke at have noget absolut nulpunkt, således at intervalskalaen er invariant overfor transformationer af typen  $x' = ax + b$ . Erfaringen viser, at direkte måling af en intervariabel, f. eks. en varestrøm eller -mængde altid baseres på en forholdsskala. På den anden side baseres direkte målinger af en transvariabel normalt på brugen af intervalskalaer. Fastlæggelse af nulpunktet eller referencepunktet for måling af elektriske knudepunktsspændinger eller økonomiske priser er derfor et spørgsmål om, hvad der er tilvandt eller praktisk. Det bemærkes imidlertid, at differenser på intervalskalaer kan måles på en forholdsskala. F. eks. er spændingsfaldet over en elektrisk komponent (defineret som differensen mellem to knudepunktsspændinger) eller stigningen i økonomisk

værdi langs en aktivitet (bestemt som differensen mellem to priser) transvariable målt på en forholdsskala. I fysikken opfattes transvariable målt på en intervallskala generelt som skalære potentialer, mens intervariable målt på forholdsskalaer opfattes som vektorer. Den arbitrære retningsreference, der tillægges en intervariabel parameter, er en operationelt defineret positiv orientering mellem de to forbindelsespunkter brugt ved bestemmelsen af den tilsvarende transvariable parameter.

Efter således operationelt at have defineret de grundlæggende målinger samt symbolsk at have formuleret deres tilsvarende begrebsmæssige abstraktioner er det muligt at fremsætte de grundlæggende afhængigheder eller love. Det er klart, at *den teoretiske formulering af grundlæggende love baseres på erkendelsen af strukturelle egenskaber, der er invariante overfor visse veldefinerede ændringer* (Weyl, 1952). For matematisk at vise denne invarians i struktur eller form tilstræbes den *størst mulige symmetri* i den teoretiske formulering, idet der fuldstændig ses bort fra den fundamentale betydning som direkte målinger, der danner basis for de forskellige enhedssystemer, har indenfor eksperimentel praksis. Eksempler på en sådan anvendelse af symmetribegrebet som et teoretisk formuleringsværktøj er Maxwell's brug af matematisk formelsymmetri i forbindelse med hans formulering af elektromagnetismens grundlæggende love (Campbell, 1921) og brugen af avancerede gruppeteoretiske begreber indenfor moderne kvantemekanik.

Det bemærkes, at en teoretisk formulering baseret på symmetri eller strukturvarians ikke nødvendigvis beskriver, hvad der bogstavelig talt eksisterer. Formålet med en teori er at organisere observationer til en rationel helhed. De fleste af de hidtil fremsatte deterministiske teorier, bortset fra den elektriske netværksteori, tager sigte på at give en rationel beskrivelse af systemer med få men komplicerede elementer. For disse teorier har geometrien været det matematiske værktøj, som bedst gav det rationelle helhedsbillede. I dag stiler man imod teoretisk at beskrive systemer med et meget stort antal elementer, hvis egenskaber er simplificeret ved at blive karakteriseret som naturlove af nedenfor behandlede art. Hovedvægten ved beskrivelse af disse systemer lægges herigennem på målingerne. Målinger kan, som vi tidligere har set, defineres som beskrivelse af observationer ved hjælp af tal i overensstemmelse med en regel, der angiver den pågældende måleskalas art. Tal og derigennem aritmetiske ideer og begreber bliver derfor den afgørende egenskab ved opstillingen af et rationelt helhedsbillede. Det er dette forhold, der ligger til grund for den ovennævnte fremhævelse af symmetribegrebet og dets strukturelle begrebsafledninger i den moderne algebra.

Som et passende udgangspunkt for formuleringen af den økonomiske produktionsteori ud fra symmetribegrebet vil her blive brugt følgende organisation af økonomiens grundlæggende målinger:

	Ekstensive	Intensive
Transvariable	—	Priser: $p$
Intervariable	Mængde af ressourcer eller varer i fysiske enheder: $q$	Strøm af fysiske enheder $i = dq/dt$

Forklaringen på de variable i dette skema følger umiddelbart af den foranstående diskussion af de grundlæggende målinger. Det bemærkes imidlertid, at i økonomi er den ekstensive transvariable, der er tidsintegreret af prisen, normalt ikke defineret. Indenfor elektromagnetismen er denne variabel den magnetiske flux. Det må derfor forventes, at denne variabel under ceteris paribus betingelser har karakter af penge betragtet som kapital (Zeuthen, 1955).

Et af de mest overraskende forhold indenfor fysik og økonomi er, at alle de grundlæggende relationer eller love afledes af en simpel ligefrem eller omvendt proportionalitet mellem en transvariabel og en intervariabel parameter. Det synes oplagt, at dette forhold har sin oprindelse i den tidligere nævnte to-terminal egenskab ved vore måleinstrumenter.

Under lineære forhold eller ceteris paribus forudsætninger er Ohm's lov et fysisk eksempel på *ligefrem proportionalitet* mellem en intensiv transvariabel og en intensiv intervariabel. Den til loven svarende proportionalitetskonstant kendes i dette eksempel som modstanden. Grænseværdierne for dennes størrelse er nul og uendelig, og disse værdier benyttes sammen med en angivelse af én af de variable ved specifikationen af en ideel kilde. I praksis holder forudsætningen om linearitet sjældent. I stedet betragtes ofte kun differentielle ændringer om et givet arbejds punkt.

Indenfor økonomien er eksempler på denne type af relationer efterspørgsels- og udbudskurver, som er en éntydig sammenhæng mellem intensive variable, hvor de sidste endvidere kræves at være ikke-negative. Kurverne antages for lineære indenfor både kvadratisk og lineær programmering, hvor den sidstnævnte fremgangsmåde udmærker sig ved at udnytte kurver parallelle med enten prisaksen (*ideel udbudskurve*) eller med strøm-

aksen (*ideel efterspørgselskurve*). Analogt med grænsetilfældene for Ohm's lov kan en ideel udbudskurve og en ideel efterspørgselskurve betragtes som henholdsvis en ideel intervarebel eller strømkilde og en ideel transvariable eller priskilde.

Traditionsmæssigt defineres og bestemmes udbuds- og efterspørgselskurver ud fra totalkurverne som gennemsnitskurver. I fysikken er i modsætning hertil alle naturlove såsom Ohm's lov marginalkurver, og gennemsnits- eller totalkurver bruges aldrig. Det er klart, at der i lineær programmering, hvor der kun benyttes ideelle udbuds- og efterspørgselskurver som omtalt ovenfor, ikke er forskel på gennemsnits- og marginalkurver. Imidlertid er matematisk programmering, som det let kan vises ved numeriske eksempler fra kvadratisk programmering (Franksen, 1957), og som det er hævdet af økonomer, et værktøj til marginalanalyse (Dorfman m. fl., 1958; Schneider, 1966). Det må derfor i lighed med fysikken konkluderes, at *de grundlæggende økonomiske relationer, der skal bruges i matematiske programmeringsmodeller, er marginale udbudskurver og marginale efterspørgselskurver.*

Indenfor fysikken er *relationer med omvendt proportionalitet* altid et produkt af en transvariable og en intervarebel, og værdien af produktet er en additiv skalar. Denne resulterende skalar er energi eller effekt, dvs. ændringshastighed for energi. Formuleringen af den ovenfor nævnte første lov for et isoleret system baseres udelukkende på skalarer fremkommet ved sådanne produkter. Gennem termodynamikken og moderne teknisk forskning indenfor elektromekaniske systemer er det blevet erkendt, at energi er en funktion af et sæt uafhængige ekstensive parametre. Endvidere har den sidstnævnte forskning afsløret, at *energi skal defineres som integralet af en intensiv parameter med hensyn til en ekstensiv parameter* (Cherry, 1951; Franksen, 1965). Denne definition er naturligvis i overensstemmelse med de termodynamiske konsekvenser, hvor den intensive parameter defineres som den partielt afledede af den indre energi med hensyn til de uafhængige ekstensive parametre (Callen, 1960). Idet der blev lagt vægt på symmetrien i den teoretiske formulering af elektromagnetiske problemer, viste det sig praktisk at introducere dualen til energi, den såkaldte *co-energi*, der defineres som *integralet af en ekstensiv parameter med hensyn til en intensiv parameter*. Termodynamikkens forskellige energitilstandsfunktioner sammensættes af energi- og co-energiudtryk. Principielt er energi og co-energi udtryk for et systems muligheder for at udføre mekanisk arbejde. Sidstnævnte defineres som mekanisk kraft multipliceret med forskydningen i kraftens retning, dvs. en intensiv intervarebel multipliceret med en ekstensiv transvariable.

En yderligere udvikling, introduceret af Maxwell i hans berømte »var-meteor« (Maxwell, 1891) er brugen af effekt som en tilstandsfunktion. Effekt defineres som produktet af en intensiv transvariabel og en intensiv interv variabel. For at teorien også skulle omfatte ikke-lineære systemer introduceredes senere i stedet for effekt to beslægtede funktioner, content og co-content (Millar, 1951). Begge disse funktioner defineredes fuldstændig analogt med definitionerne af energi og co-energi. *Content defineres derfor som integralet af en intensiv transvariabel med hensyn til en intensiv interv variabel, mens co-content defineres som integralet af en intensiv interv variabel med hensyn til en intensiv transvariabel.*

Inden for økonomien stammer de tilsvarende relationer med omvendt proportionalitet mellem to faktorer fra den konventionelle bestemmelse af udgifter og profit. Med henblik på brugen af disse begreber til definition af økonomiske tilstandsfunktioner som forsøgt af Samuelson (Samuelson, 1952 & 1960) vil her blive givet en kort gennemgang af den økonomiske analogi til de ovenfor introducerede fysiske begreber.

Økonomisk energi og co-energi kan introduceres udtrykt ved priser,  $p$ , i pengeenheder og mængder,  $q$ , i fysiske enheder. Specifikt er energien,  $U$ , og co-energien,  $U'$ , defineret som

$$U = \int_0^q p dq \quad (1)$$

og

$$U' = \int_0^p p dq \quad (2)$$

Den praktiske brug af disse begreber er imidlertid ret begrænset, da de sandsynligvis kun kan benyttes i lukkede Leontiefsystemer, hvor der ikke findes primære faktorer eller slutkonsumenter (i den elektriske netværks-terminologi udtrykkes dette ved, at systemet er konservativt uden kilder og dissipation).

Økonomisk content og co-content er på den anden side af afgørende betydning, eftersom det ved hjælp af disse to begreber er muligt at formulere økonomiske tilstandsfunktioner i enhver henseende fuldstændig analoge med fysikkens. Udtrykt ved priser,  $p$ , i pengeenheder og strømme,  $i$ , i fysiske enheder defineres, med strømmen,  $i$ , som uafhængig parameter content  $K$ , som

$$K = \int_0^i p di \quad (3)$$

og med prisen,  $p$ , som uafhængig parameter, co-content,  $K'$ , som

$$K' = \int_0^p idp \quad (4)$$

Matematisk programmering er et økonomisk værktøj baseret næsten udelukkende på content og co-content tilstandsfunktioner afledt ud fra marginale udbuds- og efterspørgselskurver. I lineær programmering, hvor ideelle udbuds- og efterspørgselsfunktioner betragtes, udtrykker co-content tilstandsfunktionen produktionsfaktorernes totale varierende omkostninger, mens content tilstandsfunktionen repræsenterer totalindtægten. I andre typer matematiske programmeringsproblemer vil det dog normalt ikke være muligt at give disse tilstandsfunktioner en tilsvarende, intuitiv simpel fortolkning.

### *Ligevægtsbetingelser*

I den fysiske terminologi er alle de ovenfor beskrevne målinger, fysiske såvel som økonomiske, makroskopiske gennemsnit af mikroskopiske, statistiske fænomener. Hovedformålet med den tidligere gennemgang af forudsætningerne var at sikre gyldigheden af de makroskopiske målinger gennem en éntydig repræsentation af disse statistiske gennemsnit. Mikroskopiske tilstande, der tilfredsstillende dette sæt af forudsætninger, betegnes mikroskopiske ligevægtstilstande. Det er indlysende, at et system under det specificerede sæt forudsætninger vil ændres kontinuert fra én ligevægtstilstand til en anden. I hver af disse mikrotilstande vil de ydre påvirkninger imidlertid ophæve hinanden, hvis den homogene fordeling opretholdes. En makrotilstand kan derfor kun defineres som repræsenterende mikroskopiske ligevægtstilstande, hvilket vil sige, at enhver makrotilstand, der kan defineres ved makroskopiske målinger, kan opfattes som en stationær eller ekstremum tilstand fra den klassiske mekaniks synspunkt.

Det væsentligste forhold i forbindelse med makroskopiske dynamiske beskrivelser af fysiske systemer (f. eks. elektriske netværk) og økonomiske systemer (f. eks. Walras') er, at sådanne beskrivelser kun kan udtrykkes ved ligevægtstilstande eller stationære tilstande. En vigtig følge af denne iagttagelse er, at det er muligt direkte ud fra de aktuelle makroskopiske målingers grundegenskaber at etablere et sæt nødvendige og tilstrækkelige betingelser for ligevægt.

Den første og derfor *nødvendige betingelse for ligevægt* stammer fra den klassiske mekanik. Her siges et statisk system at være i ligevægt, hvis det er i hvile. For et statisk system er vektorsummen af alle ydre og indre kræfter



lig nul. Denne betingelse er imidlertid kun nødvendig, da den også tilfreds-  
 stilles af et ikke-accelereret mekanisk system i translatorisk bevægelse. Ved  
 for et system i bevægelse at betragte højre side af Newton's bevægelseslov  
 (»kraft gange acceleration«) som en ny »inertikraft« og indføre denne  
 »kraft« i vektorsummen af de andre kræfter, udstrakte d'Alembert an-  
 vendeligheden af denne statiske ligevægtsbetingelse til også at gælde dyna-  
 miske forhold. Principielt er kræfter, ligesom elektriske strømme, intensive  
 intervariable. Den analoge nødvendige betingelse i den elektriske netværks-  
 teori er derfor Kirchhoff's knudepunktlov, der siger at summen af de elek-  
 triske strømme i et knudepunkt er nul. I almindelighed kan den nødvendige  
 betingelse for et dynamisk systems ligevægt derfor udtrykkes således, at  
*intensive intervariable målt på en forholdsskala har summen nul i et knude-*  
*punkt (knudepunktloven).*

I den økonomiske teori for dynamiske systemer er det velkendt, at de  
 involverede strømme tilfredsstillende denne nødvendige betingelse (Zeuthen,  
 1955). Det interessante er imidlertid, at dette normalt fortolkes som en  
 betingelse for statisk ligevægt. d'Alembert's princip ændrer formuleringen  
 af et dynamisk problem til at være statisk; men dette betyder ikke, at det  
 dynamiske system bliver statisk, eller at dynamiske problemer kan løses  
 ved hjælp af statiske metoder. Samuelson synes i sit *korrespondanceprincip*,  
 som er en fuldstændig analog\*) til d'Alembert's princip, som den eneste at  
 have erkendt, at dynamiske problemer kan reduceres til statiske fra et for-  
 muleringssynspunkt (Samuelson, 1947). Det generelle økonomiske proble-  
 m, *komparativ statik*, som Samuelson betegnede det teoretiske arbejde,  
 der stammer fra hans korrespondanceprincip, er derfor ikke et statisk proble-  
 m. Siden alle indgående variable er intensive, og de tilsvarende til-  
 standsfunktioner alle refererer til effekt, drejer det sig tværtimod om et  
 dynamisk problem, men det er formuleret ved hjælp af statiske metoder.  
 Den kendsgerning, at tilgrundliggende mikroskopiske fænomener er stati-  
 stiske, tvinger den makroskopiske model til at være i øjeblikkelig lige-  
 vægt. Men dette indebærer kun, at det økonomiske system på ethvert tids-  
 punkt er i en stationær eller ekstremum tilstand. Problemet *komparativ*  
*dynamik* (Samuelson, 1947) er at undersøge om et system er stabilt i tid,  
 forstået sådan at det oprindelige sæt forudsætninger holder, efterhånden  
 som de ydre påvirkninger ændres i tid (Granger & Hatanaka, 1964).

\*) Samuelson's korrespondanceprincip er i virkeligheden noget mere omfattende end  
 d'Alembert's lov, idet det også indebærer en transformation af en tidsafhængig  
 energifunktion til en tidsinvariant effektfunktion, der kan danne udgangspunkt for  
 definitionen af den økonomiske tilstandsfunktion (Franssen, 1967).

Den til den ovenstående nødvendige betingelse svarende *tilstrækkelige betingelse for ligevægt* er behandlet i den elektriske netværksteori, hvor den er kendt som Kirchhoff's maskelov. Denne lov siger, at summen af elektriske spændinger rundt i en lukket maske eller vej er nul. Trent påpegede senere (Trent, 1955), at denne lov indenfor mekaniken har en analogi, som indtil da var overset, nemlig at en almindelig summation af forskydninger forsvinder langs en lukket vej. I begge tilfælde baseres formuleringen af denne betingelse på, at den gælder for transvariable målt på en forholdsskala, hvor disse transvariable er afledt fra målinger på en intervallskala. Det er væsentligt at lægge mærke til, at det er arten af den oprindelige måleskala, der betinger formuleringen af ligevægtsbetingelsen. I almindelighed er den den anden og tilstrækkelige ligevægtsbetingelse for dynamiske systemer, at *summen af transvariable målt på en forholdsskala er nul langs en lukket vej* (maskeloven).

Den økonomiske analog til denne betingelse er, at summen af priser omformet til værdistigninger (prisdifferenser) er nul langs en lukket maske eller vej.

I økonomisk teori såvel som i elektrisk netværksteori holder disse to betingelser, knudepunktsloven og maskeloven, til ethvert tidspunkt, naturligvis forudsat at det tidligere specificerede sæt af forudsætninger er opfyldt, således at der kan defineres meningsfulde makroskopiske målinger. Produktion er en tidskrævende proces. Den mest kritiske forudsætning er derfor kravet om en tilstrækkelig lille udbredelsestid.

Økonomiens tidsbegreber, udtrykt ved adjektiverne *kortsigtet* og *langsigtet*, hvor sidstnævnte fleksibelt forbindes med den tid som firmaets politik, besiddelsesforhold og forpligtelser strækker sig over, mens førstnævnte refererer til en i forhold hertil meget kortere periode, har rødder langt tilbage i økonomiens historie. Sammenlignet med definitionen af det fysiske tidsbegreb som en af de grundlæggende uafhængige variable, synes disse økonomiske tidsbegreb at sigte på en tidsbeskrivelse, som, indenfor det betragtede tidsinterval, sikrer at udbredelsestiden for det aktuelle delsystem er meget mindre.

Principielt må den praktiske fremgangsmåde bestå i først at bestemme alle priser og fysiske mængders tidsvariation i det totale økonomiske system. For det andet må priser og strømme, analogt med hvad der kan kaldes Vagn Madsens *variabilitetsprincip* indenfor regnskabsvæsen (Madsen, 1963), grupperes i overensstemmelse med deres variationer som funktion af bestemte fysiske tidsintervaller (i uger, måneder eller år). Et økonomisk delsystem, svarende til et givet fysisk tidsinterval og defineret ved de relevante priser og mængder, kan således betragtes som havende uendelig

hurtig udbredelse eller svar, hvis de totale værdier i tidsintervallet bruges til at repræsentere »øjeblikkelige« priser og strømme. Dette er ensbetydende med, at det *fysiske tidsinterval opfattes som én enkelt økonomisk tidsenhed*. På denne måde kan økonomiens dynamiske teori i form af matematisk programmering benyttes ved beskrivelsen af hvert af de økonomiske delsystemer defineret ud fra variabilitetsprincippet.

Beskrivelsen af et således fastlagt økonomisk delsystem er det emne, der har interesse i denne forbindelse. Walras' model, og dermed de lineære og kvadratiske programmeringsmetoder, gælder kun for sådanne delsystemer. Det analoge elektriske netværk, der vil blive formuleret i det følgende, er derfor udelukkende en model af sådanne systemer. I praksis må det totale økonomiske system beskrives ved hjælp af et helt sæt af sådanne delsystemer eller netværk på hver sit niveau defineret ud fra forskellige tidsintervallængder. Det bemærkes imidlertid, at forbindelsen mellem to netværk på tilstødende tidsniveauer er sådan, at aktiviteter i netværket med det længste tidsinterval optræder som produktionsfaktorer i netværket med det korteste tidsinterval, hvis de to niveauer er direkte forbundet gennem produktionsprocessen.

### *Økonomiens fundamentale love*

Det grundlæggende i økonomien ved formuleringen af Walras' lignings-system for et varemarked med fuldkommen konkurrence er beskrivelsen af et atomistisk eller mikroskopisk, isoleret system ved en dynamisk, makroskopisk teori. Ved at tilfredsstille forudsætningerne om fuldkommen konkurrence er det sikret, at den makroskopiske, dynamiske teori er meningsfuld. Normalt fås *den mikroskopiske homogenitet ved at antage, at såvel foretagender som forbrugere udviser en konstant rationel opførsel*. I særdeleshed antages det, at alle foretagender søger at maksimere deres profit, mens på den anden side forbrugerne maksimerer behovstilfredsstillelsen.

Idet vi ikke går nærmere ind på, hvorvidt dette er en realistisk antagelse, koncentrerer vi interessen om det faktum, at den kun er rettet mod betingelserne for et varemarked. Naturligvis kan antagelsen om mikroskopisk homogenitet i en individuel produktion (i økonomisk betydning) tilfredsstilles bedre ved at gennemtvinge intern standardisering etc. Fra en ingeniørs fysisk orienterede synspunkt ser det derfor besynderligt ud, at Walras' ligningssystem i økonomien formuleres direkte ud fra de ovenfor angivne forudsætninger for et konkurrerende marked. I særdeleshed fordi den matematiske programmering, der er udsprunget heraf, oftere benyttes til bestemmelse af den økonomisk optimale tilstand for en produktion.

Det Walraske ligningssystem er helt klart en makroskopisk, dynamisk model, som kan anvendes generelt. Vi vil derfor her formulere de to grundlæggende love, analoge til fysikkens, hvorpå modellen er baseret, som dynamisk teori betragtet.

Imidlertid må man, før disse to love formuleres og diskuteres, gøre sig klart, at de og den dertil svarende dynamiske teori ikke nødvendigvis skal baseres på et sæt af statistiske forudsætninger. Klassisk mekanik kan tages som et analogt eksempel, hvor gravitationsfeltets retning blev opfattet som en deterministisk udgave af den tidligere angivne anden lov (Lindsay & Margenau, 1936). Det vil sige, at en dynamisk teori baseret på de to love også kan være anvendelig ved beskrivelsen af en produktion, hvor antallet af grundelementer er så lille, at et statistisk system ikke kan defineres.

Under forudsætning af et isoleret økonomisk system i form af et marked med fuldkommen konkurrence har tidligere økonomer opdaget en vigtig identitet, som siden er blevet kaldt *Walras' lov* (Dorfman m. fl., 1958; Baumol, 1965). Per definition er enhver, som efterspørger en vare, forberedt på i bytte at yde den tilsvarende værdi i penge eller andre varer. På lignende måde kræver enhver, der sælger varer på et marked i bytte en hertil svarende værdi i penge eller andre varer. Det vil sige, at enhvers efterspørgsel og ydelse er underkastet en budgetbetingelse, som siger, at udgifter til varer modsvarer indtægter fra faktorydelser. Da dette er sandt for hvert enkelt individ, er det også sandt for individerne taget under ét. Derfor kan Walras' lov i ord formuleres således at den udtrykker, at *for et isoleret økonomisk system må den totale værdi i penge af alle de enheder, der udbydes, være lig den totale pengeværdi af alle de efterspurgte enheder*. Ifølge Baumol (Baumol, 1965) må denne sammenhæng, som er »little more than an accounting relationship«, være opfyldt uafhængig af systemets tilstand.

I den økonomiske teori udledes Walras' lov under forudsætning af proportionalitetslovens tilfredsstillelse ofte som en ligevægtsbetingelse for Walras' ligningssystem anvendt på et i ligevægt værende marked med fuldkommen konkurrence. Det synspunkt, som er anlagt i denne artikel, er, at *Walras' lov udtrykker invariansprincippet for et isoleret økonomisk system*. Med Baumol's ord: »It is difficult to imagine an economy in which this law does not hold«. Vi vil derfor betragte *Walras' lov som økonomiens 1. lov*. En matematisk formulering af denne lov vil blive foretaget i forbindelse med formuleringen af det Walraske ligningssystem.

For at nå frem til økonomiens 2. lov må vi igen ty til fysiske analogier. Den såkaldte neo-klassiske teori for et varemarked med fuldkommen konkurrence og i endnu højere grad for en økonomisk produktion baserer sig

på forestillingen om rationel opførsel. På det mikroskopiske niveau er rationel opførsel ensbetydende med homogenitet. På den anden side må rationel opførsel på det makroskopiske niveau formuleres ved makroskopiske målinger, f. eks. strømme og priser. Det makroskopiske begreb for rationel opførsel vil derfor afvige fra det mikroskopiske.

Resultatet af makroskopiske målinger på et isoleret økonomisk system under veldefinerede påvirkninger er, at alle forandringer, som optræder, har ganske bestemte retninger. Det vil sige, at i en industriel produktionsproces er det umuligt at vende retningen af de fysiske strømme. I økonomiske termer vil det sige, at strømme altid vil gå i retning fra ressourcer eller produktionsfaktorer mod efterspørgslen. Anvendelsen af betegnelserne input og output for de fysiske strømme illustrerer dette. Det kan uddybes på følgende måde. I økonomien er det fundamentale problem allokeringen af begrænsede midler til ønskede mål. Disse mål svarer til efterspørgsel som funktion af priserne. I et isoleret system vil det fra det makroskopiske synspunkt være naturligt at forsøge en produktion, hvis den tilsvarende strøm af aktivitet har en højere pris og dermed værdi ved stedet for produktionsfaktoren end ved efterspørgslen.

Vi har tidligere vist, at priser i fuldstændig analogi til elektriske knudepunktsspændinger var intensive transvariable målt på en intervallskala. Svarende hertil kan vi opfatte priser som økonomiske potentialer. *Begrebet rationel opførsel* formuleret som et statistisk princip for den makroskopiske strømretning kan derfor ses at være analog til det statistiske princip for strømretning i fysikken. I ord kan *økonomiens 2. lov* derfor formuleres: *En strøm vil kun gå fra en lavere til en højere pris.*

En sammenligning af de to grundlæggende økonomiske love:

1. lov: Walras' lov

2. lov: Strømretningen for rationel opførsel

med de tilsvarende to fysiske love viser, at de er helt analoge, bortset fra fortegnet i den anden lov. I terminologien for den elektriske netværksteori kan fortegnsskiftet for den økonomiske strøms retning forklares ved at sige, at vi i økonomien koncentrerer interessen om strømmene» inden i en spændingskilde« (Enke, 1951).

### *De grundlæggende postulater*

På baggrund af den foregående diskussion er vi nu i stand til matematisk at formulere økonomiens to grundlæggende love eller postulater og de tilstandsfunktioner, som kan udvikles udfra første lovs betingelser.

Det antages, at vi i det isolerede system har *n limitationale ressourcer*

eller *produktionsfaktorer* til rådighed. Da de alle er intensive intervariable, opfatter vi dem som strømme. På matrixform, hvor index  $t$  står for transponering, skrives de:

$$Y^t = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad (5)$$

De dertil svarende  $n$  *produktionsfaktorpriser*, som er intensive transvariable målt på en intervallskala, skrives tilsvarende:

$$V^t = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad (6)$$

Lad os antage, at  $m$  *efterspurgte produkter* opfattet som strømme produceres i følgende mængder:

$$X^t = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad (7)$$

og med de  $m$  *markedspriser*

$$P^t = \{p_1, p_2, \dots, p_m\} \quad (8)$$

Da det drejer sig om et lukket økonomisk system, kan den totale økonomiske effekt i systemet eller *Walras' lov* formuleres:

$$X^t P - Y^t V = 0 \quad (9)$$

På dette punkt vil det være formålstjenligt kort at diskutere, hvorledes man kommer fra det matematiske udtryk for det økonomiske ligevægtsprincip til de økonomiske tilstandsfunktioner, som gælder også i det ikke-lineære tilfælde med aftagende udbytte.

Først bemærker man, at en differentiell ændring i den totale effekt er nul. Det vil sige, at man ud fra ligning 9 får:

$$d(X^t P - Y^t V) = 0 \quad (10)$$

som ved hjælp af ligningerne 5–8 kan skrives:

$$\sum_{i=1}^m x_i \cdot dp_i + \sum_{i=1}^m p_i \cdot dx_i - \sum_{j=1}^n y_j \cdot dv_j - \sum_{j=1}^n v_j \cdot dy_j = 0 \quad (11)$$

For det andet må man huske, at de to led i differensen i ligning 9 udtrykker vekselvirkningen mellem to uafhængige påvirkninger i det økonomiske system, nemlig udbud og efterspørgsel. En mulig tilstandsfunktion sammensat af leddene fra ligning 11 må derfor indeholde led for hver af disse påvirkninger. En måde at få en sådan underdeling er ved at skrive ligning 11 på følgende form:

$$\left[ \sum_{i=1}^m p_i \cdot dx_i - \sum_{j=1}^n v_j \cdot dy_j \right] + \left[ - \sum_{j=1}^n y_j \cdot dv_j + \sum_{i=1}^m x_i \cdot dp_i \right] = 0 \quad (12)$$

hvor i den første parentes de uafhængige variable  $x_i$  og  $y_j$  alle er strømme, (dvs. intensive intervariable), medens i den anden parentes  $v_j$  og  $p_i$  alle er priser (dvs. intensive transvariable). Med de definitioner af content og co-content, der er givet i ligning 3 og 4, er det derfor nu muligt at angive en *content tilstandsfunktion* med strømme som de uafhængige variable:

$$dK = \sum_{i=1}^m p_i \cdot dx_i - \sum_{j=1}^n v_j \cdot dy_j \quad (13)$$

og en *co-content tilstandsfunktion* med priserne som de uafhængige variable:

$$dK' = - \sum_{j=1}^n y_j \cdot dy_j + \sum_{i=1}^m x_i \cdot dp_i \quad (14)$$

Fordelen ved de to fremsatte tilstandsfunktioner er, at man i det såkaldte lineære programmeringstilfælde med ideelt udbud og ideel efterspørgsel får:

$$\sum_{j=1}^n v_j \cdot dy_j = 0 \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^m x_i \cdot dp_i = 0 \quad (15)$$

da alle  $y_j$  og  $p_i$  er konstante. Med andre typer af udbud og efterspørgsel kan andre tilstandsfunktioner sat sammen af leddene på en anden måde være mere nyttige, selvom dette sker på bekostning af den intuitiv tiltalende, økonomiske fortolkning.

Det må her pointeres, at de to funktioner er antagne tilstandsfunktioner. Hvorvidt de virkelig er tilstandsfunktioner må bestemmes ud fra betingelserne for den type af problem, som de repræsenterer. Matematisk er de valgte funktioner tilstandsfunktioner, hvis de indeholder led, der repræsenterer hver af de uafhængige påvirkninger, og hvis de med hensyn til de valgte uafhængige variable er fuldstændige differentialer. Tilstandsfunktionerne er derfor alene afhængige af systemets tilstand og ikke af den foregående historie, dvs. uafhængige af, hvorledes tilstanden er nået.

Økonomiens 2. lov om strømorienteringen introduceres normalt i økonomien på følgende måde.

Det antages implicit til at begynde med, at strømmene, som repræsenterer udbudet, er orienterede positivt ind mod produktionsprocessen, og at strømmene der repræsenterer efterspørgsel er orienterede positivt ud fra processen. Ud fra denne orientering af input og output kan man derefter konkludere, at alle strømme i selve produktionen er orienteret positivt i retning fra udbudet til efterspørgslen. På basis af de således valgte positive orienteringer sikrer man sig, at produktionsprocessen er fysisk irreversibel ved at antage, at alle strømme er ikke-negative.

$$y_j \geq 0 \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

Herefter må priserne gives en orientering. Da de måles på en intervalskala, vil nulpunktet for priser kunne vælges arbitrært, og det betyder igen,

at prisernes fortegn kan vælges vilkårligt. Imidlertid antager man i økonomien altid, at faktorpriserne såvel som markedspriserne alle er ikke-negative:

$$v_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$p_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

Tilsyneladende er der her modstrid, og det kan være interessant at se, hvorledes de to synspunkter kan forenes.

Strømmene af produktionsfaktorer ind mod og af efterspurgte varer ud fra produktionsprocessen repræsenterer omgivelsernes påvirkninger på denne. Produktionsprocessen er derfor vores system, som i et diskret antal punkter, benævnt terminaler eller knudepunkter, vekselvirker med omgivelserne. I elektrisk netværksterminologi kan disse knudepunktsvirkninger bestemmes enten som specificerede ækvivalente knudepunktskilder (f. eks. limitational produktionsfaktorstrømme) eller som specificerede knudepunktspotentialer (f. eks. vandret efterspørgselskurve). For at give mulighed for at kunne specificere priserne på knudepunkterne eller terminalerne for selve produktionsprocessen er det nødvendigt at vælge en reference for priserne uden for produktionssystemet. Det vil sige, at i et isoleret økonomisk univers, der består af produktionssystemet og omgivelsernes udbuds- og efterspørgselspåvirkninger, vælger vi som nul-reference for priserne omgivelsernes knudepunkt. Følger vi derefter normal praksis og sætter prisen på penge til »1«, passer ligningerne 18 og 19.

Under forudsætning af rationel opførsel er ovenstående en implicit formulering af økonomiens 2. lov. For det første har vi sikret os, at strømme kun kan optræde i retning fra udbud til efterspørgsel. For det andet, da alle priser er ikke-negative, vil det kun være rationelt at producere, hvis markedsprisen på de efterspurgte varer er større end priserne på ressourcerne. I det følgende afsnit vil dette synspunkt blive yderligere klargjort, i særdeleshed i forbindelse med formuleringen af det analoge elektriske netværk.

### *Walras' ligningssystem*

Walras' ligningssystem daterer sig tilbage til begyndelsen af 1870'erne. Til trods for at det danner grundlaget for den moderne normative økonomi (Samuelson, 1953–54; Zeuthen, 1955; Dorfman m. fl., 1958; og Baumol, 1965), var det relativt ukendt indtil perioden mellem de to verdenskrige. Walras' system er en makroskopisk, dynamisk teori for mikroskopiske, statistiske fænomener i et isoleret system. De tidligere diskuterede forudsætninger er derfor tilfredsstillet således, at vi kan udvikle Walras' ligninger for ligevægt eller stationær tilstand ud fra de to grundlæggende love og de fundamentale ligevægtsegenskaber for de dertil svarende makroskopiske målinger.



Hvis vi først ser på de til rådighed værende  $n$  limitationale produktionsfaktorer fra ligning 5, er det helt klart, at i en vilkårlig produktion vil der være nogle uudnyttede rester, da man ikke kan forvente, at enhver produktionsfaktor bliver udnyttet fuldt ud. På matrixform vil vi udtrykke den forbrugte del af de  $n$  produktionsfaktorer:

$$(Y')^t = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_n\} \quad (20)$$

og de dertil svarende  $n$  ubrugte rester:

$$R^t = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \quad (21)$$

Begge sæt er ikke-negative, intensive intervariable eller strømme. Strømmene  $Y$ ,  $Y'$  og  $R$  vil i ligevægt tilfredsstille knudepunktsloven, hvis området hvori vekselvirkningen mellem produktionsfaktorerne og produktionssystemet finder sted betragtes som et knudepunkt:

$$Y = Y' + R \quad (22)$$

Det er til gengæld lidt vanskeligere at formulere den duale maskelov for ligevægtstilstanden for priserne. Svarende til de  $m$  markedspriser  $P$  (ligning 8) for de  $m$  strømme af efterspurgte produkter vil der være et sæt af  $m$  ikke-negative produktionspriser:

$$(P') = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_m\} \quad (23)$$

som ved at være en funktion af produktionsfaktorpriserne  $V$  fra ligning 6 angiver, hvad produktion koste.

Det er klart, at markedspriserne  $p_i$  og produktionspriserne  $p'_i$  ikke er de samme. Da priserne er økonomiske potentialer, og da omgivelsernes efterspørgsels- og udbudspåvirkninger er givet som marginalkurver, vil vi bestemme det marginale tab eller den marginale omkostning, som fås af følgende differens:

$$l_i = p'_i - p_i \quad (24)$$

Der vil normalt være to slags omkostninger til at karakterisere en produktionsproces. Begge slags involverer en givelse i penge af de til produktionen forbrugte ressourcer. Bogholderen på den ene side bestemmer normalt *anskaffelsesomkostningen* forstået som den mængde penge, der skulle betales, da ressourcen blev anskaffet. Økonomen på den anden side introducerer *offeromkostningerne*. Offeromkostningen ved at anvende en ressource til et specielt formål er den fortjeneste, som ressourcen kan indtjene ved den bedste alternative udnyttelse.

For alle strømme af efterspurgte produkter kan differensen:

$$L = P' - P \quad (25)$$

siges at udtrykke maskeloven for ligevægt. Heraf ses umiddelbart (Baumol, 1965), at hvert element  $l_i$  af:

$$L^t = \{l_1, l_2, \dots, l_m\} \quad (26)$$

er den marginale offeromkostning, der fås ved at forandre produktstrømmen  $x_i$  én enhed ud fra ligevægtstilstanden.

For beslutningsformål er det økonomens offeromkostningsbegreb, der er det relevante, fordi en rationel beslutning må involvere sammenligningen af alternative handlinger med hensyn til en veldefineret reference, der er fælles for alle handlinger. Under antagelse af linearitet vil det bedste valg derfor være at benytte ligevægtstilstanden som reference, hvilket igen betyder, at alle offeromkostningerne  $l_i$  er ikke-negative. Dette stemmer med den velkendte økonomiske antagelse, at vi har nul ligevægtsprofit for et lukket økonomisk system i fuldkommen konkurrence.

En sammenligning af de ovenstående tilstandsligninger med de analoge fra fysikken viser den interessante forskel, at i økonomien har vi den yderligere betingelse, at alle *de involverede variable er ikke-negative*. Det vil senere blive diskuteret, hvorledes denne betingelse kan indføres i den fysiske analog.

Ved at indføre de to ligevægtsbetingelser, knudepunkts- og maskeloven (ligningerne 22 og 25), i Walras' ligning (ligning 9) får vi:

$$X^t P^t - X^t L^t - (Y^t)^t V^t - R^t V^t = 0 \quad (27)$$

I ligevægtligningen er der to led  $X^t L^t$  og  $R^t V^t$ , der er af speciel interesse, da de giver anledning til supplerende betingelser for økonomisk ligevægt.

Et vigtigt formål for Walras' system er ud fra de givne data at tillade en bestemmelse af, hvilke produktionsfaktorer der er frie (prisen er nul), og hvilke der er knappe (prisen er positiv) i ligevægtstilstanden (Zeuthen, 1955). Det er klart, at hvis der er en positiv rest, vil den pågældende produktionsfaktor være et frit gode, mens en produktionsfaktor vil være et knapt gode, hvis vi har en rest, der er lig med nul. For en produktionsfaktor har vi derfor, at produktet af prisen og resten vil være identisk nul:

$$r_j \cdot v_j = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

Da samtidig både  $r_j$  og  $v_j$  er ikke-negative, får man, at den *supplerende ligevægtsbetingelse for produktionsfaktorerne* kan skrives:

$$R^t V^t = 0 \quad (29)$$

Til trods for at denne betingelse blev formuleret af Zeuthen så tidligt som i 1932, var det først meget senere i forbindelse med formuleringen

af lineære programmeringsmodeller, at man indså, at der måtte eksistere en dual supplerende ligevægtsbetingelse for produktionsaktiviteterne.

Fra et økonomisk synspunkt udtrykker den duale ligevægtsbetingelse en rationel opførsel, fordi den bestemmer, hvorvidt en given aktivitet overhodet skal benyttes til at producere en vis mængde produkter. Det er klart, at det kun vil være rationelt at benytte en aktivitet, såfremt den marginale offeromkostning er nul; og omvendt, hvis der er en marginal offeromkostning, som er positiv, da vil det ikke være rationelt at producere:

$$x_i \cdot l_i = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

Da vi igen har, at  $x_i$  og  $l_i$  er ikke-negative, får vi, at den *supplerende ligevægtsbetingelse for produktionsaktiviteterne* kan formuleres:

$$X^t L = 0 \quad (31)$$

Ved at indføre de supplerende betingelser i ligevægtsformuleringen af Walras' lov (ligning 27) får vi:

$$X^t P' - (Y')^t V = 0 \quad (32)$$

Denne formulering er særlig nyttig, da den giver en sammenhæng mellem priserne på produktionsfaktorerne og priserne på produktionsaktiviteterne.

For en given teknik angives sammenhængen mellem den mængde, der benyttes af en given produktionsfaktor og den mængde, som produceres af en bestemt aktivitet ved den såkaldte *tekniske koefficient*. Af fysiske grunde må en teknisk koefficient nærmest opfattes som en slags mætningskurve, som også let ville kunne introduceres i vore analoge elektriske netværk. I praksis er sådanne kurver imidlertid normalt ikke kendte. Vi vil derfor antage linearitet og *definere* den tekniske koefficient  $t_{ji}$  som et konstant forhold lig med den mængde af den  $j$ 'te produktionsfaktor, der skal benyttes til at producere én enhed af det  $i$ 'te produkt.

Ved at benytte en teknisk koefficient med værdien nul til at indikere, at der ikke er nogen fysisk sammenhæng mellem en produktionsfaktor og en aktivitet, kan vi formulere sættet af tekniske koefficienter som en matrix  $T$  med dimensionen  $(n \times m)$  defineret ved:

$$Y' = TX \quad (33)$$

I økonomien er det sædvanlig praksis at introducere *teknisk substitution* ved at lade hver af de tekniske koefficienter  $t_{ji}$  være en funktion af faktorpriserne  $v_j$ . Jantzen's synspunkt, som anvendes her, er, at industriel praksis bedre repræsenteres ved at substituere én teknik med en anden. Det vil sige, at for en given teknik har vi ingen mulighed for substitution, men kun mulighed for at producere mere eller mindre af hver af de forskellige

fastlagte produktarter. Den resulterende uafhængighed af faktorpriserne er også bedre i overensstemmelse med, at værdierne af de tekniske koefficienter er øjebliksværdier i den tidligere definerede økonomiske betydning. Denne konklusion baserer sig på, at strømmene opfattes som øjebliksværdier i definitionsligningen (ligning 33).

Indsættes den sidstnævnte ligning, som definerer de tekniske koefficienter, i ligevægtsformuleringen af Walras' lov (ligning 32), fås:

$$X^t P' - (Y')^t V = X^t P' - (TX)^t V = 0 \quad (34a)$$

eller

$$X^t \cdot (T^t V - P') = 0 \quad (34b)$$

Da denne ligning gælder for ethvert af de ikke-negative  $x_i$ , har man i ligevægt:

$$T^t V - P' = 0 \quad (35a)$$

eller

$$P' = T^t V \quad (35b)$$

Dette resultat kan sammenlignes med det tilsvarende, velkendte økonomiske resultat (f. eks. Dorfman, m. fl., 1958), som kan udledes på følgende måde. Indfører man i Walras' ligning (ligning 34a) udtrykket for  $P'$  fra maskeloven (ligning 25), får man:

$$X^t (P + L) - (TX)^t V = 0 \quad (36a)$$

eller

$$X^t (P + L - T^t V) = 0 \quad (36b)$$

eller

$$P \leq T^t V \quad (37)$$

hvor lighedstegnet i den sidste ligning kun gælder, når  $L$  er nul. Fordelen ved anvendelsen af ligning 35b er altså, at man undgår alle de ubehageligheder, som normalt følger af ulighedstegnet i ligning 37.

Det næste trin i formuleringen af Walras' ligevægtssystem er at introducere de tekniske transformationer (ligningerne 33 og 35b) i knudepunkts- og maskelovene (ligningerne 22 og 25). Først sammenholdes strømmene af produktionsfaktorer med strømmene af produkter, og ud fra ligningerne 22 og 33 finder vi, at *ligevægt for strømmene* kan skrives:

$$Y = TX + R \quad (38)$$

Multiplicerer man  $R$  foran i denne ligning med en enhedsmatrix  $\delta_n$  af dimensionen ( $n \times n$ ), kan man i stedet for skrive:

$$Y = \{T, \delta_n\} \times \begin{Bmatrix} X \\ R \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Sammenholdes derefter produktionsfaktorpriserne med produktpriserne, får vi ved hjælp af ligningerne 25 og 35b, når man som ovenfor multiplicerer  $L$  foran med en enhedsmatrix  $\delta_m$  af dimensionen  $(m \times m)$ , at *ligevægt for priserne* kan skrives:

$$P = \{T^t, -\delta_m\} \times \left\{ \begin{array}{c} V \\ L \end{array} \right\} \quad (40)$$

En sammenligning af ligevægtsligningerne 39 og 40 med den sædvanlige formulering af det matematiske programmeringsproblem viser, at disse ligninger er identiske med de, der kendes som henholdsvis de *primale* og de *duale sidebetingelser* med slack-variablene  $R$  og  $L$  (Dorfman m. fl. 1958; Baumol, 1965) indført.

Det sidste trin i formulering af Walras' system er at give de funktionelle sammenhænge mellem strømme og priser. I økonomien har disse sammenhænge deres udspring i begreberne en efterspørgselsfunktion og en udbudsfunktion (Zeuthen, 1955; Henderson & Quandt, 1958; og Baumol, 1965).

En efterspørgselsfunktion er en »black box« øjebliksbeskrivelse af markedets svar (i form af strømmen af det efterspurgte produkt) på et sæt inputvariable såsom pris, kvalitet, etc. I forhold til et produktionssystem er en efterspørgselsfunktion en af de eksterne påvirkninger, som repræsenterer et gennemsnit af forbrugernes tidsbegrænsede, sociologiske og psykologiske opførsel.

I Walras' system tager man alene hensyn til produktets markedspris. I overensstemmelse med den tidligere diskussion af marginale kontra gennemsnitskurver repræsenterer vi derfor her markedet med en *marginal efterspørgselskurve*:

$$X_i = f_i(p_i) \quad (41)$$

som, udtrykt i øjebliksværdier, er det økonomiske postulat for den »direkte proportionalitet« mellem en intensiv intervariabel og en intensiv transvariabel. På et givet tidspunkt og under forudsætning af linearitet er den marginale efterspørgselskurve analog med Ohm's lov for et elektrisk netværk, hvis dette inkluderer ideelle kilder i de forskellige grene (Franken, 1967). Efterspørgselskurven er et udtryk for transformationen af økonomisk effekt fra en form (markedet), som ikke er inkluderet i analysen til en form (produktionen), som er inkluderet i analysen.

I praksis antager man normalt, at den marginale efterspørgselskurve har en negativ hældning, hvis den tegnes med den ikke-negative pris  $p_i$  som ordinat og den ikke-negative strøm  $x_i$  som abscisse. Specielt vil vi her an-

tage for at kunne tillade benyttelsen af content eller co-content tilstandsfunktionen, at den enten er en enkeltværdifunktion af  $x_i$  og skærer  $p_i$ -aksen, eller at den er en enkeltværdifunktion af  $p_i$  og skærer  $x_i$ -aksen.

Økonomisk kan man fortolke disse to antagelser ved at sige, at den marginale efterspørgselskurve antages at skære i det mindste én af akserne.

En fuldstændig analog argumentation kan gennemføres for *udbudsfunktionen* med det resultat, at man får en *marginal udbudskurve*:

$$y_i = g_i(v_i) \quad (42)$$

som har positiv hældning i samme type koordinatsystem. Også her antages det, at den marginale efterspørgselskurve opfylder betingelserne om at skære i det mindste én af akserne og om at være en enkeltværdifunktion.

En sammenligning af Walras' ligningssystem med den sædvanlige formulering af det matematiske programmeringsproblem (se f. eks. Koopmans, 1951; Dorfman m. fl., 1958; eller Baumol, 1965) afslører det interessante forhold, at et modstykke til programmeringsproblemets objektfunktion fattes i Walras' system. Kun gennem den senere erkendelse og tilføjelse af Walras' lov (ligning 9) blev Walras' ligningssystem komplementeret på en sådan måde, at objektfunktioner i form af økonomiske tilstandsfunktioner kunne udledes for systemet. For eksempel svarer det primale, lineære programmeringsproblem til en bestemmelse af ekstremum for content tilstandsfunktionen ligning 13 (med ligning 15 indsat) under sidebetingelserne ligningerne 39, 17 og 19, mens det duale, lineære programmeringsproblem svarer til en bestemmelse af ekstremum for co-content tilstandsfunktionen ligning 14 (med ligning 15 indsat) under sidebetingelserne ligningerne 40, 16 og 18.

### *Det analoge elektriske netværk*

Tegninger har altid været et af de vigtigste hjælpemidler til at udvikle og fremstille ideerne bag en ingeniørmæssig konstruktion. De kan variere fra rå skitser over detaljerede lustryk af maskinelementer til abstrakte funktionsdiagrammer af elektriske systemer. Men logikken og overensstemmelsen i konstruktionen er altid anskueliggjort ved hjælp af tegninger.

Det er klart, at man kun kan bruge abstrakte diagrammer ved konstruktionen af et økonomisk system. En sådan anvendelse blev allerede tidligt foregrebet af Ivar Jantzen, skønt han kun beskrev sine tanker om produktionssystemet i ord (Jantzen, 1924, 1939 og 1954; Brems, 1952a og b).

Nå en given teknik benyttes i en forenet produktion, er det en teknisk nødvendighed, at hver af de enkelte produktionsfaktorer benyttes simultant ved fremstillingen af de forskellige produkter. Jantzen indså, at ydelserne

til produkterne af hver produktionsfaktor, det såkaldte *sted*, skulle installeres *i parallel*. Tager man derefter et efterspurgt produkt som udgangspunkt, får man begrebet en *aktivitet* (eller *bedrift* i Jantzen's terminologi) ved at gå baglæns gennem produktionen til hver af de individuelle produktionsfaktorer, der er benyttet ved fremstillingen af det produkt. En aktivitet blev opfattet som en *serieforbindelse* af alle de faktorydelser og dermed steder, der skulle til for at producere det specifikke efterspurgte produkt. Man bemærker, at forestillingen om et produktionsfaktorsted kombineret med begrebet om en aktivitet, der får en ydelse fra denne faktor, implicerer, at aktiviteten er éntydigt forbundet til én af stedets pærelle ydelser. Først senere indså man (Brems, 1952a), at den eksakte identitet i denne éntydige sammenhæng netop var Walras' tekniske koeficient (ligning 33).

Jantzen har herved givet os en fuldstændig beskrivelse af Walras' ligningssystem i form af et abstrakt funktionsdiagram. Ved hjælp af et eksempel skal vi desuden vise, at Jantzen's beskrivelse også er et fuldstændigt billede af de analoge elektriske netværk. For at kunne foretage en sammenligning med den normale fremgangsmåde ved matematisk programmering, vil vi tage et simpelt, men veldokumenteret eksempel fra litteraturen (Dorfman m. fl., 1958).

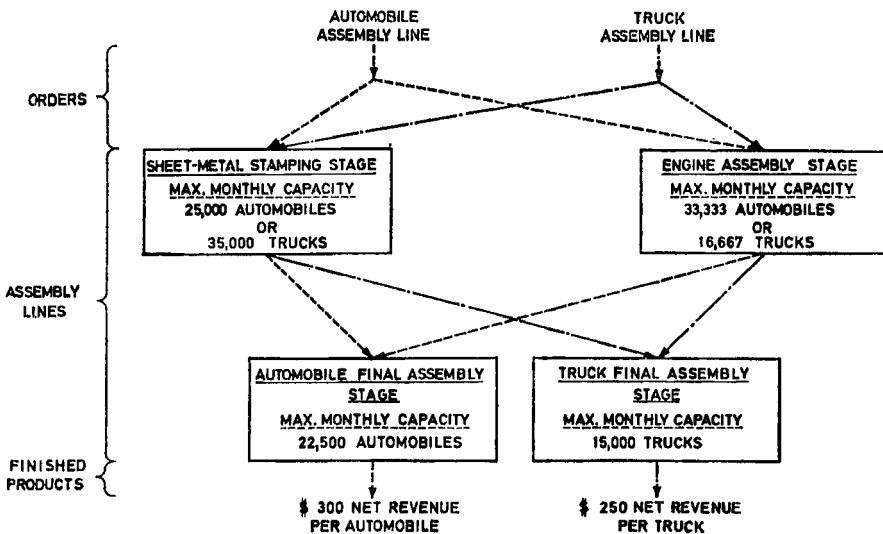


Fig. 1. Organisation og den maximale månedlige kapacitet af virksomhedens 4 afdelinger.

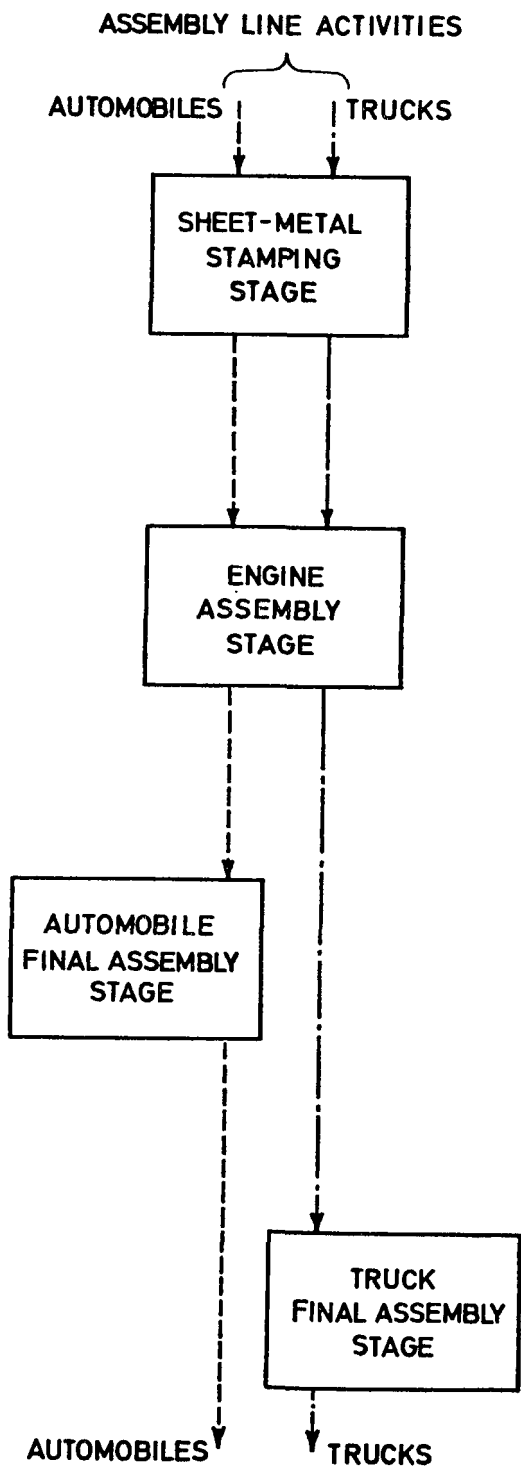


Fig. 2. Produktionslinerne opfattet som aktiviteter med uendelig udbredelseshastighed.



PRODUCTION STAGE	ASSEMBLY LINE ACTIVITY	
	AUTOMOBILE	TRUCK
SHEET-METAL STAMPING	$100 / 25,000 = 0.004$	$100 / 35,000 = 0.00286$
ENGINE ASSEMBLY	$100 / 33,333 = 0.003$	$100 / 16,667 = 0.006$
AUTOMOBILE ASSEMBLY	$100 / 22,500 = 0.0044$	
TRUCK ASSEMBLY		$100 / 15,000 = 0.00667$

Fig. 3. De tekniske koefficienter defineret som den del i procent, der benyttes af den månedlige produktionskapacitet ved fremstillingen af én person- eller lastbil.

En hypotetisk automobilfabrik fremstiller to forskellige produkter: personbiler og lastbiler. Virksomheden er organiseret i 4 afdelinger:

- Pladeværksted
- Motorsamleværksted
- Personbilsfærdiggørelse
- Lastbilsfærdiggørelse.

*Figur 1* viser organisationen og den maksimale månedlige kapacitet. I et fysisk tidsinterval på én måned inden for en længere periode af kontinuert produktion er produktionskapaciteterne for personbils- og lastbilsamlebåndene i størrelsesordenen adskillige tusinde. Vi kan derfor med god rimelighed forudsætte, at udbredelsestiden er så kort, at vi økonomisk kan regne månedens totalværdier som øjebliksværdier af intensive variable for et lukket produktionssystem med simultan tilpasning mellem de fire afdelinger. *Figur 2* forsøger at vise den funktionelle afhængighed mellem disse øjebliksstrømme i produktionen.

Fra et økonomisk synspunkt er hver af de fire afdelinger stedet for en limitational produktionsfaktor med en vis kapacitet. For pladeværkstedets vedkommende svarer maksimum eller 100 % kapacitet til en månedlig produktion af enten 25.000 personbiler eller 35.000 lastbiler eller en eller anden passende kombination af personbiler og lastbiler. Da vi tidligere ved

definitionen af de tekniske koefficienter antog en lineær sammenhæng mellem faktorydelsen og den mængde, der produceres af et produkt, betyder det, at der benyttes 0,004 % af kapaciteten for at producere en personbil, og at 0,000286 % af kapaciteten benyttes til at producere en lastbil. En passende kombination, som fuldstændig udnytter afdelingens kapacitet, kan derfor f. eks. være 15.000 personbiler repræsenterende 60 % af kapaciteten og 14.000 lastbiler repræsenterende 40 % af kapaciteten.

De øvrige tekniske koefficienter er fundet på tilsvarende måde, og resultaterne er angivet i *figur 3*.

Svarende til produktionen af personbiler og lastbiler har vi to aktiviteter. Efterspørgselsfunktionerne, som definerer de to aktiviteter, er *netto-indtægterne* for henholdsvis personbiler og lastbiler, dvs. salgsprisen minus variable omkostninger pr. enhed af hvert produkt.

Som omtalt tidligere svarer af måletekniske grunde en økonomisk strøm af faktorer eller produkter til en elektrisk strøm og priserne i det økonomiske system til elektriske knudepunktsspændinger. Imidlertid er der ikke fuldstændig overensstemmelse mellem priser og knudepunktsspændinger på grund af strømmenes naturlige retninger i de to systemer. Fysikkens henholdsvis økonomiens anden lov siger nemlig, at i et elektrisk netværk går strømmen fra en højere til en lavere knudepunktsspænding, men i det økonomiske system strømmen går fra en lavere pris til en højere pris. En fuldstændig overensstemmelse kan derfor fås, f. eks. ved at skifte fortegn på potentialerne i et af systemerne. Arbitrært vælger vi her at transformere alle priser til negative priser, som vi vil kalde *negpriser*, før vi vil etablere det analoge elektriske netværk. Det betyder, at *i det analoge netværk vil de ikke-negative økonomiske priser optræde som ikke-positive knudepunktsspændinger*. Dette valg er intuitivt tilfredsstillende, da man hermed får, at *ikke-negative strømme i det økonomiske system vil repræsenteres ved ikke-negative strømme i det analoge elektriske netværk*.

Ikke-negativiteten for de økonomiske strømme er opnået ved et arbitrært valg af positiv orientering af strømme i produktionen, hvor strømmene af faktorydelser er orienteret positivt ind imod og strømmene af efterspurgte produkter er orienteret positivt ud fra produktionsprocessen. I den elektriske analog må vi derfor introducere en lignende orientering af de tilsvarende elektriske strømme.

Det fuldstændige analoge elektriske netværk er givet i *figur 4*. En sammenligning med »øjeblik«-repræsentationen på fig. 2 viser straks gyldigheden af Jantzen's beskrivelse. Grenene 1-4 angiver de fire limitationale produktionsfaktorer  $I_j$  og de dertil svarende ubenyttede rester  $J_j$ , som til sammen giver de fire uafhængige udbudspåvirkninger, der giver økonomisk

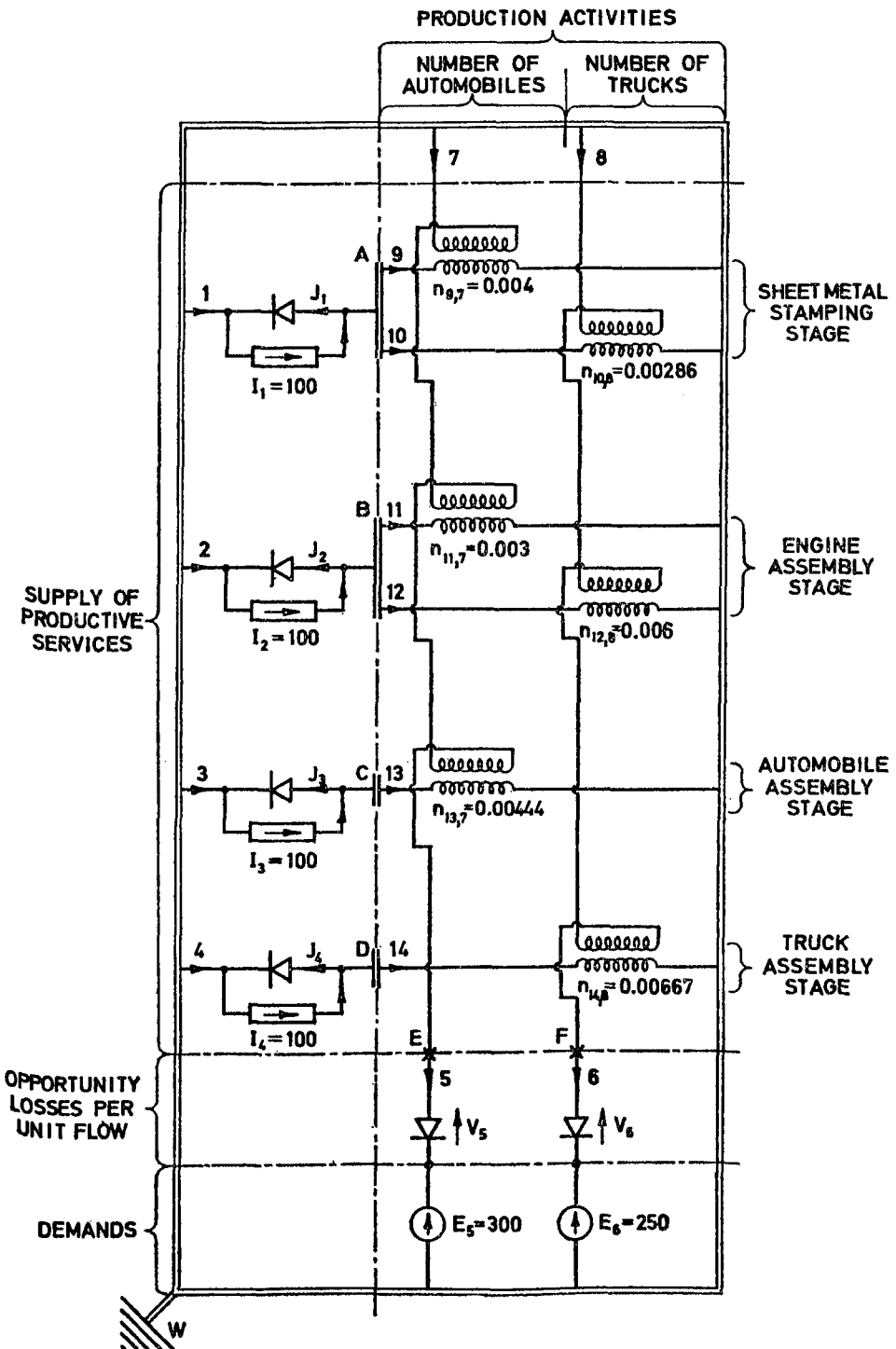


Fig. 4. Det økonomiske netværk svarende til person- og lastbil produktionslinierne med ideelle udbuds- og efterspørgselskurver.

effekt til produktionssystemet gennem knudepunkterne A–D. Til højre for hver af disse knudepunkter har vi et sæt af *parallelle* forbrug af faktorstrømme for hver af stederne, f. eks. stedet dannet af grenene 11 og 12. Knudepunktsspændingen på hvert af knudepunkterne A–D er negprisen for den tilsvarende produktionsfaktor. Alle pile angiver orienteringen af de simultane positive strømme og spændingsfald (fald i negpris) svarende til fysikkens 2. lov. Lodret illustrerer gren 7 og 8 de to aktiviteter, produktionen af personbiler og produktionen af lastbiler, som i serie forbinder ydelserne fra de forskellige steder, der benyttes af de pågældende aktiviteter. De tilsvarende tekniske koefficienter er præsenteret ved omsætningsforhold for ideelle (lineære og tabsfri) transformere, som omsætter økonomisk effekt fra ydelserne til aktiviteterne. De to aktiviteter, grenene 7 og 8, får tilført økonomisk effekt gennem knudepunkterne E og F fra de to uafhængige markedspåvirkninger repræsenteret ved grenene 5 og 6. Disse grene illustrer de to uafhængige markedspriser (nettoindtægten)  $E_j$  og de positive marginale offeromkostninger  $V_j$ . »Kvadratet« rundt om hele netværket er det fælles externe referenceknudepunkt  $W$ , der blev omtalt i forklaringen på, hvorledes man opnåede ikke-negative priser (ligningerne 18 og 19). Når referenceknudepunktet introduceres på denne måde, opnår man ikke alene, at spændingsfaldet over hver gren kan udtrykkes ved en knudepunktsspænding (negpris), men også at netværket er isoleret på nøjagtig samme måde som det oprindelige økonomiske system.

En mere dybtgående beskrivelse vedrørende formuleringen af økonomiske netværksanalogier og de beregningstekniske fordele, der er knyttet til deres brug, er givet andetsteds (Franksen, 1967).

### *Konklusion*

Formålet med denne artikel har været at belyse en grundlæggende, omend idealiseret økonomisk problemstilling fra en systemteoretisk synsvinkel. Specielt har vi benyttet termodynamiske analogier til at formulere et økonomisk system af fundamentale økonomiske begreber og postulater og elektriske netværksanalogier til at opstille de detaljerede systemmodeller og disses ligevægtsligninger. Det kan yderligere vises, at analysen af disse modeller kan gennemføres ved anvendelse af analogier fra den klassiske mekanik (Franksen, 1967).

I sin inderste kerne er økonomisk styring ensbetydende med konstruktion af beslutningssystemer. Konstruktionsprocesser indebærer fastlæggelse af et flertal af mulige løsninger, af hvilke den bedst egnede udvælges. Jantzen's opdeling af den teknisk-økonomiske konstruktionsproces i »valg

af teknik« og »optimal produktion med en given teknik« tog sigte på at adskille den heuristisk prægede syntese til fastlæggelse af mulige systemkonfigurationer fra den analytisk prægede bestemmelse af den enkelte systemkonfigurations egenskaber. I denne artikel har vi explicit søgt at fremdrage fundamentale egenskaber ved det herigennem afgrænsede analytiske problemkompleks, idet vi benyttede os af nogle af de mest værdifulde og levedygtige ideer, som videnskabelig stræben har frembragt inden for fysikken. Disse ideer ligger til grund for den ingeniørmæssige konstruktion af tekniske systemer og betinger anvendelsen af nutidens avancerede beregningstekniske værktøjer. En påpegning af de samme ideers eksistens og betydning inden for økonomien åbner derfor en mangfoldighed af muligheder for et frugtbart, tværfagligt samarbejde imellem ingeniører og økonomer.

#### Referencer

- Baumol, W. J. (1965): »Economic Theory and Operations Analysis«. Sec. Ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- Brems, H. (1952 a): En sammenligning mellem den gængse og den Jantzen'ske omkostningsteori. *Nationaløkonomisk Tidsskrift*. Bd. 90, 1952, 193–211.
- Brems, H. (1952 b): A Discontinuous Cost Function. *The American Economic Review*. Vol. 42, No. 4, 1952, 577–586.
- Bridgman, P. W. (1927): »The Logic of Modern Physics«, 1927. Reprinted by The MacMillan Co., New York, 1960.
- Bridgman, P. W. (1936): »The Nature of Physical Theory«. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York.
- Callen, H. B. (1960): »Thermodynamics – An Introduction to the Physical Theories of Equilibrium Thermostatistics and Irreversible Thermodynamics«. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Campbell, N. (1921): »What is Science?«, 1921. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1952.
- Cherry, C. (1951): Some General Theorems for Non-Linear Systems Possessing Reactance. *Phil. Mag.*, Ser. 7, Vol. 42, No. 333, Oct. 1951, 1161–1177.
- Dennis, J. B. (1959). »Mathematical Programming and Electrical Networks«. The Technological Press of M.I.T. & John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Dorfman, R., Samuelson, P. and Solow, R. (1958): »Linear Programming & Economic Analysis«. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York.
- Enke, S. (1951): Equilibrium Among Spatially Separated Markets: Solution by Electric Analogue. *Econometria*. Vol. 19, Jan. 1951, 40–47.
- Franksen, O. I. (1965): Kron's Method of Tearing. Presented at the *Fourth Power Industry Computer Application Conf.*, Clearwater, Fla., May 1965.
- Franksen, O. I. and Rømer, M. D. (1963): Information og Cifferregnemaskiner. *Ingeniøren*. No. 7, April 1, 1963, 243–260.

- Franksen, O. I. (1967): *Mathematical Programming in Economics by Physical Analogies*. Presented at the *International Symposium on Mathematical Programming, Princeton University*. Aug. 1967. . . . .
- Granger, C. W. J. and Hatanaka (1964): »Spectral Analysis of Economic Time Series«. Princeton University Press, Princeton, N. J.
- Henderson, J. M. & Quandt, A. E. (1958): »Microeconomic Theory. A Mathematical Approach«. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York.
- Jackson, F. S. and Reed, T. E. (1965): *Programming – A context for Decision-Making in Government and Industry*. *Stanford Research Institute*, Menlo Park, California, Sept. 1965.
- Jantzen, I.: (1924): Voksende udbytte i industrien. *Nationaløkonomisk Tidsskrift*. Bd. 62, 1924, 1–78.
- Jantzen, I. (1939): »Basic Principles of Business Economics and National Calculation«. Gad's Forlag, Copenhagen.
- Jantzen, I. (1954): Stage Unit Cost – Study of a Simplified Model. Presented at the *16th European Meeting of the Econometric Society*, Uppsala, Sweden, August 1954.
- Koopmans, C. (ed.) (1951): »Activity Analysis of Production and Allocation«. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Lanczos, C. (1949): »The Variational Principles of Mechanics«. Univ. of Toronto Press, Toronto.
- Lindsay, R. B. and Margenau, H. (1936): »Foundations of Physics«, 1936. Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1957.
- Madsen, V. (1936): »Regnskabsvæsenets opgaver og problemer – I ny belysning«. Sec. Ed., Gyldendal, Copenhagen.
- Maxwell, J. C. (1891): »A Treatise on Electricity and Magnetism«. Vol. I & II. Third Ed. Reprinted in 1954 by Dover Publications, Inc., New York.
- Millar, W. (1951): Some General Theorems for Non-Linear Systems Possessing Resistance. *Phil. Mag.*, Ser. 7, Vol. 42, Oct. 1951, 1150–1160.
- Orchard-Hayes, W. (1959): General Data Files and Processing Operations. *SHARE Committee on Theory of Information Handling*, Report TIH-1. Reprinted in: *General Information Manual*, E 20–8040, IBM, N. Y., 1959.
- Papoulis, P. (1964): The Meaning of Probability. *IEEE Trans. on Education*. Vol. E-7, No. 2 & 3, June-Sept. 1964, 45–51.
- Pedersen, P. O. (1935): Et produktionsdynamisk problem. *Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi*, Serie nr. 1, Sept. 1935, 28–48.
- Samuelson, P. A. (1938): The Numerical Representation of Ordered Classifications and the Concept of Utility. *The Review of Economic Studies*. Vol. VI, No. 1, Oct. 1938, 65–70.
- Samuelson, P. A. (1947): »Foundations of Economic Analysis«. Harvard Economic Studies, Vol. LXXX, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Samuelson, P. A. (1952): Spatial Price Equilibrium and Linear Programming. *The American Economic Review*. Vol. XLII, No. 3, 283–303.
- Samuelson, P. A. (1953–54): Price of Factors and Goods in General Equilibrium. *The Review of Economic Studies*. Vol. XXI (1), No. 54, 1953–54, 1–20.

- Samuelson, P. A. (1960): Structure of a Minimum Equilibrium System. In »Essays in Economics and Econometrics: A Volume in Honor of Harold Hotelling« by Ralph W. Pfouts (ed.). Chapel Hill: University of North Carolina Press, 1960, 1–33.
- Schneider, E. (1934): »Theorie der Produktion«. Julius Springer Verlag, Wien.
- Schneider, E. (1966): Virksomhedsforskning – i går og i dag. *Management*. No. 9, Dec. 1966, 225–231.
- Stevens, S. S. (1959): Measurement Psychophysics, and Utility. In »Measurement: Definitions and Theories«, by Churchman, C. West and Ratoosh, P. (editors). John Wiley & Sons, Inc., New York, 18–63.
- Trent, H. M. (1955): Isomorphisms between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems. *Journal of the Acoustical Society of America*. Vol. 27, No. 3, May 1955, 500–527.
- Tustin, A. (1957): »The Mechanism of Economic Systems«. Sec. Ed., W. Heinemann, Ltd., London.
- Weyl, H. (1952): »Symmetry«, Princeton University Press, Princeton, N. J.
- Zeuthen, F. (1955): »Economic Theory and Method«. Longmans, Green and Co., Ltd., London.