

Salling-Super analysen.

Af J. PETER LASSEN*)

En køteoretisk analyse af et supermarkeds kundefunktion.

1. indledning. – 2. analyse af kundeankomsterne til forretningen. – 3. analyse af kundernes opholdstid i forretningen i færd med at foretage indkøb. – 4. analyse af kasseapparatfunktionen. – 4.1. problemformulering og analyseteknik. – 4.2. ankomstprocessen til kasseapparaterne. – 4.3. ekspeditionsprocessen ved kasseapparaterne. – 4.4. strukturen i køsystemet. – 4.5. erlangfordelinger og gammafordelinger. – 4.6. formulering af en model for kasseapparatfunktionen. – 5. simulation.

1. Indledning.

Betegnelsen supermarked anvendes i det følgende om en selvbetjeningsforretning, som forhandler fødevarer og non-food varer, der har snæver tilknytning til husholdning.

Analysen blev foretaget i supermarkedet SALLING-SUPER i Aarhus med kontrolanalyse af kasseapparatfunktionen i supermarkedet FØTEX, Guldsmedegade, Aarhus.

SALLING-SUPER blev åbnet i foråret 1963 i en høj kælderetage til Stormagasinet SALLING. I løbet af sommeren blev det klart, at SALLING-SUPER ikke udviklede sig helt tilfredsstillende. Stormagasinet SALLINGs direktion og jeg blev enige om at foretage en vidtspændende undersøgelse af forretningen, der bl. a. skulle omfatte analyse af målsætning, politikker, kundeunderlag, salgsfordeling på uge og måned, vareudvalg og vareomsætning samt en analyse af kundefunktionen.

Direktionen for Stormagasinet SALLING har givet mig tilladelse til at publicere resultaterne af de køteoretiske undersøgelser, som førte til opstilling af en model. Kun ganske få operationsanalytiske undersøgelser foretaget i private virksomheder er blevet publiceret. Det er derfor glæde-

*) Cand. oec., Lausanne, Schweiz.

Salling-Super analysen.

Af J. PETER LASSEN*)

En køteoretisk analyse af et supermarkeds kundefunktion.

1. indledning. – 2. analyse af kundeankomsterne til forretningen. – 3. analyse af kundernes opholdstid i forretningen i færd med at foretage indkøb. – 4. analyse af kasseapparatfunktionen. – 4.1. problemformulering og analyseteknik. – 4.2. ankomstprocessen til kasseapparaterne. – 4.3. ekspeditionsprocessen ved kasseapparaterne. – 4.4. strukturen i køsystemet. – 4.5. erlangfordelinger og gammafordelinger. – 4.6. formulering af en model for kasseapparatfunktionen. – 5. simulation.

1. Indledning.

Betegnelsen supermarked anvendes i det følgende om en selvbetjeningsforretning, som forhandler fødevarer og non-food varer, der har snæver tilknytning til husholdning.

Analysen blev foretaget i supermarkedet SALLING-SUPER i Aarhus med kontrolanalyse af kasseapparatfunktionen i supermarkedet FØTEX, Guldsmedegade, Aarhus.

SALLING-SUPER blev åbnet i foråret 1963 i en høj kælderetage til Stormagasinet SALLING. I løbet af sommeren blev det klart, at SALLING-SUPER ikke udviklede sig helt tilfredsstillende. Stormagasinet SALLINGs direktion og jeg blev enige om at foretage en vidtspændende undersøgelse af forretningen, der bl. a. skulle omfatte analyse af målsætning, politikker, kundeunderlag, salgsfordeling på uge og måned, vareudvalg og vareomsætning samt en analyse af kundefunktionen.

Direktionen for Stormagasinet SALLING har givet mig tilladelse til at publicere resultaterne af de køteoretiske undersøgelser, som førte til opstilling af en model. Kun ganske få operationsanalytiske undersøgelser foretaget i private virksomheder er blevet publiceret. Det er derfor glæde-

*) Cand. oec., Lausanne, Schweiz.

ligt, at direktionen for koncernen, der omfatter to SALLING-stormagasiner og kæden af FØTEX-supermarkeder, har ønsket, at resultaterne af de foretagne operationsanalytiske undersøgelser ikke skal forholdes en større offentlighed, som kan have interesse i at få kendskab hertil.

Et supermarked forekommer umiddelbart at være et velegnet objekt for køteoretiske analyser. Dette til trods er der, så vidt mig bekendt, tidligere kun publiceret een køteoretisk analyse (1) af et supermarked.

De foretagne køteoretiske undersøgelser formål var at fastlægge fordelingslovene for:

- kundernes ankomst til supermarkedet,
- kundernes opholdstid i færd med at foretage indkøb,
- kundernes ankomst til kasseapparaterne,
- ventetid for kunderne ved kasseapparaterne,
- ekspeditionstid ved kasseapparaterne.

I denne artikel fremlægges eksempler på resultater, som fremkom ved analyserne.

2. *Analyse af kundernes ankomst til forretningen.*

Indsamlingen af materialet vedrørende kundeankomsterne blev foretaget med særligt henblik på at fastlægge travle perioder med stationær ankomstproces til brug for analysen af kasseapparatfunktionen, som gav de fleste problemer for ledelsen.

Materialet, der skulle belyse fordelingen af kundeankomsterne, blev indsamlet over en uge, hvor antallet af ankomster til forretningen pr. 30 sekunder blev registreret. Det indsamlede materiale viste klart, at der ikke var tale om en konstant tilstrømning til forretningen, men om en stadigt skiftende kundestrøm, der varierede fra 0 til 9 kundeankomster pr. 30 sekunder.

Kundebegrebet defineredes ud fra den betragtning, at registreringen af ankomsterne skulle omfatte selvstændigt betalende kunder. Denne begrebsfastlæggelse førte til, at alle voksne personer, som ankom til forretningen, blev anset som kunder, med mindre snævre familiebånd til andre samtidigt ankommende kunder var evidente. Et barn, som ankom til forretningen alene, blev anset som kunde.

På grundlag af materialet konstateredes at forretningens travle perioder lå om fredagen efter kl. 16.00 og om lørdagen mellem kl. 10.00 og kl. 12.30. Ankomstprocessen kan beskrives som en stationær poissonproces for de to perioder. Overensstemmelsen mellem den observerede og den teoretiske fordeling er god. Sandsynligheden for, at der ankommer netop n kunder pr. tidsenhed

$$p_n(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^n \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{n!} \quad \text{for } n = 0.1.2. \dots,$$

hvor λ angiver det gennemsnitlige antal kundeankomster pr. TE , og hvor tidsintervallet 30 sekunder anvendes som tidsenhed (2), blev for de to observationsperioder beregnet til

$$\text{fredag} \quad p_n = \frac{1,72^n \cdot e^{-1,72}}{n!} \quad \text{for } n = 0.1.2. \dots$$

$$\text{lørdag (fig. 1)} \quad p_n = \frac{2,39^n \cdot e^{-2,39}}{n!} \quad \text{for } n = 0.1.2. \dots$$

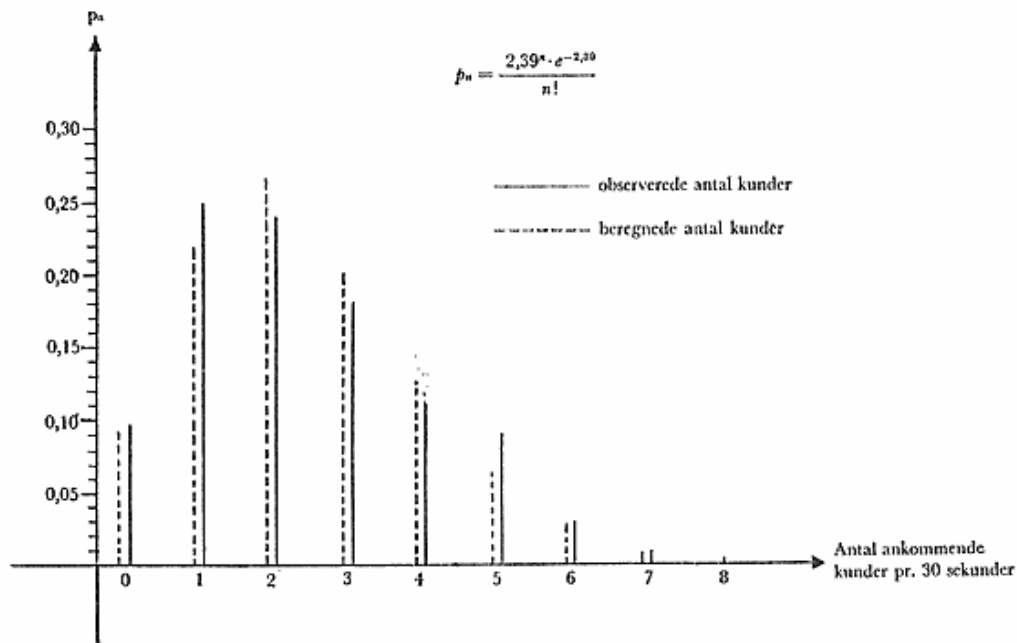


Fig. 1. Ankomstprocessen lørdag.

I de betragtede travle perioder kan ankomstprocessen til SALLING-SUPER derfor beskrives ved en stationær poissonproces, hvilket ikke er overraskende, idet man ikke på forhånd forventer en årsagsforbindelse mellem ankomende kunder til et supermarked, med mindre specielle forhold gør sig gældende som f. eks. besøg af husmoderforeninger og lignende.

Det blev derfor besluttet at henlægge undersøgelsen af kasseapparatfunktionen til efterfølgende fredage efter kl. 16.00 og lørdage mellem kl. 10.00 og kl. 12.30.

3. *Analyse af kundernes opholdstid i forretningen i færd med at foretage indkøb.*

Ved en analyse af kundefunktionen i et supermarked er det væsentligt at bestemme længden og fordelingen af den tid, kunderne opholder sig i forretningen i færd med at foretage indkøb.

Forretningens samlede areal minus det areal, der optages af gondoler og udstillingsmontrer, minus det areal, der optages af kasseapparater med kunder, som venter i kø foran disse, fastlægger grænsen for, hvor mange kunder der samtidigt kan opholde sig i forretningen i færd med at foretage indkøb.

Man er endnu ikke nået til maksimal kapacitetsudnyttelse i SALLING-SUPER, men det må erkendes, at der i fremtiden vil kunne opstå problemer på dette punkt (jfr. udviklingen inden for de amerikanske supermarkeder), og at det i fremtiden kan blive nødvendigt at foretage gennemgribende revisioner af forretningen.

Indkøbstidens længde defineredes som tidsforskellen mellem ankomst til forretningen og ankomst til kø eller kasseapparat. De fleste kunder, der ankommer til forretningen, tager en indkøbskurv ved indgangen, og dette forhold blev udnyttet ved analysen, idet 50 kurve blev mærket med fortløbende numre. En observatør, som sad ved indgangen, noterede tidspunktet (inden for 30 sekunders intervaller), når kunderne tog de nummererede kurve. En anden observatør noterede tidspunktet (ligeledes inden for 30 sekunders intervaller) for disse kunders ankomst til kø eller kasseapparat.

Indkøbstiden blev undersøgt for 389 kunder, og resultatet af dette materiales fordeling med hensyn til indkøbstidens længde er indtegnet på fig. 2, hvor fordelingen af kundernes indkøbstid på 60 sekunders intervaller kan aflæses. Kunderne anvendte gennemsnitligt 8,9 minutter til et indkøb. På grund af den tydelige højreskævhed i den entoppede fordeling opstilledes hypotesen, at materialet kunne beskrives ved en gammafordeling. Følgende tæthedsfunktion beregnedes herefter for indkøbstidsfordelingen

$$f(t) = \frac{0,341^{3,01}}{\Gamma(3,04)} \cdot t^{2,01} \cdot e^{-0,341 \cdot t} \quad \text{for } t = 0.1.2. \dots$$

Tilpasningen mellem den observerede fordeling og den beregnede gammafordeling blev testet med χ^2 -test og viste en udmærket overensstemmelse, hvorefter der konkluderes, at indkøbstidsfordelingen i supermarkedet fulgte en gammafordeling.

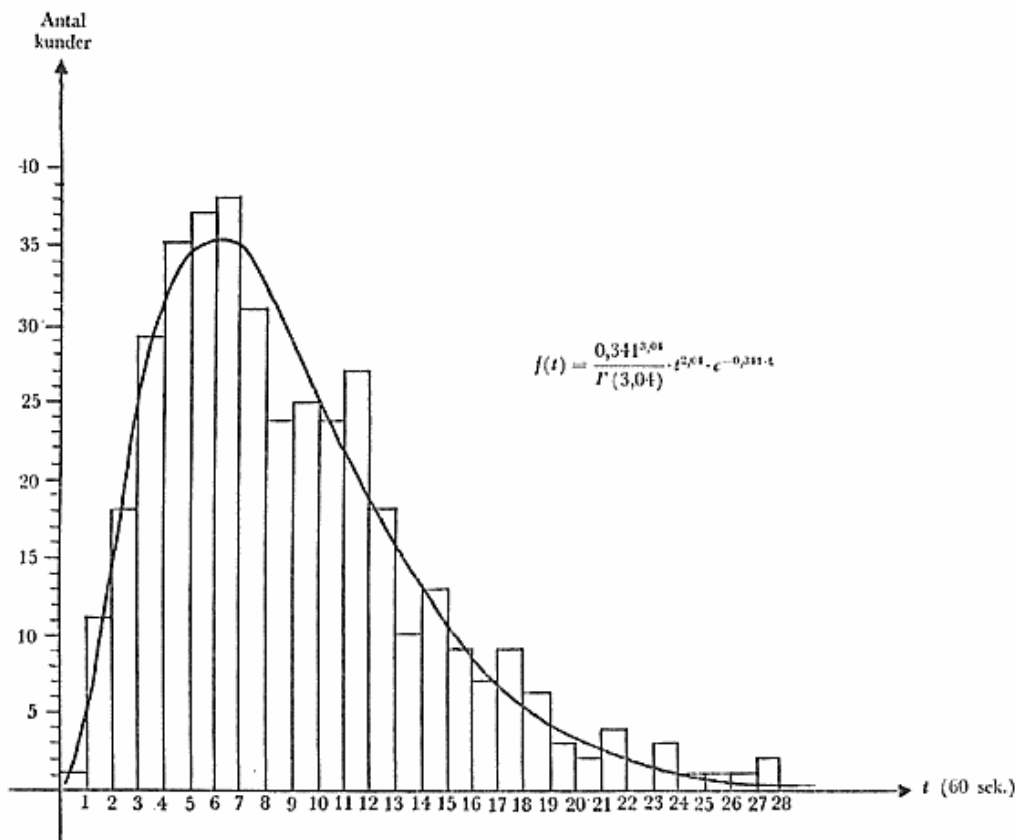


Fig. 2. Indkøbstiden fordelt med intervaller på 60 sekunder sammenstillet med gammafordelingen.

Denne gammafordeling kan transformeres til en erlangfordeling af tredje orden med en gennemsnitlig fasetid på 3 minutter. Gammafordelingen og erlangfordelingen omtales nærmere i afsnittet om kassapparatfunktionen.

4. Analyse af kassapparatfunktionen.

4.1. Problemformulering og analyseteknik.

Kasseapparaterne danner en flaskehals, hvorigennem alle kunder skal passere, og kapaciteten er sædvanligvis dimensioneret således, at ikke alle kunder kan opnå straksekspedition, men at nogle må tage opstilling i kø før ekspedition.

Betjeningen af kunderne ved kasseapparaterne i et supermarked giver ledelsen grund til mange overvejelser af hensigtsmæssigheden af det indrettede system. Ledelsen må formulere en politik for betjeningen af kunderne med hensyn til hastighed og service, som disse kan acceptere. Denne

politik må bl. a. omfatte en fastlæggelse af kundernes middelvekstid i kø, sandsynligheden for straksekspedition, gennemsnitlige antal optagne ekspedienter etc. sat i relation til kundeankomstintensiteten og antal åbne kasseapparater.

Analysen som den foreliggende vil kunne bidrage til opstilling af beslutningsmodeller, som ledelsen af supermarkeder kan anvende ved betjeningen af kunderne.

Køsystemet bestod i travle perioder af fire parallelt forbundne ekspedienter (kasseapparater), som kunderne opsøgte for at blive betjent. De henvendte sig straks til den af ekspedienterne, som var ledig. Var alle ekspedienter beskæftigede, stillede kunden sig i en kø og forlod altså ikke systemet, fordi hun skulle vente. Kødisciplinen var retfærdig (naturlig), hvilket betyder, at kunderne forlader køen i den rækkefølge, hvori de tog ophold. Kølængden sættes af praktiske grunde lig med uendelig. Der var ikke prioritering af nogen kundegruppe. Prioritering af kunde grupper forekommer i visse supermarkeder, hvor man har indrettet ekspreskasser, der betjener kunder, som har købt f. eks. mindre end fire vareenheder.

Fastlæggelse af ankomstprocessen til og betjeningsprocessen ved kasseapparaterne blev foretaget ved en raffineret teknik.

Et Bolex 16 mm filmkamera med diverse påmonterede motorer gjorde det muligt at fotografere kundernes ankomst til og betjening ved tre af kasseapparaterne med nøjagtigt et sekunds mellemrum mellem hver enkeltoptagelse. Ca. 50.000 enkeltoptagelser gjorde det muligt at fastlægge en række vigtige parametre for kundefunktionen ved kasseapparaterne, på grundlag af hvilke hypoteser for ankomstprocessen og betjeningsprocessen kunne opstilles.

Et udnit af grundmaterialet viser hvilke data (billednumre), der blev hentet fra filmene:

- a) kundernes ankomst til kø
- b) kundernes afgang fra kø
- c) kundernes ankomst til kasseapparatet = den påbegyndte ekspedition
- d) afslutning af kassedamens ekspedition af kunden
- e) kassedamen påbegynder en periode, hvor hun ikke betjener en kunde
- f) kassedamen afslutter den periode, hvor hun ikke har betjent en kunde.

Tabel 1. Udsnit af tabel med registrerede oplysninger vedr. kasseapparatfunktionen.

ankomst til kø	afgang fra kø	køtid	ekspedi- tions- begyn- delse	ekspedi- tions- afslut- ning	ekspedi- tions- tid	ekspedi- dient bliver ledig	ekspedi- ent afslutter ledig periode	ledig ekspedi- enttid
billednr.		sek.	billednr.		sek.	billednr.		sek.
854 – 900		46	900 – 935		35			
863 – 935		72	935 – 973		38			
927 – 973		46	973 – 1005		32	1005 – 1023		18
1023 – 1023		0	1023 – 1062		39			
1055 – 1062		7	1062 – 1120		58	1120 – 1213		93
1213 – 1213		0	1213 – 1254		41			
1228 – 1254		26	1254 – 1310		56	1310 – 1344		34

4.2. Ankomstprocessen til kasseapparaterne.

Efter bearbejdelse af grundmaterialet opstilledes hypotesen, at ankomstprocessen til kasseapparaterne kunne approksimeres til en poissonfordeling. For de fire dage, som analysen strakte sig over, får poissonfordelingerne følgende form:

$$p_n = \frac{1,11^n \cdot e^{-1,11}}{n!} \quad \text{for } n = 0.1.2. \dots \quad (\text{SALLING-SUPER})$$

$$p_n = \frac{1,36^n \cdot e^{-1,36}}{n!} \quad \text{for } n = 0.1.2. \dots \quad (\text{kontrolanalyse i FØTEX})$$

$$p_n = \frac{1,40^n \cdot e^{-1,40}}{n!} \quad \text{for } n = 0.1.2. \dots \quad (\text{SALLING-SUPER})$$

$$p_n = \frac{1,54^n \cdot e^{-1,54}}{n!} \quad \text{for } n = 0.1.2. \dots \quad (\text{SALLING-SUPER})$$

Hypotesen blev testet ved en χ^2 -test og blev ikke forkastet, hvorefter det konkluderedes, at ankomstprocessen til kasseapparaterne i supermarkedet kan beskrives ved en poissonproces i perioder, hvor ankomsterne er stationære.

4.3. Ekspeditionsprocessen ved kasseapparaterne.

Grundmaterialet gav endvidere mulighed for at bestemme ekspeditionstidsfordelingen. De observerede ekspeditionstider blev for de fire observationsdage grupperet i klasser med bredden 10 sekunder. De herved fremkomne fordelinger førte til opstillingen af hypotesen, at ekspeditionsfordelingen kunne beskrives ved en gammafordeling.

Gammafordelingen eller type III-fordelingen (Karl Pearson) er fastlagt ved tæthedsfunktionen

$$h(t) = \frac{q^r}{\Gamma(r)} \cdot t^{r-1} \cdot e^{-q \cdot t} \quad \text{for } t = 0.1.2. \dots$$

$$r > 1$$

$$q \geq 0$$

Middelværdien for gammafordelingen er $\frac{r}{q}$, variansen $\frac{r}{q^2}$ og modalværdien $\frac{r-1}{q}$. Gammafordelingen er en entoppet, højreskæv fordeling.

Middelværdi og varians for observationerne beregnedes. På grundlag af disse værdier beregnedes værdier for q og v , som blev indsat i tæthedsfunktionen, der korrigeredes for antal observationer og klassebredde.

Gammafunktionen, der indgår som divisor i tæthedsfunktionen, er givet ved

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{r-1} \cdot dx \quad (\text{tabelleret i (3)}).$$

For $n > 2$ kan den asymptotiske serie

$$\Gamma(n) = n^n \cdot e^{-n} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{12 \cdot n^2} + \frac{1}{288 \cdot n^3} - \frac{139}{51840 \cdot n^4} - \frac{571}{2488320 \cdot n^5} + \dots \right]$$

anvendes som approksimation.

For heltal er $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$.

De teoretiske funktionsværdier beregnedes ved indsætning i de fire nedenstående formler af $t = 5.15.25. \dots$

$$h(t) = \frac{0,056^{2,472}}{\Gamma(2,472)} \cdot t^{1,472} \cdot e^{-0,056 \cdot t} \cdot 1490 \quad (\text{SALLING-SUPER})$$

$$h(t) = \frac{0,06^{3,088}}{\Gamma(3,088)} \cdot t^{2,088} \cdot e^{-0,06 \cdot t} \cdot 1880 \quad (\text{FØTEX-kontrolanalyse})$$

$$h(t) = \frac{0,059^{3,018}}{\Gamma(3,018)} \cdot t^{2,018} \cdot e^{-0,059 \cdot t} \cdot 1750 \quad (\text{SALLING-SUPER})$$

$$h(t) = \frac{0,06^{2,94}}{\Gamma(2,94)} \cdot t^{1,94} \cdot e^{-0,06 \cdot t} \cdot 2100 \quad (\text{SALLING-SUPER})$$

Overensstemmelsen mellem de observerede og de teoretiske værdier blev testet ved en χ^2 -test og forkastedes ikke, hvorfor betjeningsprocessen kan beskrives ved en gammafordeling.

4.4. Strukturen i køsystemet.

Strukturen i køsystemet, kasseapparatfunktionen i SALLING-SUPER, var derefter bestemt

- fire betjeningsstationer (kasseapparater)
- retfærdig kødisciplin
- ingen præference m. h. t. valg af kasseapparat
- uendelig kølængde
- ankomstprocessen var en poissonproces
- betjeningsprocessen kunne bedst beskrives ved en gammafordeling.

Dette køsystem kan ikke formuleres i et ligningssystem, fordi betjeningsprocessen er gammafordelt. Men ved en transformation af gammafordelingen til en erlangfordeling kan systemet formuleres i et ligningssystem.

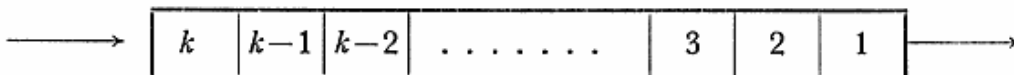
Når ankomst- og betjeningsprocesserne er stationære (at undersøgelsen giver samme resultat, uanset hvornår den foretages), kan man forvente, at systemet vil nå frem til en ligevægtstilstand, hvor sandsynligheden for, at systemet befinder sig i en given tilstand n (antal kunder under ekspedition plus antal ventende kunder), er uafhængig af tiden.

Kun i tilfælde, hvor der arbejdes med eksponentielt fordelte processer, varierer overgangene fra en tilstand til en anden (enten på grund af en ny kundes ankomst eller på grund af en kundes færdigekspedition) ikke med tidspunktet for en kundes ankomst eller for ekspeditionens begyndelse.

Man må derfor, for at løse ovenstående system, udtrykke det gennem eksponentielt fordelte processer (erlangfordelinger) og vise, at gammafordelingen efter visse principper kan transformeres til en gruppe af eksponentielt fordelte fordelinger. Det betyder ikke, at der i virkeligheden foreligger en opdeling af ekspeditionen, men blot at man simulerer, at gammafordelingen kan udtrykkes gennem en gruppe af eksponentialfordelinger.

4.5. Erlangfordelinger og gammafordelinger.

Vi kan forestille os, at ekspeditionen svarer til en kanal, der er opdelt i k enkeltelementer, kaldet faser.



For at blive ekspederet må kunden gå ind i kanalen (summen af alle faser) i fase k og derefter gennemgå fase $k-1$ etc. til fase 1, hvor ekspe-

ditionen afsluttes; først da kan en ny kunde påbegynde ekspeditionen i fase k . Der kan altså højst befinde sig een kunde i kanalen på ethvert tidspunkt.

Gennemnitsekspektionstiden pr. kunde $T_s = 1/\mu$, hvor μ er den gennemsnitlige ekspeditions-hastighed (betjeningsintensiteten).

Alle faser er eksponentielt fordelte med en gennemsnitlig ekspeditions-hastighed på $k\mu$.

Den gennemsnitlige ekspeditionstid pr. kunde bliver da $T_s = \frac{k}{k \cdot \mu} = \frac{1}{\mu}$.

Sandsynligheden, for at den første fase afsluttes i tidsintervallet x til $(x+dx)$, efter at kunden ankommer til fasen, er $k \cdot \mu \cdot e^{-k \cdot \mu \cdot x} \cdot dx$.

Sandsynligheden, for at den næstfølgende fase afsluttes i intervallet $(t-x)$ til $(t-x)+dt$, er $k \cdot \mu \cdot e^{-k \cdot \mu \cdot (t-x)} \cdot dt$.

Sandsynligheden, for at kunden færdigekspederes gennem en ekspeditions-kanal med k faser, eksponentielt fordelte og alle med en gennemsnitlig ekspeditions-hastighed $k \cdot \mu$, er

$$f(t) = \frac{(k \cdot \mu)^k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} \cdot e^{-k \cdot \mu \cdot t} \quad \text{for } t \geq 0$$

De fordelinger, som beskrives gennem ovenstående, betegnes som en klasse af erlangfordelinger.

Ekspeditionstiden i den stationære erlangproces af k' orden med parameteren μ er fordelt med de to parametre k og $k \cdot \mu$.

Sandsynligheden, for at en ekspedition vil vare længere end et tidsinterval t ($t \geq 0$), er

$$S_0(t) = \int_0^{\infty} s(t) \cdot dt = e^{-k \cdot \mu \cdot t} \cdot \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k \cdot \mu \cdot t)^n}{n!}$$

Fordelingsfunktionen for ekspeditionstiden er

$$F(t) = 1 - S_0(t)$$

$$f(t) = F'(t) = -S_0'(t) = \frac{(k \cdot \mu)^k}{\Gamma(k)} \cdot t^{k-1} \cdot e^{-k \cdot \mu \cdot t}$$

Gammafordelingens tæthedsfunktion er som tidligere omtalt

$$h(t) = \frac{q^r}{\Gamma(r)} \cdot t^{r-1} \cdot e^{-q \cdot t}$$

Ved en sammenligning mellem $f(t)$ og $h(t)$ fremgår det, at erlangfordelingen og gammafordelingen tilhører samme klasse af fordelinger.

Forskellen mellem de to fordelinger er, at gammafordelingen er defineret for alle værdier af r , mens erlangfordelingen kun er defineret for hele tal af k .

Det betyder, at parameteren r i gammafordelingen ved en transformation til en erlangfordeling svarer til nærmeste hele tal k .

Betragtes ekspeditionskanalen som en helhed, har man ekspeditions-tider, som ikke er eksponentielt fordelte, til trods for at de enkelte faser er eksponentielt fordelte. De enkelte faser eksisterer i virkeligheden ikke, men ved teoretisk at indføre dem kan det foreliggende køsystem løses.

De ovenfor beregnede gammafordelinger kan transformeres til erlangfordelinger af 3. orden.

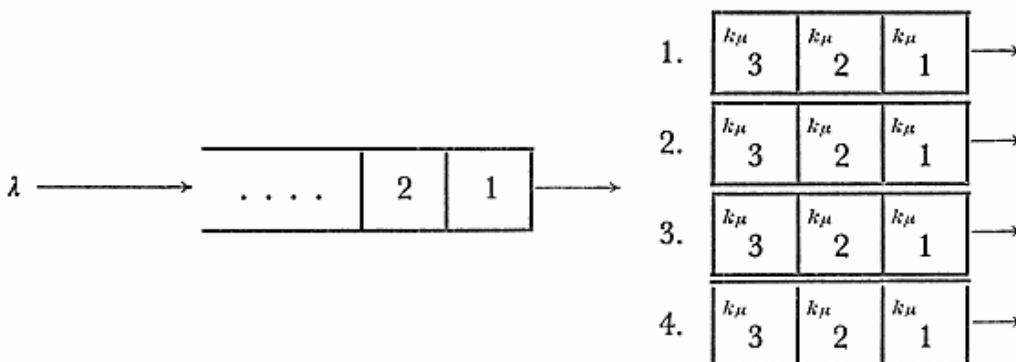
Sammenligning mellem SALLING-SUPER og FØTEX viste, at der ikke var forskelle mellem de to kasseapparatsystemer. De kan begge approksimeres til erlangfordelinger af 3. orden. Middelværdi og varians afviger ikke væsentligt fra hinanden.

Resultaterne af undersøgelserne er ikke overensstemmende med de resultater, som Göran Lindblad og Nils Blomquist fremlægger i »Kö och kapacitet i detaljhandeln«, hvor de refererer en undersøgelse af en selvbetjeningsforretning i Stockholm og konkluderer, at den frekvensfunktion, som bedst modsvarer virkeligheden, er eksponentialfordelingen (eller anderledes udtrykt en erlangfordeling af 1. orden). De fremlægger dog ikke materiale til bedømmelse af resultatet.

Det er ikke tilladeligt at udtale sig generelt om ekspeditionsfordelingen i supermarkeder på grundlag af de her foretagne undersøgelser, men kendskab til kundernes indkøbsmønstre lader formode, at den mængde, kunderne køber (og dermed ekspeditionstidens længde), grupperer sig omkring en typisk værdi. Der er da tale om ekspeditionstider, som er mere regelmæssigt fordelte end i tilfælde med eksponentielt fordelte ekspeditionstider, hvorfor man kan antage, at fordelingen af ekspeditionstiderne i supermarkeder er gammafordelte.

4.6. Formulering af en model for kasseapparatfunktionen.

Kasseapparatssystemet i SALLING-SUPER kan nu fremstilles på følgende måde



Kundeankomsterne er poissonfordelte med parameteren λ , der er uendelig kølængde og 4 3-fasede ekspeditionskanaler med en gennemsnitlig ekspeditions-hastighed $k\mu$.

Systemets udnyttelsesgrad er $\varrho = \frac{\lambda}{4 \cdot \mu}$.

Hver kanal kan enten være i tilstand 0 (kanalen er tom) eller i tilstand 1 (der befinder sig en kunde i kanalens i 'te fase). i varierer i dette tilfælde fra 3 til 1.

Da alle kanaler er ækvivalente (lige mange faser og samme ekspeditions-hastighed), er det tilstrækkeligt at tælle antallet af kanaler i faserne 3, 2 og 1 for at bestemme systemets tilstand. Tilstandssandsynlighederne kan da udtrykkes ved $p(n; s_1, s_2, s_3)$, hvor n er antallet af kunder under ekspedition plus kunder i køen, s_1 er antallet af kanaler i fase 1, s_2 antallet af kanaler i fase 2 og s_3 er antallet af kanaler i fase 3. Da s_i er antallet af kanaler, som har en kunde i den i 'te fase, bliver $\sum s_i = n$ for $n < 4$ og $\sum s_i = 4$ for $n \geq 4$.

En overgang mellem to faser i en kanal, f. eks. fra fase i til fase $(i-1)$, vil formindske s_i med en enhed og forøge s_{i-1} med en enhed. Dette vil ske med en hastighed af $k\mu$ pr. kanal. Hvis s_i+1 kanaler var i fase i til at begynde med, skal tilstandssandsynligheden multipliceres med $(s_i+1) \cdot k\mu$. En kundeankomst (med middelværdi λ) vil ændre en kanal fra tilstand nul til tilstand 1, med mindre alle kanaler er optaget. I dette tilfælde vil den ankomende kunde stille sig op i køen, der har plads til uendeligt mange ventende kunder.

For kasseapparatfunktionen i SALLING-SUPER kan følgende lignings-system $M|E_3|4$ (Kendalls notation) opstilles (4):

$$\begin{aligned} & \text{for } m = n \text{ er } \delta_n \text{ (Kroneckers delta)} = 1 \\ & \text{for } m \neq n \text{ er } \delta_n \text{ (Kroneckers delta)} = 0 \\ & (1 - \delta_{0s_3}) \lambda p(n-1; s_1, s_2, s_3-1) \\ & + (s_1+1) 3\mu p(n+1; s_1+1, s_2, s_3) \\ & + (1 - \delta_{0s_1}) (s_2+1) 3\mu p(n; s_1-1, s_2+1, s_3) \\ & + (1 - \delta_{0s_2}) (s_3+1) 3\mu p(n; s_1, s_2-1, s_3+1) \\ & - (\lambda + n3\mu) p(n; s_1, s_2, s_3) = 0 \end{aligned} \quad (4 > n = \sum s_i);$$

$$\begin{aligned} & (1 - \delta_{0s_3}) [\lambda p(3; s_1, s_2, s_3-1) \\ & + (s_1+1) 3\mu p(5; s_1+1, s_2, s_3-1)] \\ & + (1 - \delta_{0s_1}) (s_2+1) 3\mu p(4; s_1-1, s_2+1, s_3) \\ & + (1 - \delta_{0s_2}) (s_3+1) 3\mu p(4; s_1, s_2-1, s_3+1) \\ & - (\lambda + 4 \cdot 3\mu) p(n; s_1, s_2, s_3) = 0 \end{aligned} \quad (4 = n = \sum s_i);$$

$$\begin{aligned}
& \lambda p (n-1; s_1, s_2, s_3) \\
& + (1 - \delta_{os3}) (s_1 + 1) 3\mu p (n+1; s_1+1, s_2, s_3-1) \\
& + (1 - \delta_{os1}) (s_2 + 1) 3\mu p (n; s_1-1, s_2+1, s_3) \\
& + (1 - \delta_{os2}) (s_3 + 1) 3\mu p (n; s_1, s_2-1, s_3+1) \\
& - (\lambda + 4 \cdot 3\mu) p (n; s_1, s_2, s_3) = 0 \qquad (n > 4 = \sum s_i).
\end{aligned}$$

Dette ligningssystem kan udskrives for alle tilstandssandsynligheder, men vil på grund af antallet af ligninger og antallet af ubekendte være uhenigtsmæssigt at løse manuelt. Løsninger til systemet kan frembringes på EDB-anlæg, hvor man numerisk vil kunne løse systemet for en række værdier af k , M , λ og μ . Beregningerne er ikke foretaget, og der er derfor ikke fremkommet kvantitative resultater af den køteoretiske analyse af kasseapparatfunktionen i SALLING-SUPER.

5. Simulation.

I tilfælde som ovenstående, hvor matematiske analyser er besværlige at gennemføre, og hvor systemets adfærd kan beskrives på en entydig måde, er det ofte fordelagtigt at anvende den operationsanalytiske teknik, som kaldes numerisk simulation.

Simulation betyder efterligning eller at foregive uden at være. Numerisk simulation betyder, at man numerisk genskaber det problem eller system, der ønskes analyseret, uden at foretage indgreb i processen.

Når systemets struktur er fastlagt, f. eks. gennem statistisk bestemmelse af parametrene, genskabes processen ved hjælp af tilfældigt fordelte tal. I eksemplet fra SALLING-SUPER vil man således kunne gennemføre en numerisk simulation med parametrene M , k , λ og μ . Simulationen foretages for disse størrelser i forskellige kombinationer inden for de enkeltes variationsområder.

Hvor langt simulationen skal udstrækkes bestemmes gennem fastsættelse af krav til middelfejlens størrelse og det dertil kombinerede antal iagttagelser. Når resultaterne af en simulation skal vurderes, må man gøre sig klart, at hvert numerisk resultat refererer til et specielt system i modsætning til matematiske løsninger, som omfatter alle systemer. Der er væsentligt mere rutinearbejde forbundet med gennemførelse af en numerisk simulation end med en matematisk analyse. Dette rutinearbejde kan med stor fordel gennemføres på EDB-anlæg.

Resultatet af sådanne beregninger vil give mulighed for at konstatere mange vigtige størrelser i forbindelse med bemanningen af kasseapparaterne og den service, som ydes kunderne. Man kunne f. eks. beregne:

- a) sandsynligheden for at mere end n kunder venter i køen
- b) middelvventetiden i køen
- c) den gennemsnitlige kølængde
- d) sandsynligheden for straksekspedition
- e) det gennemsnitlige antal ekspedienter, som er optaget
- f) antallet af ekspedienter og deres indflydelse på den service, der ydes kunderne
- g) indflydelse af ekspeditionstidens længde på den service, man yder kunderne.

Den ovenfor beskrevne numeriske simulation omfatter kun kasseapparat-systemet, men kan udstrækkes til at omfatte hele supermarkedet, idet kundeankomstfordelingen til forretningen, indkøbstidsfordelingen og ekspeditionsfordelingen er kendt. På grundlag af de beregnede parametre er det muligt at simulere hele kundeopholdet i forretningen. Anvendelse af totalsimulation vil muliggøre, at man på grundlag af ankomstintensiteten (f. eks. gennem anvendelse af fotocelleteknik) vil være i stand til at bestemme presset på kasseapparaterne, hvorved det bliver muligt at tilpasse bemanningen af kasseapparaterne til den formulerede politik for betjeningen af kunderne.

Litteraturliste:

- (1) Nils Blomquist & Göran Lindblad – »Kö och kapacitet i detaljhandeln«, Handelshögskolan i Göteborg, skriftserie 1955, nr. 4.
- (2) Svend Fredens – Forelæsningsrække i køteori, Aarhus, 1964.
- (3) Handbook of Mathematical Tables, Weast, The Chemical Rubber Co.
- (4) P. M. Morse – »Queues, Inventories and Maintenance«, ORSA nr. 1, New York 1958.

- a) sandsynligheden for at mere end n kunder venter i køen
- b) middelvventetiden i køen
- c) den gennemsnitlige kølængde
- d) sandsynligheden for straksekspedition
- e) det gennemsnitlige antal ekspedienter, som er optaget
- f) antallet af ekspedienter og deres indflydelse på den service, der ydes kunderne
- g) indflydelse af ekspeditionstidens længde på den service, man yder kunderne.

Den ovenfor beskrevne numeriske simulation omfatter kun kasseapparat-systemet, men kan udstrækkes til at omfatte hele supermarkedet, idet kundeankomstfordelingen til forretningen, indkøbstidsfordelingen og ekspeditionsfordelingen er kendt. På grundlag af de beregnede parametre er det muligt at simulere hele kundeopholdet i forretningen. Anvendelse af totalsimulation vil muliggøre, at man på grundlag af ankomstintensiteten (f. eks. gennem anvendelse af fotocelleteknik) vil være i stand til at bestemme presset på kasseapparaterne, hvorved det bliver muligt at tilpasse bemanningen af kasseapparaterne til den formulerede politik for betjeningen af kunderne.

Litteraturliste:

- (1) Nils Blomquist & Göran Lindblad – »Kö och kapacitet i detaljhandeln«, Handelshögskolan i Göteborg, skriftserie 1955, nr. 4.
- (2) Svend Fredens – Forelæsningsrække i køteori, Aarhus, 1964.
- (3) Handbook of Mathematical Tables, Weast, The Chemical Rubber Co.
- (4) P. M. Morse – »Queues, Inventories and Maintenance«, ORSA nr. 1, New York 1958.