Om beregning af effektiv rente ved salg på afbetaling.

Af Ernst Poulsen[1])

1. Problemstilling.

Vi tænker os, at en handelsvirksomhed bl. a. forhandler produktionsudstyr og langvarige forbrugsgoder, som sælges på forskellige markeder, hvor renteniveau og konkurrencevilkår er forskellige. Der er dog det fælles for de nævnte markeder, at det er nødvendigt at sælge på afbetaling.

Virksomheden ønsker regelmæssigt rapporter om den økonomiske virksomhed. Disse rapporter skal bl. a. indeholde beregning af den effektive rente p. a., der er opnået ved afbetalingssalgene, og det forlanges,

1) at beregningerne er foretaget på ensartet grundlag, og

2) at personalet kan foretage beregninger let og hurtigt, d. v. s. uden anvendelse af vanskeligt tilgængelige matematiske formler eller rentetabeller.

Problemet består herefter i at udarbejde en instruktion i overensstemmelse med de stillede krav.

2. Eksempel.

Som et eksempel fra den pågældende virksomhed kan tages en maskine, der er kalkuleret således:

	Kr.
kostværdi	5.995
handelsavance	3.505
kontantsalgspris	9.500
udbetaling 10 % heraf	950
kontantsalgspris ÷ udbetaling	8.550
finansieringstillæg: 7 % p. a. i 42 måneder: $\frac{8.500 \cdot 0{,}07 \cdot 42}{12} =$	2.095
afbetalingspris ÷ udbetaling	10.645
udbetaling	950
samlet afbetalingspris	11.595

[1]) Undervisningsleder i Aktieselskabet Det Østasiatiske Kompagni, lic. merc.

Om beregning af effektiv rente ved salg på afbetaling.

Af Ernst Poulsen[1])

1. Problemstilling.

Vi tænker os, at en handelsvirksomhed bl. a. forhandler produktionsudstyr og langvarige forbrugsgoder, som sælges på forskellige markeder, hvor renteniveau og konkurrencevilkår er forskellige. Der er dog det fælles for de nævnte markeder, at det er nødvendigt at sælge på afbetaling.

Virksomheden ønsker regelmæssigt rapporter om den økonomiske virksomhed. Disse rapporter skal bl. a. indeholde beregning af den effektive rente p. a., der er opnået ved afbetalingssalgene, og det forlanges,

1) at beregningerne er foretaget på ensartet grundlag, og

2) at personalet kan foretage beregninger let og hurtigt, d. v. s. uden anvendelse af vanskeligt tilgængelige matematiske formler eller rentetabeller.

Problemet består herefter i at udarbejde en instruktion i overensstemmelse med de stillede krav.

2. Eksempel.

Som et eksempel fra den pågældende virksomhed kan tages en maskine, der er kalkuleret således:

	Kr.
kostværdi	5.995
handelsavance	3.505
kontantsalgspris	9.500
udbetaling 10 % heraf	950
kontantsalgspris ÷ udbetaling	8.550
finansieringstillæg: 7 % p. a. i 42 måneder: $\frac{8.500 \cdot 0{,}07 \cdot 42}{12} =$	2.095
afbetalingspris ÷ udbetaling	10.645
udbetaling	950
samlet afbetalingspris	11.595

[1]) Undervisningsleder i Aktieselskabet Det Østasiatiske Kompagni, lic. merc.

Det ses af kalkulationen, at afdragstiden er 42 måneder, hvorfor det enkelte månedlige afdrag bliver $\frac{10.645}{42} = 253{,}45$ kr.

Handelsavancen andrager i eksemplet 58½ % af kostværdien, men tallet er i denne forbindelse mindre interessant, fordi det er rentabiliteten af selve afbetalingstransaktionen (finansieringsfunktionen), der ønskes belyst. Der må derfor foretages en sammenligning mellem den samlede afbetalingspris og kontantsalgsprisen. Forskellen svarer til finansieringstillægget, nemlig 2.095 kr. Dette beløb andrager 24½ % af kontantsalgsprisen ÷ udbetalingen, men procenten er ikke et udtryk for den effektive rente p. a., netop fordi summen af investeringsbeløbet og finansieringstillægget – 10.645 kr. – hjembringes over 42 måneder. Beregningen af de 24½ % er imidlertid nyttig i det efterfølgende og vil derfor blive kaldt finansieringstillægsprocenten, for hvilken symbolet r' vil blive anvendt.

Da den effektive rente p. a. er et mål for det årlige procentvise overskud, som tilfalder kapitalejeren, er det nødvendigt at betragte summen af kostværdi og handelsavance som investeret kapital.

Handelsavancen skal jo ikke som kostværdien medregnes ved en beregning af virksomhedens kapitalbehov, men den må ved rentabilitetsberegninger betragtes som investeret egenkapital – eventuelt hele den investerede egenkapital, såfremt kostværdien 100 % kan finansieres med f. eks. kassekredit. Dette argument holder også, selvom valget for sælgeren ikke står mellem at opnå kontantsalgsprisen straks eller afbetalingsprisen fordelt over en række måneder, fordi konkurrencen nødvendiggør afbetalingsformen.

I eksemplet er kapitalbehovet (det beløb, der kræver kapitaltilførsel) kostværdien ÷ udbetalingen, d. v. s. 5.045 kr. Under den forudsætning, at der er fremmedkapital investeret, kan det have interesse at beregne de faktiske udgifter til forrentning af denne fremmedkapital. Lad os for simpelheds skyld forudsætte, at afbetalingssælgeren hos sin bank er i stand til at finansiere hele kapitalbehovet til 7 % p. a., og at lånet tilbagebetales med købers afdrag, der 100 % anvendes til dette formål. Den samlede lånetid bliver under denne forudsætning $\frac{5.045}{253{,}45} = 20$ måneder, og de faktiske renteudgifter vil andrage $\left(\frac{5.045 + 253}{2}\right) 20 \cdot \frac{0{,}07}{12} = 309$ kr., idet parentesen angiver lånets gennemsnitsværdi. Nettofortjenesten på finansieringen bliver derefter 2.095 ÷ 309 = 1.786 kr.

Denne nettofortjeneste andrager 35 % af låneprovenuet, men dette tal må anses for uinteressant, fordi 1) bankens rentekrav er kendt, og 2) det ikke er normalt at sætte nettofortjenesten i forhold til fremmedkapitalen, men kun til egenkapitalen.

Derfor vil der i det følgende blive set bort fra finansieringsformen, og udgangspunktet bliver således finansieringstillægget i % af hele den investerede kapital, altså den ovenfor omtalte finansieringstillægsprocent.

3. *Udledning af en let anvendelig formel for beregning af effektiv rente.*

Det forudsættes, at det solgte antal maskiner er konstant pr. måned, og at kunderne overholder de aftalte betingelser. Begynder man på et givet tidspunkt at sælge den i eksemplet omhandlede maskine, vil den investerede kapital vokse indtil den 42'nde måned fra salgets start. Herefter bliver den stationær, og den »stationære« investerede kapital (K_s) kan udregnes ved hjælp af formlen

$$K_s = \frac{(k-u)\,a}{2} n + 1),$$

hvor k = kontantsalgsprisen, u = udbetalingen, a = antal solgte maskiner pr. måned og n = antal måneder i afdragsperioden.[2])

Efter definitionen af begrebet effektiv rente p. a. må denne kunne udledes ved hjælp af ovenstående formel således:

$$\frac{12f \cdot a \cdot 100}{\dfrac{(k-u)\,a}{2}(n+1)} = \text{effektiv rente p. a.,}$$

idet f = finansieringstillægget pr. maskine, og brøkens nævner angiver den »stationære« investerede kapital. Formlen er kun anvendelig under de ovennævnte forudsætninger og efter den 42'nde måned (i dette eksempel) fra salgets start. Det ses, at

$\dfrac{100f}{k-u}$ = den ovenfor omtalte finansieringstillægsprocent, og at

2) Formlens udledning kan ses hos Børge Barfod: »Om afbetalingssystemets virkninger på kapitalbehov og omsætning«, Handelsvidenskabeligt tidsskrift 1954, og er også omtalt hos A. Geel Andersen: »Kapitalbehov og salgskredittid«, Erhvervsøkonomisk Tidsskrift nr. 4, 1964. Normalt anvendes formlen til beregning af de stationære udestående fordringer, men i nærværende artikel er formålet at beregne den »stationære« kapital, som fortjenesten skal sættes i forhold til. Det må bemærkes, at K_s er en fiktiv regnestørrelse, som i praksis vanskeligt kan finde anvendelse til andet formål end det her tilsigtede. Dette skyldes dels de rigoristiske forudsætninger, dels at den regnskabsmæssige behandling i praksis af det indtjente overskud m. v. næppe vil føre frem til en krediteret sum i overensstemmelse med K_s-formlen.

formlen derfor kan skrives $\frac{2 \cdot r' \cdot 12}{n+1}$, d. v. s. den effektive rente p. a. beregnes som den dobbelte finansieringstillægsprocent gange 12 (d. v. s. antal afdrag pr. år) og divideret med det samlede antal afdrag + 1.

I vort eksempel vil ovenstående formel give en effektiv rente p. a. på 13,7 %. Tænker vi os, at der sælges 5 maskiner pr. måned, vil den årlige fortjeneste andrage $5 \cdot 12 \cdot 2.095 = 125.700$ kr. Den »stationære« investerede kapital bliver

$$\frac{8.550 \cdot 5 \cdot 43}{2} = 919.125 \text{ kr.}$$

13,7 % af den således beregnede kapital giver imidlertid 125.920 kr., altså lidt mere end ovenfor beregnet, hvilket antyder, at den effektive rente beregnet på denne måde er lidt overvurderet.

Når dette er tilfældet, skyldes det, at der ved beregningen ikke er taget tilstrækkeligt hensyn til tidsforskydningerne mellem ind- og udbetalinger. Dette svarer principielt til de approximative metoder, der i udstrakt grad anvendes ved beregning af en investerings rentabilitet, nemlig annuitetsmetoden og den såkaldte simple afkastningsgrad, der af samme grund har en tilbøjelighed til at vise for gunstigt et billede af rentabiliteten. Det sande billede fås kun frem ved anvendelse af de matematiske metoder, tilbagediskonteringsmetoden eller den interne rentefods metode.

Også ved salg på afbetaling er det derfor nødvendigt at ty til rentes rente beregninger for at få det »sande« udtryk for rentabiliteten frem.

4 *Beregning af den »sande« effektive rente p. a.*

Da en række af lige store månedlige afbetalingsafdrag netop danner en efterbetalt annuitet, kan den »sande« effektive rente pr. måned – i det følgende kaldet i – beregnes efter formlen

$$\frac{(k-u)\,a}{y \cdot a} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

hvor tælleren på venstre side angiver den månedlige investering, og y det enkelte månedlige afdrag pr. maskine.

I vort eksempel har ligningens venstre side værdien $\frac{8.550}{253,45} = 33,73446442$.

Ved opslag i en rentetabel[3]) for $n = 42$ ses det, at den månedlige rente

[3]) Simon Spitzer: »Tabellen für die Zinses-Zinsen – und Renten-Rechnung«, Wien 1911.
Afsnittet »Barwert der nachschüssigen Rente 1, IV«.

må ligge mellem 1,010 % og 1,125 %. Ved lineær interpolation kan det let beregnes, at den til cifrene svarende forskel er 0,053 %, hvorfor den søgte månedsrente må være 1,063 %. Efter sædvanlig fremgangsmåde omregnes dette til årsbasis efter rentes rente formlen. Idet den »sande« effektive rente p. a. kaldes i', er

$$i' = 100\left(\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{12} - 1\right)$$

eller i eksemplet $100\,(1{,}01063^{12} - 1) = 13{,}6\ \%$ p. a.

Den »stationære« kapital kan derfor heller ikke andrage 919.125 kr., men 924.265 kr. Forskellen er netop rente og rentes rente af den investerede kapital. Det sidstnævnte beløb benævnes C_s, der udledes således:

$$C_s = \frac{12a\,(n \cdot y - (k - u))}{i'}$$

eller i eksemplet $\dfrac{12 \cdot 5\,(42 \cdot 253{,}45 - 8.550)}{13{,}6} = 924.265$ kr.

Tælleren er multipliceret med 12, fordi i' er udtrykt p. a.

Formlen for C_s kan udledes som følger: sælges a maskiner pr. måned, må sælgeren efter n måneders forløb ligge inde med $a \cdot n$ afbetalingskontrakter af aldrene 0, 1, 2, ... $(n - 1)$ måneder. Fra dette tidspunkt er tilstanden stationær, idet sælgeren pr. måned herefter modtager $a \cdot n \cdot y$ kr. i afdrag, samtidig med at $(k - u)\,a$ geninvesteres. Overskuddet bliver da $a \cdot n \cdot y - (k - u)\,a$ pr. måned. Dette beløb kan betragtes som månedlig forrentning på en stationær kapital af værdien

$$C_s = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots . C_{n-1} \tag{1}$$

Idet

$$C_0 = (k - u)\,a, \text{ er } C_0 = a \cdot y\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \tag{2}$$

Af indbetalingerne ved slutningen af den første måned er $C_0 \cdot i$ rente, hvorfor kun $a \cdot y - C_0 \cdot i$ kan anvendes til nedbringelse af sælgerens tilgodehavende. Dette vil derfor andrage

$$C_1 = C_0 - (a \cdot y - C_0 \cdot i) = C_0\,(1 + i) - a \cdot y$$

Ved slutningen af den anden måned modtages igen $a \cdot y$ kr., hvoraf $C_1 \cdot i$ er rente, hvorfor vi får

$$\begin{aligned}
&C_2 = C_1\,(1 + i) - a \cdot y = \\
&(C_0\,(1 + i) - a \cdot y)\,(1 + i) - a \cdot y = \\
&C_0\,(1 + i)^2 - a \cdot y\,(1 + i) - a \cdot y = \\
&C_0\,(1 + i)^2 - a \cdot y\,\frac{(1 + i)^2 - 1}{i}
\end{aligned}$$

Heraf kan generelt udledes, at $C_n = C_0 (1 + i)^n - a \cdot y \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$

men da kontrakterne er fuldt afviklede på tidspunktet n, må $C_n = 0$,

hvoraf $C_0 (1 + i)^n = a \cdot y \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$, (3)

hvilket udtrykker det samme som ligning (2). Ligning (1) kan herefter udtrykkes således:

$$C_s = C_0 (1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots (1 + i)^{n-1})$$
$$- a \cdot y (1 + \frac{(1 + i)^2 - 1}{i} + \ldots . \frac{(1 + i)^{n-1} - 1}{i}),$$

hvoraf

$$C_s = C_0 \frac{(1 + i)^n - 1}{i} - \frac{a \cdot y}{i} (\frac{(1 + i)^n - 1}{i} - n) \tag{4}$$

Ved at indsætte (2) i (4) fås:

$$C_s = \frac{a \cdot y \cdot n - C_0}{i}, \tag{5}$$

hvilket principielt svarer til den ovenfor anvendte formel, der i eksemplet giver resultatet 924.265 kr. Formel (5) kan i modsætning til den lettere anvendelige formel, der blev omtalt i afsnit 3, anvendes uanset om den stationære tilstand er indtrådt eller ej.

5. *Problemløsning.*

Det fremgår af det foranstående, at den »sande« effektive rente p. a. i vort eksempel er 13,6 %, medens den lettere anvendelige formel $\frac{2 \cdot r' \cdot 12}{n + 1}$ – giver 13,7 %.

Man kunne derfor fristes til blot at instruere om at anvende den sidstnævnte formel, da differencen ikke forekommer særlig betydelig. Man bør imidlertid være meget forsigtig med at anvende den lette formel som tilnærmelse til den »sande« effektive rente, fordi forskellen stiger med forøgede værdier af n. Er iøvrigt den »sande« effektive rente relativt lav – f. eks. 12 % p. a. eller derunder, vil forskellen være mindre end 1, såfremt n blot er mindre end ca. 50. Er den »sande« effektive rente f. eks. 36 % p. a., bliver forskellen imidlertid ca. 7 svarende til $n = 42$ og ca. 13,5 for $n = 84$.

Her kan vi igen sammenligne med de approximative metoder for investeringsberegninger, hvor overvurderingen af rentabiliteten vokser med investeringens forventede levetid og rentefodens højde. På grund af formlen for omregning af i til i', kan denne dog godt være højere end renten beregnet efter den approximative metode, når blot værdierne af n og r' er tilstrækkeligt lave.

Såfremt den pågældende handelsvirksomhed ofte sælger med lange afdragsperioder, kan man derfor ikke anbefale den »lette« løsning.

Det er heller ikke i overensstemmelse med den stillede opgave at instruere om anvendelse af annuitetsformlen i forbindelse med en rentetabel. Det er problemet med at interpolere i en sådan tabel, der er det vanskeligste, fordi selv mindre fejl i den effektive rente pr. måned kan blive betydelige, når renten omregnes til årsbasis.

Det fremgår imidlertid af annuitetsformlen, at i kun afhænger af 3 faktorer, nemlig

1) n
2) $(k - u)\,a$
3) $y \cdot a$

De to sidstnævnte kan kombineres i een faktor:

$$\frac{a\,(n \cdot y - (k - u))\,100}{(k - u)\,a} = r'$$

Dette er ensbetydende med, at den »sande« effektive rente alene afhænger af antallet af afdragsperioder og af finansierinfstillægsprocenten. Det må derfor være muligt at opstille en tabel, der direkte viser i' varierende med forskelige værdier af n og r'.

Dette problem løses lettest ved anvendelse af en simpel simulationsmodel. Man kunne således sætte C_0 til et tilfældigt tal, f. eks. 1000, lade r' variere med 1 % i difference fra 5 % til og med 50 % og lade n variere med 1 måneds difference fra 6 måneder til og med 48 måneder. Der kan nu let udarbejdes en tabel efter formlen

$$\frac{1000\,n}{1000 + 10\,r'} \quad \text{idet} \quad \frac{1000 + 10\,r'}{n} \quad \text{repræsenterer } y\text{-værdierne.}$$

Den fremkomne tabel testes nu med en rentetabel (f. eks. Spitzers), og de nødvendige interpolationer foretages, hvorefter de fremkomne værdier af i omregnes til i' efter den ovenfor anførte formel.

Det besværligste er dog stadig interpolationerne. Da rentefunktionen ikke er lineær, vil lineær interpolation medføre fejl, som man kun kan tillade sig at se bort fra, såfremt afstanden mellem rentesatserne i tabellen er tilstrækkeligt små, således som det er tilfældet i den ovenfor nævnte Spitzers rentetabel.

Imidlertid kan en tabel over værdier af i varierende med n og r' også udarbejdes uden brug af en allerede udarbejdet rentetabel. Idet vi sætter $a = 1$, kan finansieringstillægsprocenten skrives

$$r' = \frac{(n \cdot y - C_0)\,100}{C_0}$$

hvoraf

$$\frac{C_0}{y} = \frac{100\,n}{100 + r'}$$

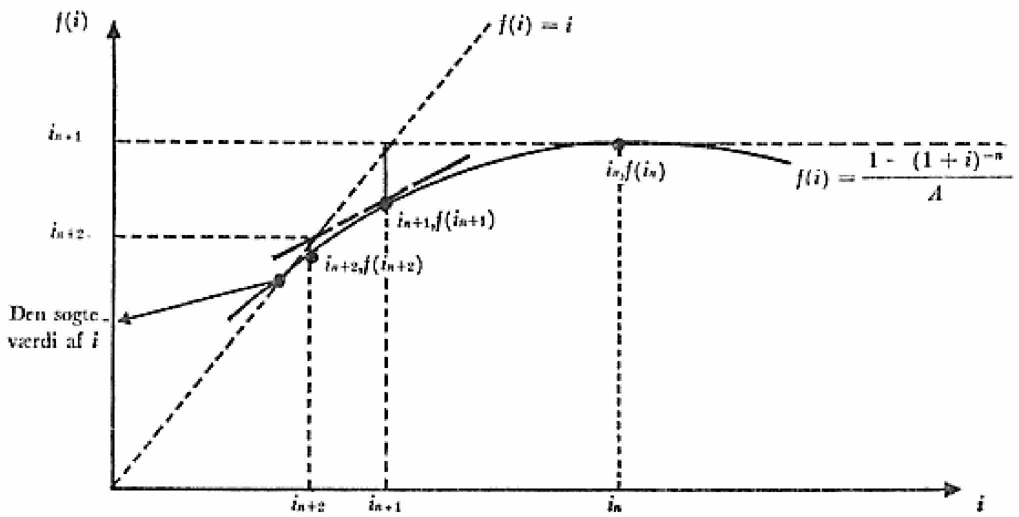
Det ses, at denne ligning har venstre side fælles med annuitetsformlen. Når vi sætter ligningens højre side lig A, får vi

$$A = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \text{ eller } i = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{A}$$

Med det formål at undersøge funktionsforløbet kan vi skrive

$$f(i) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{A}$$

Ved at undersøge den første afledede $f'(i)$ såvel som den anden afledede $f''(i)$ for aktuelle værdier af A og n kan det konstateres, at ovennævnte funktion har det nedenstående indtegnede forløb:



I samme koordinatsystem ses indtegnet $f(i) = i$ som en ret linie. Der vælges nu en tilfældig værdi af i kaldet i_n. I punktet $i_n, f(i_n)$ tegnes kurvens tangent, hvis skæringspunkt med den rette linie giver værdien i_{n+1} som første tilnærmelse til den søgte værdi af i. Dernæst tegnes tangenten til kurven i punktet $i_{n+1}, f(i_{n+1})$, og denne tangents skæring med den rette linie giver værdien i_{n+2}, som er en bedre tilnærmelse til det søgte i. Således fortsættes, indtil i er fundet med den ønskede nøjagtighed.

Den matematiske fortolkning af den geometriske løsning er ligningen

$$i_{n+1} = \frac{f(i_n) - i_n \cdot f'(i_n)}{1 - f'(i_n)}$$

som er den almene formel for beregning af i.[4])

Eftersom

$$f(i_n) = \frac{1 - (1 + i_n)^{-n}}{A}$$

og den første afledede er

$$f'(i_n) = \frac{n\,(1 + i_n)^{-(n+1)}}{A}$$

kan disse værdier indsættes i den almene formel som følger:

$$i_{n+1} = \frac{\dfrac{1 - (1 + i_n)^{-n}}{A} - i_n \dfrac{n\,(1 + i_n)^{-(n+1)}}{A}}{1 - \dfrac{n\,(1 + i_n)^{-(n+1)}}{A}} \quad \text{eller}$$

$$i_{n+1} = \frac{(1 - (1 + i_n)^{-n}) - i_n \cdot n\,(1 + i_n)^{-(n+1)}}{A - n\,(1 + i_n)^{-(n+1)}}$$

Ved forlængelse med $(1 + i_n)^{n+1}$ fås

$$i_{n+1} = \frac{(1 + i_n)^{n+1} - (1 + i_n) - i_n \cdot n}{A\,(1 + i_n)^{n+1} - n}$$

Med anvendelse af forkortelserne

$1 + i_n = S$ og $S^{n+1} = T$

kan sidstnævnte ligning forenkles til $i_{n+1} = \dfrac{T - S - i_n \cdot n}{A \cdot T - n}$

Fremgangsmåden er den samme som på den grafiske afbildning, d. v. s. benyttelse af tangenten til kurven. Der vælges en værdi af i kaldet i_n, der indsættes i ligningen for i_{n+1}. Resultatet indsættes igen, hvorefter vi finder i_{n+2} o. s. v.. Da 4–5 gennemløb er tilstrækkeligt til at opnå den ønskede nøjagtighed, må metoden betragtes som en meget hurtig iterationsmetode, især såfremt udarbejdelsen af den endelige tabel over de årlige renter kan foretages ved hjælp af EDB. Et uddrag af tabellen bringes her:

[4]) Formlens udledning er kendt som Newton-Raphson metoden. Denne er beskrevet i Daniel D. MacCracken and William S. Dorn: »Numerical Methods and Fortran Programming«, N. Y. 1964, side 133 ff.

Den effektive rente p. a. i % af den investerede kapital.

Finansierings-tillægsprocent	Antal månedlige afdrag				
	18	24	30	36	42
20	26	19,7	15,7	13,0	11,1
25	33	24	19,6	16,2	13,8
30	41	30	23	19,5	16,5
35	48	35	27	22	19,3
	56	40	31	26	22
45	64	46	35	29	24

Tabellen kan nu let anvendes, men må ledsages af en instruktion, der bl. a. definerer finansieringstillægsprocenten som finansieringstillægget i % af kontantsalgsprisen ÷ udbetalingen.

Dette må være den praktiske løsning af den stillede opgave.