En metode til beskrivelse af strukturen i specielle systemer.

Af Ole Nielsen*)

(1) Lad der være givet et system, der i en relevant beskrivelse kan indtage n forskellige, hinanden udelukkende, tilstande. Tilstandsmulighederne vil f. eks. kunne nummereres 1, 2, 3, ... n.

Eksempel 1.

Et ekspeditionssystem med 1 betjeningsplads (ekspedient) og 2 ventepladser (køpladser) kan indtage følgende 4 forskellige tilstande:

Tilstand	0	1	2	3
Betjeningsplads besat	nej	ja	ja	ja
Første venteplads besat	nej	nej	ja	ja
Anden venteplads besat	nej	nej	nej	ja

Fig. 1.

Da det her findes hensigtsmæssigt at lade tilstandsnummeret angive det antal kunder, der befinder sig i systemet, er tilstandene i fig 1 nummereret 0, 1, 2 og 3.

Da de 4 tilstande beskriver systemet udtømmende, vil dette altid befinde sig i en af disse. Der kan således ikke forekomme en tilstand, hvor betjeningspladsen ikke er besat samtidig med, at en eller begge køpladser er besat, idet det forudsættes, at betjeningspladsen momentant vil blive besat fra ventepladserne.

*) Civilingeniør, amanuensis ved Handelshøjskolen i Århus.

En metode til beskrivelse af strukturen i specielle systemer.

Af Ole Nielsen*)

(1) Lad der være givet et system, der i en relevant beskrivelse kan indtage n forskellige, hinanden udelukkende, tilstande. Tilstandsmulighederne vil f. eks. kunne nummereres 1, 2, 3, ... n.

Eksempel 1.

Et ekspeditionssystem med 1 betjeningsplads (ekspedient) og 2 ventepladser (køpladser) kan indtage følgende 4 forskellige tilstande:

Tilstand	0	1	2	3
Betjeningsplads besat	nej	ja	ja	ja
Første venteplads besat	nej	nej	ja	ja
Anden venteplads besat	nej	nej	nej	ja

Fig. 1.

Da det her findes hensigtsmæssigt at lade tilstandsnummeret angive det antal kunder, der befinder sig i systemet, er tilstandene i fig 1 nummereret 0, 1, 2 og 3.

Da de 4 tilstande beskriver systemet udtømmende, vil dette altid befinde sig i en af disse. Der kan således ikke forekomme en tilstand, hvor betjeningspladsen ikke er besat samtidig med, at en eller begge køpladser er besat, idet det forudsættes, at betjeningspladsen momentant vil blive besat fra ventepladserne.

*) Civilingeniør, amanuensis ved Handelshøjskolen i Århus.

Vi vil således endvidere kunne konkludere, at betjeningspladsen altid vil være besat, såfremt der er kunder i systemet.
(2) Lad det endvidere være givet, at sansynlighederne for overgang fra en vilkårlig tilstand til en vilkårlig anden tilstand i løbet af et givet tidsinterval (h) er *kendte* (men ikke nødvendigvis forskelig fra 0).

Man kan da betegne de kendte sandsynligheder $p_{i,j}$, hvor første fodtegn angiver den tilstand, *hvorfra* overgangen sker, og det andet fodtegn angiver den tilstand, *hvortil* overgangen sker. Det gælder for såvel i som j, der er uafhængige af hinanden, at de kan antage alle de værdier, som angiver de relevante tilstandsmuligheder.

I det specielle tilfælde, hvor $j = i$, vil $p_{i,j}$ betegne sandsynligheden for, at det betragtede system forbliver i tilstand i inden for tidsintervallet h.

Eksempel 2.

Set i relation til det i eksempel 1 angivne system vil $p_{1,0}$ betegne sandsynligheden for, at systemet, efter at have befundet sig i tilstand 1 ved begyndelsen af tidsintervallet h, vil befinde sig i tilstand 0 ved slutningen af tidsintervallet h.

Det bemærkes, at det således er uden betydning for beskrivelsen, hvilke andre tilstande, systemet eventuelt måtte have antaget i intervallet h.

(3) Lad det yderligere være givet, at de enkelte overgangssandsynligheder alle er afhængige af det betragtede tidsinterval h på følgende måde:

$$p_{ij} = \lambda_{ij} h + 0(h)$$

hvor p_{ij} angiver sandsynligheden for overgang fra tilstand i til tilstand j i løbet af h tidsenheder.
λ_{ij} angiver en til p_{ij} knyttet konstant ($\lambda_{ij} \geqslant 0$).
h angiver det betragtede tidsinterval.
$0(h)$ angiver en funktion med egenskaben $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0(h)}{h} = 0$ (andre egenskaber har ingen betydning i denne forbindelse).

Betragtes et tidsinterval t, som opdeles i m lige lange intervaller, vil disse delintervaller have længden $h = \dfrac{t}{m}$.

Man har herved sandsynligheden for overgang fra tilstand i til tilstand j i intervallet h som:

$$p_{ij} = \lambda_{ij} \frac{t}{m} + 0(\frac{t}{m})$$

og sandsynligheden for, at der ikke sker overgang fra tilstand i til tilstand j i løbet af tidsintervallet h som:

$$1 - p_{ij} = 1 - \lambda_{ij} \frac{t}{m} - 0(\frac{t}{m})$$

samt sandsynligheden for, at der ikke sker overgang fra tilstand i til tilstand j i noget af de m delintervaller, som:

$$(1 - \lambda_{ij} \frac{t}{m} - 0(\frac{t}{m}))^m$$

der gælder for alle valg af m (heltal), specielt også når m vokser over alle grænser.

Sidstnævnte sandsynlighed betegner netop sandsynligheden for, at der ikke sker overgang fra tilstand i til tilstand j i intervallet t. Vi har da, at:

$$(1 - \lambda_{ij} \frac{t}{m} - 0(\frac{t}{m}))^m = \lim_{m \to \infty} (1 - \lambda_{ij} \frac{t}{m} - 0(\frac{t}{m}))^m = \lim_{m \to \infty} (1 - \frac{\lambda_{ij} t}{m})^m$$
$$= e^{-\lambda_{ij} t}$$

idet

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{k}{n})^n = e^k$$

Sandsynligheden for, at der sker overgang fra tilstand i til tilstand j i tidsintervallet t bliver nu:

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-\lambda_{ij} t}$$

og den tilsvarende sandsynlighedstæthed

$$f_{ij}(t) = \lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} t}$$

Vi ser således, at forudsætning (3) medfører, at de enkelte overgangssandsynligheder bliver eksponentielt fordelt.

Betragter vi specielt et uendeligt lille tidsinterval dt, vil sandsynligheden p_{ij} antage værdierne:

$$p_{ij} = \lambda_{ij} dt$$

Forudsættes det, at det betragtede system har opnået statistisk ligevægt, vil det gælde, at:

$$P_j' = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot p_{ij} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

hvor

P_j' betegner sandsynligheden for, at systemet er i tilstand j ved slutningen af intervallet dt.

P_i betegner sandsynligheden for, at systemet er i tilstand i ved begyndelsen af intervallet dt.

$P_j' = P_j$ betegner ligevægtssituationen.

Ovenstående ligningers indhold for $1 \leqslant j \leqslant n$ kan udtrykkes ved hjælp af følgende graph:

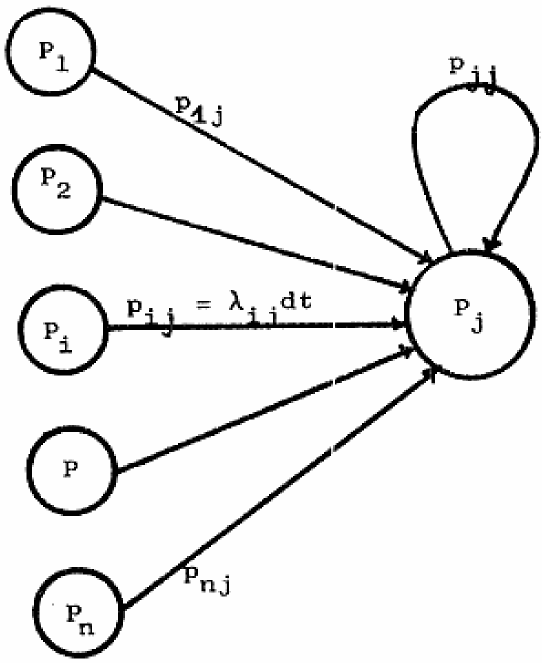

Fig. 2.

Eksempel 3.

En graph i ovennævnte udformning kan fortolkes således:

Der er givet en række punkter – repræsenteret i fig. 2 ved en cirkel – der er forbundet med en række pile. Til hvert punkt er knyttet en variabel og til hver pil en multiplikator.

Værdien af en variabel i et punkt fastsættes som summen af de variable i udgangspunkterne for de pile, der ender i det betragtede punkt, idet de enkelte variable multipliceres med den multiplikator, der er knyttet til de tilsvarende pile.

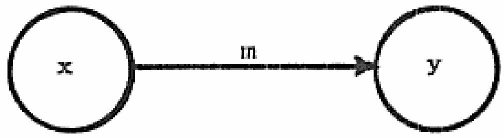

Fig. 3.

angiver, at $y = m \cdot x$.

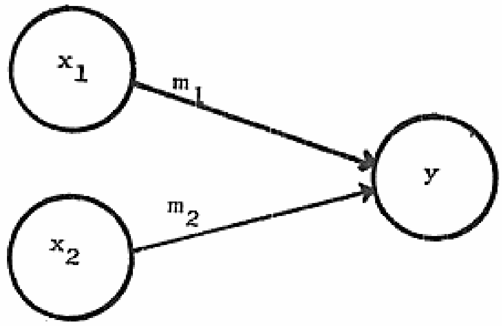

Fig. 4.

angiver, at $y = x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2$.

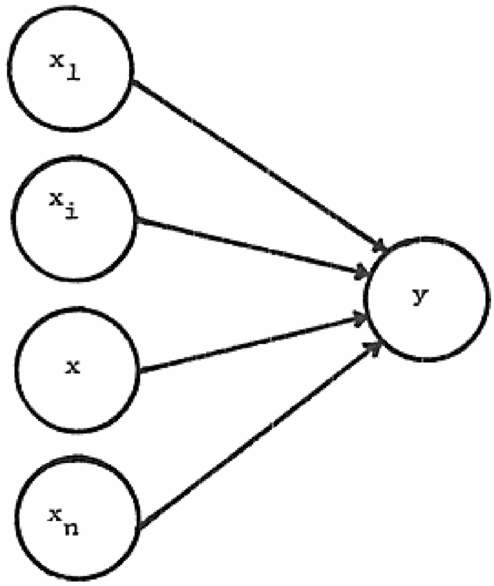

Fig. 5.

$$1 \leqslant i \leqslant n$$

angiver, at $y = x_1 m_1 + x_2 m_2 \ldots\ldots + x_i m_i \ldots\ldots x_n m_n = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$.

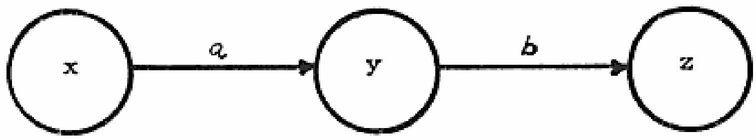

Fig. 6.

angiver, at $y = ax$ og $z = by$, hvoraf følger $z = abx$, som også kan udtrykkes som:

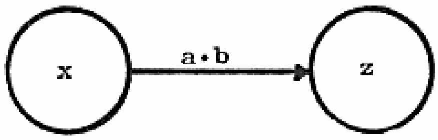

Fig. 7.

Foreligger der således en graph til beskrivelse af relationerne mellem en række variable, kan man ved hjælp af nærmere fastlagte regler omforme disse relationer til afledede relationer. Som eksempel herpå har vi ifølge fig. 6 (se ovenfor), at $y = ax$ og $z = by$ medfører $z = a \cdot b \cdot x$.

Som et yderligere eksempel på sådanne regler skal her anføres følgende simple regel:

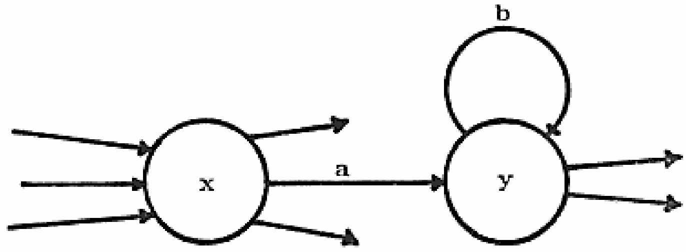

Fig. 8.

angiver, at $y = ax + by$.

De 'løse' pile angiver, at det anførte resultat er uafhængigt af, hvilke pile der fører til og fra de to anførte punkter.

Udtrykket for y kan herefter omformes til:

$$y = \frac{a}{1-b} \cdot x \qquad (b \neq 1)$$

der udtrykt i en graph ser således ud:

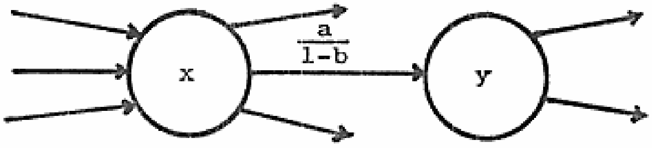

Fig. 9.

Graphen i fig. 9 vil direkte kunne omformes til graphen i fig. 8 ved anvendelse af omformningsreglen.

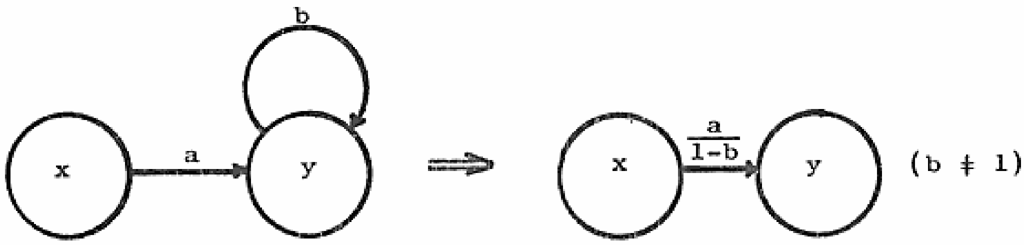

Fig. 10.

Vender vi herefter tilbage til graphen i fig. 2, som udtrykker ligevægtsbetingelserne

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i p_{ij}$$

kan denne graph omformes ved hjælp af reglen i fig. 10 til:

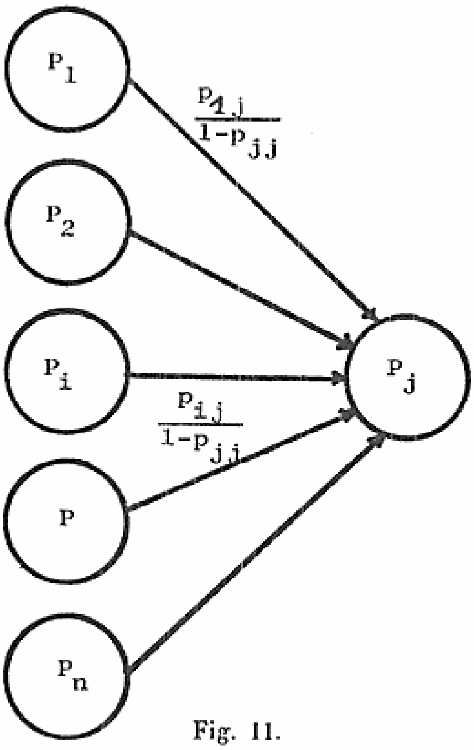

Fig. 11.

som udtrykker relationen:

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{p_{ij}}{1-p_{jj}} \qquad (p_{jj} \neq 1)$$

Indfører vi herefter $p_{ij} = \lambda_{ij}dt$ og benytter vi, at

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ji} = 1$$

d. v. s.

$$1-p_{jj} = \sum_{i=1}^{j-1} p_{ji} + \sum_{i=j+1}^{n} p_{ji}$$

og videre, at

$$1-p_{jj} = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_{ji}dt + \sum_{i=j+1}^{n} \lambda_{ji}dt = dt\,(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_{ji} + \sum_{i=j+1}^{n} \lambda_{ji})$$

fås

$$P_j = \frac{1}{1-p_{jj}} \sum_{i=1}^{n} P_i\lambda_{ij}dt = \frac{dt}{(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_{ji} + \sum_{i=j+1}^{n} \lambda_{ji})\,dt} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}P_i$$

og

$$P_j\,(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_{ji} + \sum_{i=j+1}^{n} \lambda_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot P_i$$

der udtrykker, at såfremt systemet er i statistisk ligevægt, vil en given tilstandssandsynlighed multipliceret med summen af overgangs*intensiteterne* ($\lim_{t\to\infty} \frac{tf(t)}{t} = \lambda_{ij}$) fra tilstanden være lig med produktsummen af overgangsintensiteterne til tilstanden multipliceret med de tilsvarende tilstandssandsynligheder for udgangstilstandene.

Ovennævnte tilstandsrelationer, der som tidligere fremhævet forudsætter, at de enkelte overgangssandsynligheder er eksponentielt fordelte med hensyn til tiden (jfr. (3)), kan udtrykkes i en anden graphform, for hvilken der gælder specielle fortolkningsregler.

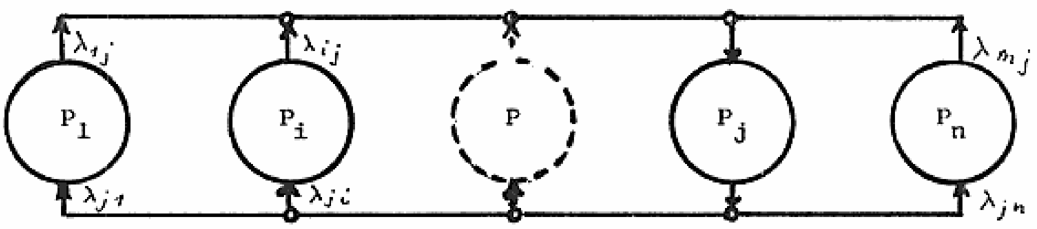

Fig. 12.

Den i fig. 12 anførte graph beskriver et system med n tilstande, idet der af hensyn til oversigten kun er angivet de intensiteter, der svarer til overgangssandsynlighederne til og fra tilstand j.

Graphen kan fortolkes således, at der for hvert punkt (cirkel) fås en relation mellem tilstandssandsynligheder og intensiteter, idet P_j gange sum af afgangsintensiteter = produktsum af tilgangsintensiteter og udgangssandsynligheder.

En nærmere analyse af de opstillede relationer vil vise, at én af relationerne kan udledes af de øvrige, samt at der udover de fra graphen udledte relationer eksisterer endnu en relation

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

der giver udtryk for det opstillede systems probalistiske natur.

Konklusion

Indholdet i ovennævnte fremstilling vil herefter kunne koncentreres i følgende konklusion:

Såfremt der foreligger et system med følgende egenskaber:

1) Systemet antager i ethvert tidspunkt én og kun én af ialt n definerede tilstande.

2) Overgangene fra en tilstand til en anden i løbet af et givet tidsinterval er eksponentielt fordelt i tiden med en given intensitet.

3) Systemet kan opnå statistisk ligevægt.

vil relationerne mellem tilstandssandsynlighederne i ligevægtssituationen kunne udtrykkes ved:

1) Ligningen $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ samt

2) de relationer, der kan aflæses af en graph bestående af

   a) n punkter (cirkler), til hvilke der er knyttet n tilstandssandsynligheder,

   b) en række pile, som forbinder de enkelte punkter, og til hvilke der er knyttet overgangsintensiteter.

Et eksempel på opstilling og benyttelse af en graph af den her omtalte karakter vises i dette nummer af Erhvervsøkonomisk Tidsskrift: L. Printz: Om løsning af køproblemer.

Litteraturhenvisning

Svend Fredens: Køteori, Akademisk Boghandel
Philip M. Morse: Queues, Inventories and Maintenance
Ole Nielsen og Louis Printz: Markoff-kæder

Et eksempel på opstilling og benyttelse af en graph af den her omtalte karakter vises i dette nummer af Erhvervsøkonomisk Tidsskrift: L. Printz: Om løsning af køproblemer.

Litteraturhenvisning

Svend Fredens: Køteori, Akademisk Boghandel
Philip M. Morse: Queues, Inventories and Maintenance
Ole Nielsen og Louis Printz: Markoff-kæder