Parametrisk lineær programmering

Af Sven Danø[*]).

I. *Problemstilling.*

Det generelle lineære programmeringsproblem kan beskrives på formen: find maksimum (eller minimum) af en lineær funktion

$$g = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

under de lineære bibetingelser

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

og ikke-negativitetsbetingelserne

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Som bekendt eksisterer der ingen metode til *analytisk* løsning af sådanne problemer; det er ikke muligt at løse problemet generelt, d.v.s. at finde hvert enkelt x_j – og dermed også præferencefunktionen g – som en funktion af problemets koefficienter a_{ij}, b_i og c_j, således at man umiddelbart ville få løsningen til et konkret numerisk problem ved at indsætte de givne talværdier for koefficienterne i den generelle løsning[1]). Dette hænger, som vi skal se, sammen med, at løsningen reagerer

*) Dr. polit., professor ved Københavns Universitet.

1) Smlgn. den traditionelle type af maksimeringsproblemer under bibetingelser, hvor man ved differentiation finder et sæt nødvendige maksimumsbetingelser, der sammen med bibetingelserne giver en analytisk løsning; specificerer man funktionernes form med talværdier for koefficienterne, får man den konkrete numeriske løsning.

Parametrisk lineær programmering

Af Sven Danø*).

I. *Problemstilling.*

Det generelle lineære programmeringsproblem kan beskrives på formen: find maksimum (eller minimum) af en lineær funktion

$$g = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

under de lineære bibetingelser

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

og ikke-negativitetsbetingelserne

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Som bekendt eksisterer der ingen metode til *analytisk* løsning af sådanne problemer; det er ikke muligt at løse problemet generelt, d.v.s. at finde hvert enkelt x_j – og dermed også præferencefunktionen g – som en funktion af problemets koefficienter a_{ij}, b_i og c_j, således at man umiddelbart ville få løsningen til et konkret numerisk problem ved at indsætte de givne talværdier for koefficienterne i den generelle løsning[1]. Dette hænger, som vi skal se, sammen med, at løsningen reagerer

*) Dr. polit., professor ved Københavns Universitet.

[1]) Smlgn. den traditionelle type af maksimeringsproblemer under bibetingelser, hvor man ved differentiation finder et sæt nødvendige maksimumsbetingelser, der sammen med bibetingelserne giver en analytisk løsning; specificerer man funktionernes form med talværdier for koefficienterne, får man den konkrete numeriske løsning.

diskontinuert på ændringer i hver enkelt af koefficienterne, idet sættet af positive (basis-)variable bliver et andet, når den pågældende koefficient passerer en bestemt kritisk værdi.

Man er derfor henvist til *numeriske* løsningsmetoder – i første række simplex-metoden[2]) – hvor man på forhånd må specificere talværdierne af koefficienterne i det konkrete problem, der skal løses.

Det har imidlertid – i relation til et sådant konkret problem – ofte interesse at undersøge, hvad der sker med den optimale løsning, hvis en eller flere af koefficienterne antager en anden værdi; hvis problemet f. eks. går ud på at maksimere en virksomheds gevinst under kapacitetsbegrænsninger, vil løsningen blive påvirket af en given ændring af en af de priser, der indgår i c_j'erne i præferencefunktionen. Eftersom man ikke kan finde en analytisk løsning, hvori koefficientændringen umiddelbart kan indsættes, kunne det synes, som om man da var henvist til at begynde helt forfra med simplex–beregningerne. Så galt er det dog ikke. Man kan nemlig gennemføre beregningerne efter simplex-metoden med en enkelt koefficient som *uspecificeret parameter* og da undersøge, indenfor hvilket interval omkring den pågældende koefficients oprindelige værdi den dertil svarende løsning (eller rettere: den dertil svarende basis) stadig er optimal; en undersøgelse af denne karakter, hvor man altså bestemmer en løsnings følsomhed m.h.t. ændringer i en koefficient ud fra udgangspunktet, betegner man ofte *sensitivitetsanalyse*. Ved en mere omfattende undersøgelse kan man lade parameteren gennemløbe alle værdier inden for det interval, hvor den har nogen mening (f.eks. fra nul og opefter), og da bestemme den følge af optimale basisløsninger, man får, efterhånden som parameteren passerer gennem successive kritiske værdier. Man taler da om *parametrisk lineær programmering*[3]) [4]).

[2]) For en simpel fremstilling af simplex-metoden se f. eks. Sven Danø, *Linear Programming in Industry: Theory and Applications*, Wien & New York: Springer-Verlag, 1960 el. senere.

[3]) Smlgn. begrebet *komparativ statik* i den økonomiske teori, hvor man sammenligner løsningerne til en ligevægtsmodel for alternative værdier af en parameter (f. eks. pengeudbudet i en rentemodel), eller – når man er interesseret i små marginale ændringer – differentierer modellen m. h. t. parameteren.

[4]) Se f. eks. S. Vajda, *Mathematical Programming*, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co., 1961 (Ch. 9); en mere detaljeret fremstilling findes i E. O. Heady & W. Candler, *Linear Programming Methods*, Ames, Iowa: Iowa State College Press, 1958 (Ch. 7, 8 og 16). – Se også Jan Mossin, »Optimalitetsbetingelser ved parametervariasjon i lineær programmering«, *Erhvervsøkonomisk Tidsskrift*, 30. årg., nr. 1, 1966.

Der er principielt intet i vejen for, at to eller flere koefficienter samtidigt kan behandles som uspecificerede parametre[5]), men jo flere sådanne parametre der optræder i problemet, des mere komplicerede bliver resultaterne m.h.t. de kombinationer af parameterintervaller, indenfor hvilke de forskellige parametriske løsninger er optimale. Vi skal derfor i det følgende begrænse os til at operere med en enkelt parameter ad gangen.

Lad os som udgangspunkt betragte følgende eksempel (der f. eks. kan tolkes som et diætproblem): find minimum af

$$g = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \tag{1}$$

under bibetingelserne

$$2x_1 \qquad\quad + 4x_3 \geqslant 5 \tag{2}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 4 \tag{3}$$

og ikke-negativitetsbetingelserne

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0. \tag{4}$$

Ulighederne (2) – (3) kan omdannes til ligninger ved hjælp af ikkenegative restvariable y_1 og y_2, der har koefficienten -1 i henholdsvis (2) og (3). Den optimale basis består da af x_2 og x_3. Løser vi nemlig (2) – (3) for disse basisvariable, og indsætter vi løsningen i (1), får vi

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{12}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ x_3 &= \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}y_1 \\ g &= \frac{67}{12} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{7}{12}y_1 + \frac{2}{3}y_2. \end{aligned} \tag{5}$$

For $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ giver konstantleddene en løsning, der er positiv i basisvariablerne og opfylder simplex-kriteriet, og som derfor er optimal. – Ligningerne (5) kunne også have været stillet op i en simplex-tavle.

Vi skal nu se, hvad der sker, hvis en af koefficienterne i problemet (1) – (3) får lov at variere.

II. *Ændringer i a_{ij}.*

Lad os f. eks. variere på koefficienterne a_{11} (=2, koefficienten til x_1 i den første bibetingelse). Det kan gøres på forskellige måder: man kan

[5]) Jfr. Mossin, *op. cit.*

enten sætte $a_{11} = 2 + t$, hvor parameteren t da er en additiv ændring i forhold til den oprindelige værdi, eller man kan lade t være en multiplikativ ændring ($a_{11} = 2 \cdot t$); endelig kan man lade parameteren t repræsentere selve koefficienten ($a_{11} = t$). Resultatet bliver det samme. Vi vælger den første metode. Med $a_{11} = 2 + t$ i (2) og samme basisvariable som ovenfor får vi da – opstillet i en simplextavle – basisløsningen

			0	4	2	3	0	0
			P_0	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
I	2	x_2	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{12}t$	1		$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$
	3	x_3	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t$		1	$-\frac{1}{4}$	
	g		$\frac{67}{12}$	$-\frac{3}{2}+\frac{7}{12}t$	0	0	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{2}{3}$

der for $t = 0$ er identisk med (5) ovenfor.

Denne løsning er ikke-negativ for alle værdier af t, jfr. P_0-kolonnen, og simplex-kriteriet er opfyldt, så længe simplex-koefficienten i x_1-kolonnen er ikke-positiv,

$$-\frac{3}{2}+\frac{7}{12}t \leqslant 0 \text{ eller } t \leqslant \frac{18}{7}.$$

For alle værdier af t op til denne kritiske værdi er den parametriske løsning i tavle I altså optimal. Dersom koefficienten a_{11} ifølge problemets natur (som f. eks. i et diætproblem) kun kan være positiv eller nul, har det kun interesse at betragte værdier af t fra -2 og opefter. I dette interval er ikke blot basisvariablerne de samme (x_2, x_3); deres værdier og dermed også værdien af g er også uafhængige af t, jfr. kolonne P_0. Den optimale løsning er altså helt ufølsom for ændringer i t indenfor intervallet.

Når t passerer den kritiske værdi *18/7*, bliver det fordelagtigt at trække x_1 ind som basisvariabel. Den erstatter da i basen den variabel, der først bliver $=0$, når x_1 vokser; for $t = 18/7$ er det x_3, der sætter denne grænse. Med den nye basis får vi da følgende løsning:

			0	4	2	3	0	0
			P_0	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
II	2	x_2	$\frac{4t-2}{3t+6}$		1	$\frac{t-6}{3t+6}$	$\frac{2}{3t+6}$	$-\frac{1}{3}$
	4	x_1	$\frac{5}{t+2}$	1		$\frac{4}{t+2}$	$-\frac{1}{t+2}$	0
		g	$\frac{8t+56}{3t+6}$	0	0	$-\frac{7t-18}{3t+6}$	$-\frac{8}{3t+6}$	$-\frac{2}{3}$

Denne løsning, hvor t nu også optræder i kolonne P_0, er positiv og opfylder simplex-kriteriet for alle $t \geqslant 18/7$. I dette åbne interval består den optimale basis af x_1 og x_2, men deres værdier og dermed også værdien af præferencefunktionen vil afhænge af parameteren t; g er en aftagende funktion af t (og dermed også af a_{11}).

Vi kan da sammenfatte resultaterne i følgende tabel:

Interval	Simplex-tavle	Optimal basis	g	dg/dt $(=dg/da_{11})$
$(-2\leqslant)t\leqslant 18/7$, $(0\leqslant)a_{11}\leqslant 32/7$	*I*	x_2, x_3	$\frac{67}{12}$	0
$18/7\leqslant t$, $32/7\leqslant a_{11}$	*II*	x_1, x_2	$\frac{8t+56}{3t+6}$	$\frac{-120}{(3t+6)^2}(<0)$

En tilsvarende undersøgelse kan foretages for hver af de andre a_{ij}'er i problemet.

Programmering med et parametrisk a_{ij} vil særlig have praktisk betydning ved problemer, hvor a_{ij}'erne udtrykker tekniske produktionskoefficienter (f. eks. maskintid pr. produceret enhed), som man enten har mulighed for at variere indenfor visse grænser ved at ændre lidt på produktionsteknikken, eller som p.gr.a. mere eller mindre »tilfældige« variationer ikke kan bestemmes nøjagtigt.

III. *Ændringer i b_i.*

Lad os nu i stedet indføre parametervariation i en af højresiderne i bibetingelserne, f. eks. sætte $b_1 = 5 + t$. Simplex-tavle I bliver da:

			0	4	2	3	0	0
			P_0	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
I'	2	x_2	$\frac{-t+11}{12}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$
	3	x_3	$\frac{t+5}{4}$	$\frac{1}{2}$		1	$-\frac{1}{4}$	
	g		$\frac{7t+67}{12}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{2}{3}$

der for $t = 0$ giver (5). Det ses, at løsningen er ikke-negativ i basisvariablerne for $-5 \leqslant t \leqslant 11$. Simplex-kriteriet er altid opfyldt, da t ikke optræder i simplex-koefficienterne (tavlens nederste række); når bibetingelsernes højresider varierer parametrisk, er det kun P_0-kolonnen – altså selve løsningen – der bliver berørt. Indenfor dette interval er den optimale basis altså den samme, men værdierne afhænger af parameteren; vi har således $dg/dt = 7/12$.

For $t < -5$ bliver $b_1 < 0$. Det har da kun interesse at se på, hvad der sker, når t bliver større end 11. Det er da klart, at x_2 må gå ud af basen, da den bliver negativ. M.h.t. valg af indgaende variabel giver simplex-koefficienterne i nederste linje ingen vejledning, da de alle er negative. Vi bruger da i stedet et valgkriterium, der er kendt fra den s.k. *duale simplex-metode*[6]). Denne løsningsmetode for lineær programmering tager udgangspunkt i en simplex-tavle, hvor simplex-kriteriet er opfyldt, men hvor nogle af basisvariablerne er negative. Som udgående variabel vælges da en negativ basisvariabel (her altså x_2); den indgående variabel bestemmer man herefter som den, i hvis kolonne forholdet mellem simplex-koefficienten og tallet i den udgående variabels række (dog kun forsåvidt dette tal er negativt) er numerisk mindst – i dette tilfælde y_2[7]). Overgangen fra en tavle til den næste foregår i øvrigt på sædvanlig måde, således at den nye tavle også repræsenterer en basisløsning til problemet. Man når da efterhånden frem til en optimal løsning, idet man skridt for skridt fjerner negative variable fra basisløsningen. – Idet x_2 altså byttes om med y_2 som basisvariabel, får vi da tavle II′:

6) Se f. eks. Vajda, *op. cit.*, pp. 99 ff.

7) Metoden ses på alle punkter at være symmetrisk med den almindelige simplex-metode, idet der blot er »byttet om på lodret og vandret«, således at det i virkeligheden er dualproblemet, man løser; jfr. specielt, at kolonnen P_0 svarer til simplex-koefficienterne i dualproblemet og omvendt.

			0	4	2	3	0	0
			P_0	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
II'	0	y_2	$\frac{t-11}{4}$	$-\frac{3}{2}$	-3		$-\frac{1}{4}$	1
	3	x_3	$\frac{t+5}{4}$	$\frac{1}{2}$		1	$-\frac{1}{4}$	
		g	$\frac{3t+15}{4}$	$-\frac{5}{2}$	-2	0	$-\frac{3}{4}$	0

Den hertil svarende løsning er ikke-negativ i basisvariablerne og optimal for alle $t \geqslant 11$.

Vi har da:

Interval	Simplex-tavle	Optimal basis	g	dg/dt $(=dg/db_1)$
$-5 \leqslant t \leqslant 11$, $0 \leqslant b_1 \leqslant 16$	I'	x_2, x_3	$\frac{7t+67}{12}$	7/12 (>0)
$11 \leqslant t$, $16 \leqslant b_1$	II'	x_3, y_2	$\frac{3t+15}{4}$	3/4 (>0)

Man ser, at præferencefunktionen i dette tilfælde vokser stykvis lineært med t, d.v.s. med b_1. Differentialkvotienten $dg/dt = dg/db_1$ vil i regelen have en ganske bestemt tolkning alt efter problemets natur.

Hvis (1) – (4) f. eks. er et diætproblem, vil en forøgelse af b_1 – der f. eks. repræsenterer en stipuleret vitaminmængde – med 1 enhed fra 5 til 6 hæve omkostningerne g med 7/12, som da bliver grænseomkostningerne ved at fremstille en enhed mere af det første vitamin[8]. Tallet 7/12 genfindes som simplex-koefficienten til den tilsvarende rest variabel y_1 i tavle I′: øges den fra 0 til 1, svarer det til, at højresiden af (2) bliver 1 enhed mindre. Den tilsvarende variabel i dualproblemet har i optimum ligeledes værdien 7/12 og kan tolkes på samme måde.

Et andet eksempel har man i udledningen af omkostningsfunktionen under en lineær produktionsmodel, idet omkostningerne minimeres under hensyn til givne kapacitetsgrænser og for given parametrisk totalproduktion i de aktiviteter, der står til rådighed. En sådan undersøgelse foretages ved parametrisk programmering som vist ovenfor. Omkostningerne ved den optimale produktion bliver da en stykvis lineær funktion

[8]) Jfr. Danø, *op. cit.*, pp. 92 ff.

af den højreside-parameter, der repræsenterer produktionsmængden, og dg/dt bliver slet og ret grænseomkostningerne[9]).

Hvis endelig problemet går ud på gevinstmaksimering under kapacitetsgrænser, bliver dg/db_1 at tolke som mer-gevinsten ved en udvidelse af kapaciteten b_1 med en enhed, d.v.s. som skyggeprisen på den pågældende kapacitetsfaktors tjenester (f. eks. maskintimer)[10]).

IV. *Ændringer i c_j.*

Lad endelig c_1, koefficienten til x_1 i præferencefunktionen (1), blive erstattet med en parameter, $c_1 = 4+t$.

På tilsvarende måde som ovenfor får vi da følgende basisløsninger for aftagende værdier af parameteren t, idet den basis (I''), der svarer til (5), nu kun er optimal for værdier af t *over* en vis grænse:

			0	$4+t$	2	3	0	0
			P_0	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
I''	2	x_2	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$
	3	x_3	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$		1	$-\frac{1}{4}$	
	g		$\frac{67}{12}$	$-\frac{2t+3}{2}$	0	0	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{2}{3}$
II''	$4+t$	x_1	$\frac{11}{6}$	1	2		$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$
	3	x_3	$\frac{1}{3}$		-1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	g		$\frac{11t+50}{6}$	0	$2t+3$	0	$\frac{t-2}{6}$	$-\frac{2t+5}{3}$
III''	$4+t$	x_1	$\frac{5}{2}$	1		2	$-\frac{1}{2}$	
	0	y_2	1		-3	3	-1	1
	g		$\frac{5t+20}{2}$	0	-2	$2t+5$	$-\frac{t+4}{2}$	0

[9]) Jfr. Sven Danø, *Industrial Production Models: A Theoretical Study*, Wien & New York: Springer-Verlag, 1966, pp. 35 ff. (jfr. også p. 198).

[10]) Jfr. Danø (*op. cit.*, 1960), pp. 92 ff., og Danø (*op. cit.*, 1966), pp. 39 ff.

De kritiske værdier for t er $-3/2$ i tavle I″ og $-5/2$ i tavle II″, og vi får da:

Interval	Simplex-tavle	Optimal basis	g	dg/dt $(=dg/dc_1)$
$-4 \leqslant t \leqslant -5/2$, $0 \leqslant c_1 \leqslant 3/2$	*III″*	x_1, y_2	$\frac{5t+20}{2}$	$\frac{5}{2}$ (>0)
$-5/2 \leqslant t \leqslant -3/2$, $3/2 \leqslant c_1 \leqslant 5/2$	*II″*	x_1, x_3	$\frac{11t+50}{6}$	$\frac{11}{6}$ (>0)
$-3/2 \leqslant t$, $5/2 \leqslant c_1$	*I″*	x_2, x_3	$\frac{67}{12}$	0

Dersom problemet tolkes som et diætproblem, vil omkostningerne ved den optimale diæt altså vokse stykvis lineært med c_1 – d.v.s. prisen på den første ingrediens, der indgår i blandingen – indtil c_1 når den kritiske værdi $5/2$, hvor x_1 går ud som basisvariabel, således at dens pris ikke længere influerer på omkostningerne.

En tilsvarende procedure kan anvendes til at udlede en virksomheds udbudskurve, når en vare fremstilles i et antal lineære aktiviteter under en kapacitetsbegrænsning; man maksimerer da gevinsten under denne begrænsning med salgsprisen som parameter. Prisen kommer her til at indgå i samtlige c_j'er, der jo repræsenterer dækningsbidragene (pris minus variable stykomkostninger) i de enkelte aktiviteter. De skiftende basisløsninger m.h.t. produktmængden for voksende salgspris giver da umiddelbart udbudskurven[11]).

Eftersom priserne (produkt- og faktorpriserne) og dermed c_j'erne vel er de koefficienter, der er mindst stabile over tiden i et produktionsplanlægningsproblem, er parametrisk programmering af størst praktisk betydning ved prisvariationer, d.v.s. når parameteren optræder i præferencefunktionens koefficienter. Simplex-beregningerne er her særlig enkle, idet – som vi har set i tavle I″–III″ – parameteren kun vil forekomme i simplex-tavlernes nederste linje. Som følge heraf bliver det ikke væsentligt mere besværligt at operere med flere prisparametre på samme tid for at bestemme, hvor sensitiv en given optimal løsning er m.h.t. ændringer i de pågældende priser[12]).

[11]) Jfr. Danø (*op. cit.*, 1966), pp. 38 f.

[12]) En empirisk sensitivitetsanalyse på et programmeringsproblem af diæt-typen er foretaget i Sven Danø, »Linear Programming in Ice Cream Making«, *Nordisk Tidsskrift for Teknisk Økonomi*, 1955, pp. 168–173. (Se også Danø (*op. cit.*, 1960), pp. 97–99). Samtlige c_j'er i dette omkostningsminimeringsproblem er her behandlet

Et specielt eksempel på parametrisk programmering har man i den velkendte »M-metode« ved lineære minimeringsproblemer, hvor man for at få en ikke-negativ initial basisløsning indfører kunstvariable (»artificial variables«, kunstige restvariable); disse variable har ingen meningsfuld tolkning i relation til det konkrete problem, og for at sikre, at de bliver kastet ud af basen under beregningerne, tildeler man dem da en meget stor positiv, men iøvrigt uspecificeret koefficient *M* i den funktion, der skal minimeres. Parameteren *M* kommer da til at optræde i simplex-koefficienterne, og man når til sidst frem til en basisløsning, der tilfredsstiller simplex-kriteriet, når *M* tillægges en tilstrækkelig stor værdi[13].

som uspecificerede parametre, og simplex-kriteriet (ud fra den basisløsning, der er optimal ved de gældende priser) giver da umiddelbart et antal lineære uligheder i prisparametrene, som må være respekteret, hvis løsningen skal vedblive at være optimal.

[13]) Se f. eks. Dano (*op. cit.*, 1960), pp. 71 ff.