Optimalitetsbetingelser ved parametervariasjon i lineær programmering.

Av Jan Mossin*)

Innledning

Et problem i forbindelse med anvendelsen av lineær programmering er å bestemme under hvilke betingelser på problemets parametre en viss lösning eller et visst sett av basisvektorer er optimal. Problemet kan oppstå i tilfeller der parametrene er fastlagt og en optimal lösning beregnet men hvor vi önsker å undersöke hvordan unöyaktigheter eller andre avvik i de gitte parametre vil endre ved den optimale lösning. I andre tilfeller er vi interessert i å angi det fullstendige sett av verdier for hvilke hver av alle de mulige basiser er optimal. I én slik type vet programmeren bare sannsynlighetsfordelingen for parameterverdiene, og er interessert i å finne forventningsverdien av maksimanden under den forutsetning av at den optimale beslutning vil bli tatt når parameterverdiene på et senere tidspunkt blir kjent med sikkerhet. For å löse dette problemet er det tydeligvis påkrevd å spesifisere de områder i parameterrummet hvor hver mulig basis vil være optimal. I et transportproblem kan f. eks. forsyningene på hvert tilförselssted være stokastiske variable, og vil vil være interessert i å beregne forventet transportkostnad under forutsetning av at de forsyninger som senere inntreffer vil bli transportert på optimalt vis. Hvis vi kjenner de områder i parameterrummet (dvs. i rummet av forsyningsvektorer) hvor hvert sett av transportruter vil bli brukt er det prinsipielt mulig å beregne forventet transportkostnad ved först å beregne forventet transportkostnad for hver rute og så ta et gjennomsnitt over alle ruter veid med

*) Norges Handelshöyskole.

sannsynligheten for at ruten vil være optimal (dvs. sannsynligheten for at tilförslene vil være slik at rutene blir optimale).

Vi vil först formulere dette problemet generelt og deretter vise hvordan simplexmetoden kan brukes som hjelpemiddel for beregningen av parameterbetingelsene.

Det generelle problem

Det generelle problem kan angripes ved å betrakte det lineære programmeringsproblemet:

$$\max_{z} \; f = d'z$$

under bibetingelsene:

$$Bz \leqslant b$$
$$z \geqslant 0$$

der B er (mxn), z er $(nx1)$, d er $(nx1)$ og b er $(mx1)$

Ved å innföre »slack«-variable y $(mx1)$ har vi den ekvivalente formuleringen:

$$\max_{x} \; g = c'x$$

under bibetingelsene:

$$Ax = b$$
$$x \geqslant 0$$

der

$$c = \binom{d}{0} \quad \text{er } (m+n)x1$$
$$A = (B,I) \text{ er } mx\,(m+n)$$
$$x = \binom{z}{y} \quad \text{er } (m+n)x1$$

Vi antar i det fölgende at rangen af A er m.

En metode for lösning av dette problemet er fölgende: Velg et subsett kalt k bestående av m kolonner fra A og de tilsvarende elementer fra a og c. k löper derved over tallene fra 1 til $\binom{m+n}{m}$. Betegn den resulterende matrise bestående av de valte vektorer for A_k og vektorene med elementer fra x og c for x_k og c_k. Lös deretter likningssystemet:

$$A_k x_k = b$$

ved hjelp av

$$x_k = A_k^{-1} b.$$

Dersom $A_k^{-1} b \geqslant 0$ er lösningen tillatelig, dvs. den tilfredsstiller de gitte sidebetingelser. For alle tillatelige lösninger x_k beregn så:

$$g_k = c_k' x_k = c_k' A_k^{-1} b.$$

Velg så blant disse den $k = k^*$ som gjör g_k til et maksimum, dvs. velg k^* slik at

$$g_{k^*} = \max_{k \text{ slik at } A_k^{-1} \geqslant 0} g_k$$

Da er x_{k^*} lösningen på problemet.

Bruk av simplexmetoden for beregning av optimalitetsbetingelser

Den »lösningsmetoden« som er skissert ovenfor er selvsagt ikke særlig effektiv fra et praktisk synspunkt forsåvidt som vi ville måtte löse $\binom{m+n}{m}$ lineære likningssystemer. Simplexmetoden er imidlertid basert på det samme prinsippet, nemlig å velge en basis og löse det tilsvarende likningssystem. Forskjellen er at istedet for å finne *alle* ekstremalpunkter går vi fra én basis til en annen ifölge en systematisk regel som er slik at den nye basis alltid gir en höyere verdi til g enn den tidligere, og slik at vi alltid vet når vi har nådd fram til en optimal basis. Trinnene i regnearbeidet ved simplexmetoden kan imidlertid brukes også når vi önsker å gå gjennom alle mulige basiser. I så fall setter vi bare tilside de reglene som bestemmer valget av ny basis inntil samtlige kombinasjoner bestående av m vektorer fra A har vært basis. Men optimalitetsbetingelsene er selvsagt ikke influert av den rekkefölgen vi innförer nye basiser i.

I vår tidligere symbolikk er den förste simplextabellen:

b	B	I
0	$-d'$	0

I denne tabellen har vi valt som förste basis de m enhetsvektorene (dvs. de siste m kolonnene fra A). Ved hjelp av en serie rekkeoperasjoner skifter vi så ut en og en vektor ad gangen. Når basisen består av de vektorene som utgjör matrisen A_k vil tabellen være som følger:

$A_k^{-1}b$	$A_k^{-1}B$	A_k^{-1}
$c_k'A_k^{-1}b$	$c_k'A_k^{-1}B-d'$	$c_k'A_k^{-1}$

Optimalitetsbetingelsene for denne basisen er nå at alle »indikatorene« er positive: indikatorene er elementene i vektorene $c_k'A_k^{-1}B-d'$ og $c_k'A_k^{-1}$. I den vanlige simplexrutinen er reglene for valg av basis slik at vi er garantert at vektoren $A_k^{-1}b$ er positiv – for en vilkårlig basis må vi sette opp denne betingelsen eksplisitt. Optimalitetsbetingelsene for basis k kan derfor formuleres slik:

$$A_k^{-1}b \geqslant 0$$
$$c_k'A_k^{-1}B-d' \geqslant 0$$
$$c_k'A_k^{-1} \geqslant 0$$

Det kan være verdier av parametrene for hvilke to eller flere basiser tilfredsstiller optimalitetsbetingelsene. Men fra dualitetsteoremet fölger det at i dette tilfelle er verdien av målsetningsfunksjonen den samme, dvs. hvis optimalitetsbetingelsene er tilfredsstilt for basiser j og k, da er

$$c_j'A_j^{-1}b = c_k'A_k^{-1}b.$$

Optimalitetsbetingelsene er derfor både nödvendige og tilstrekkelige. Når et slikt tilfelle inntreffer betyr det at linjen gjennom ekstremalpunktene tilsvarende de to basiser er parallell med målsetningsfunksjonens hyperplan. At en optimal basis ikke er entydig bestemt vil i nærværende sammenheng være av liten eller ingen betydning.

Selv om optimalitetsbetingelsene er fullstendig generelle er de åpenbart av begrenset verdi hvis samtlige parametre i c, B og d får lov å variere samtidig. De enkleste tilfellene har vi når enten matrisen B er fastlagt og bare vektorene b eller d (eller muligens begge) varierer, eller omvendt.

Variasjoner i b

Når bare b er uspesifisert vil indikatorene ha gitte numeriske verdier slik at de basiser som ikke kan være optimale kan sjaltes ut med det samme. Når bare d er uspesifisert vil på tilsvarende måte vektorene $A_k^{-1}b$ ha gitte numeriske verdier som tillater oss å skille ut de basiser som kan være optimale.

Som et eksempel kan vi studere et enkelt problem der bare b-vektoren er uspesifisert. I ulikhetsform er problemet som fölger:

$$\max\ x_1+x_2$$

under bibetingelsene:

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2 &\leqslant b_1 \\ x_1+x_2 &\leqslant b_2 \\ x_1,x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Her er $m = n = 2$ slik at det er $\binom{4}{2} = 6$ mulige basiser. I nedenstående tabell 1 er satt opp en simplextabell som inneholder alle disse basisene. Kolonnen som er merket 0 behöver selvsagt ikke föres med gjennom alle beregningene ettersom dens elementer lett kan finnes etterpå som $A_k^{-1}b$. Vi har tatt den med for oversiktens skyld.

Av tabellen ser vi straks at basisene merket 1, 3 og 5 ikke kan kvalifisere som optimale for noen verdi for b, ettersom en eller flere indikatorer er negative. Vi kan derfor skrive ned optimalitetsbetingelsene for b for hver av de övrige basiser:

Nr. 2 (vektorene 2 og 4):

$$b_1 \leqslant \frac{b_2}{2}$$

Nr. 4 (vektorene 1 og 3):

$$b_1 \geqslant 3b_2$$

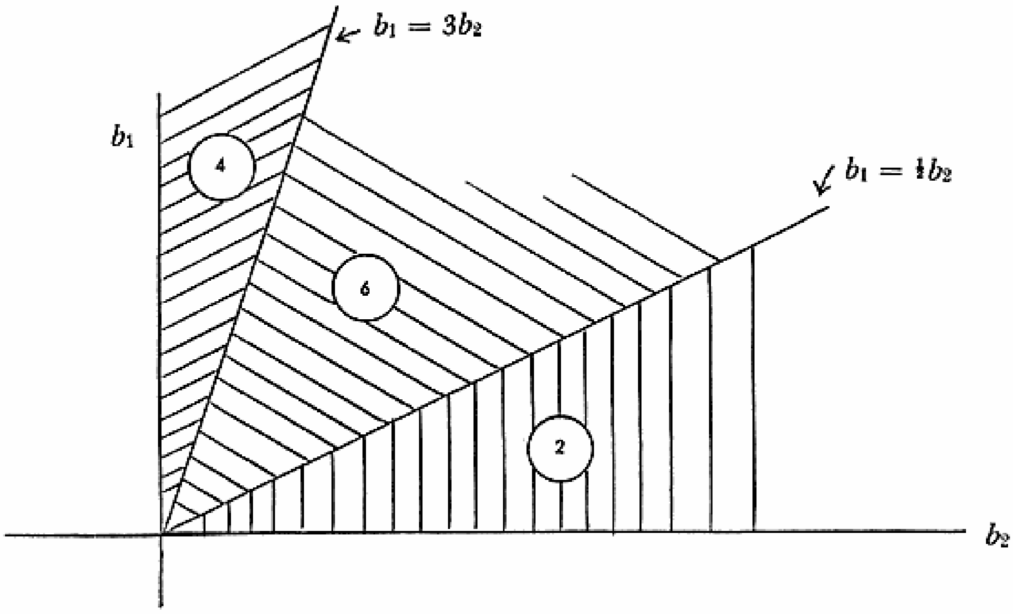
Nr. 6 (vektorene 1 og 2):

$$\frac{b_2}{2} \leqslant b_1 \leqslant 3b_2$$

Tabell 1.

Basis-nr.	Basis-vektorer	0	1	2	3	4
1	3	b_1	3	1	1	0
	4	b_2	1	2	0	1
		0	-1	-1	0	0
②	2	b_1	3	1	1	0
	4	b_2-2b_1	-5	0	-2	1
		b_1	2	0	1	0
3	2	$b_2/2$	$1/2$	1	0	$1/2$
	3	$b_1-b_2/2$	$5/2$	0	1	$-1/2$
		$b_2/2$	$-1/2$	0	0	$1/2$
④	1	b_2	1	2	0	1
	3	b_1-3b_2	0	-5	1	-3
		b_2	0	1	0	1
5	1	$b_1/3$	1	$1/3$	$1/3$	0
	4	$b_2-b_1/3$	0	$5/3$	$-1/3$	1
		$b_1/3$	0	$-2/3$	$1/3$	0
⑥	1	$2b_1/5-b_2/5$	1	0	$2/5$	$-1/5$
	2	$3b_2/5-b_1/5$	0	1	$-1/5$	$3/5$
		$b_1/5+2b_2/5$	0	0	$1/5$	$2/5$

I figur 1 som framstiller (b_1,b_2)-planet har vi tegnet opp de tilsvarende regioner og merket dem ②, ④ og ⑥.



Figur 1

Variasjoner i d

Som et eksempel på beregningene når d er uspesifisert kan vi bruke den samme matrisen B som för og fastlegge vektoren b som f. eks. $\begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$. Vektorene c_k' er da fölgende (k i samme rekkefölge som ovenfor):

$$
\begin{aligned}
c_1' &= (0,\ 0) \\
c_2' &= (d_2,\ 0) \\
c_3' &= (d_2,\ 0) \\
c_4' &= (d_1,\ 0) \\
c_5' &= (d_1,\ 0) \\
c_6' &= (d_1, d_2)
\end{aligned}
$$

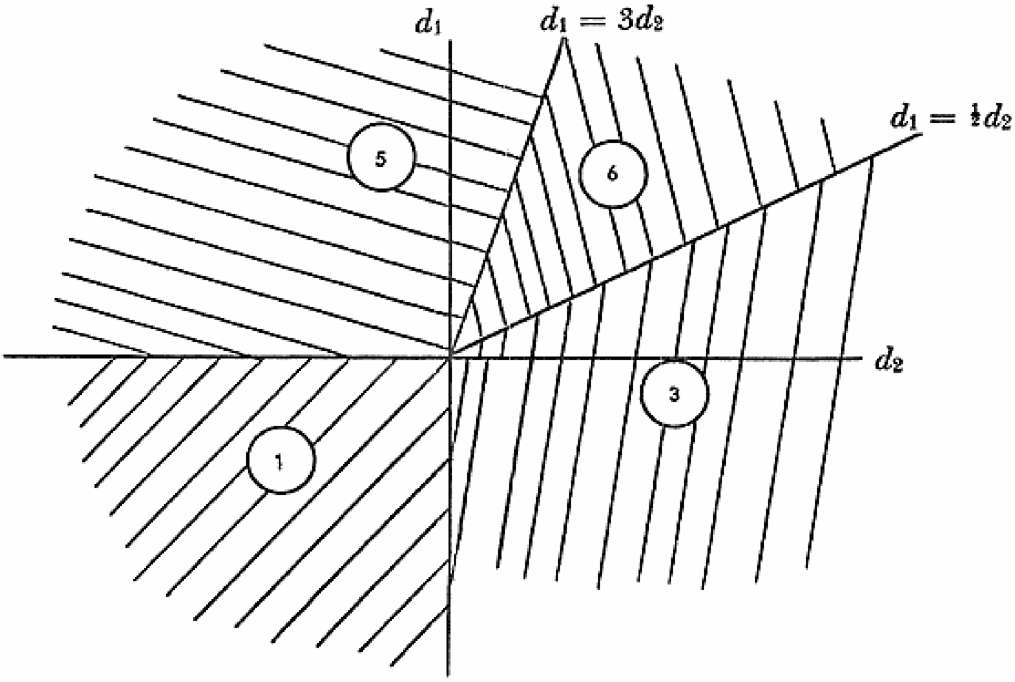
Vi kan sammenfatte de resulterende vektorer og betingelser på d i tabell 2.

Fra kolonnen for $A_k^{-1}b$ ser at basisene 2 og 4 aldri kan være optimal for den gitte b. Hvilke verdier av d som gjör hver av de övrige basiser optimale er angitt i figur 2.

Tilfellet hvor både b og d er uspesifisert er ikke vesentlig mer komplisert, idet som tidligere nevnt ingen av optimalitetsbetingelsene angår både b og d samtidig. Men det er nå ikke mulig å sjalte ut enkelte basiser med samme letthet som tidligere, og hvorvidt en bestemt basis er optimal for et visst område i ett av rummene vil avhenge av verdien av den andre vektoren.

Tabell 2

Basis nr. k	Basis-vektorer	$A_k^{-1}b$	$c_k'A_k^{-1}B-d'$	$c_k'A_k^{-1}$	Optimalitets-betingelser
1	3 4	12 10	$-d_1,\ -d_2$	$0,\ 0$	$d_1 \leqslant 0$ $d_2 \leqslant 0$
2	2 4	12 -14	—	—	—
3	2 3	5 7	$\frac{d_2}{2}-d_1,\ 0$	$0,\ \frac{d_2}{2}$	$d_1 \leqslant d_2/2$ $d_2 \geqslant 0$
4	1 3	10 -18	—	—	—
5	1 4	4 6	$0,\ \frac{d_1}{3}-d_2$	$\frac{d_1}{3},\ 0$	$d_1 \geqslant 3d_2$ $d_1 \geqslant 0$
6	1 2	14/5 18/5	$0,\ 0$	$\frac{2d_1}{5}-\frac{d_2}{5},\ \frac{-d_1}{5}+\frac{3d_2}{5}$	$d_1 \geqslant \frac{d_2}{2}$ $d_1 \leqslant 3d_2$



Figur 2

Som eksempel kan vi bruke det samme problemet som ovenfor med både b og d uspesifisert, og kan sette opp resultatet i tabell 3 (s. 41).

Som et eksempel på avhengigheten mellom b- og d-vektorene ser vi at regionen $d_1 \leqslant 3d_2$, $d_1 \geqslant d_2/2$ gir 2 som optimal basis hvis $b_1 \geqslant 0$, $b_1 \leqslant b_2/2$; 4 dersom $b_2 \geqslant 0$, $b_1 \geqslant 3b_2$; og 6 dersom $b_1 \geqslant b_2/2$, $b_1 \leqslant 3b_2$.

Variasjoner i B

Tilslutt illustrerer vi under hvilke betingelser en gitt basis, f. eks. nr. 4, er optimal når B er uspesifisert, mens b og d er fastlagt som $\binom{12}{10}$ og $\binom{1}{1}$. Basis 4 består av vektorene 1 og 3 og vi har således:

$$A_4 = \begin{pmatrix} b_{11} & 1 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad A_4^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 10/b_{21} \\ 1 & -10b_{11}/b_{21} \end{pmatrix}$$

$$A_4^{-1}b = \begin{pmatrix} 10/b_{21} \\ 12-10b_{11}/b_{21} \end{pmatrix}$$

$$c_4' = (1, 0)$$
$$c'A_4^{-1}B-d' = (0,\ b_{22}/b_{21}-1)$$
$$c_4'A_4^{-1} = (0,\ 1/b_{21})$$

Optimalitetsbetingelsene er derfor:

$$b_{21} \geqslant 0$$
$$b_{11} \leqslant \frac{6}{5} b_{21}$$
$$b_{22} \geqslant b_{21}$$

Tabell 3

Basis nr.	Basis-vektorer	$A_k^{-1}b$	$c'_k A_k^{-1}$	$c_k' A_k^{-1}$	Optimalitetsbetingelser på b	Optimalitetsbetingelser på d
1	3 4	b_1 b_2	$-d_1$, $-d_2$	0 , 0	$b_1 \geqslant 0$ $b_2 \geqslant 0$	$d_1 \leqslant 0$ $d_2 \leqslant 0$
2	2 4	b_1 $b_2 - 2b_1$	$3d_1 - d_1$, 0	d_2 , 0	$b_1 \geqslant 0$ $b_1 \leqslant b_2/2$	$d_1 \leqslant 3d_2$ $d_2 \geqslant 0$
3	2 3	$b_2/2$ $b_1 - b_2/2$	$d_2/2 - d_1$, 0	0 , $d_2/2$	$b_2 \geqslant 0$ $b_1 \geqslant b_2/2$	$d_1 \leqslant d_2/2$ $d_2 \geqslant 0$
4	1 3	b_2 $b_1 - 3b_2$	0 , $2d_1 - d_2$	0 , d_1	$b_2 \geqslant 9$ $b_1 \geqslant 3b_2$	$d_1 \geqslant d_2/2$ $d_1 \geqslant 0$
5	1 4	$b_1/3$ $b_2 - b_1/3$	0 , $d_1/3 - d_2$	$d_1/3$, 0	$b_1 \geqslant 0$ $b_1 \leqslant 3b_2$	$d_1 \geqslant 3d_2$ $d_1 \geqslant 0$
6	1 2	$2b_1/5 - b_2/5$ $3b_2/5 - b_1/5$	0 , 0	$2d_1/5 - d_2/5$, $-d_1/5 + 3d_2/5$	$b_1 \geqslant b_2/2$ $b_1 \leqslant 3b_2$	$d_1 \geqslant d_2/2$ $d_1 \leqslant 3d_2$