

Om løsning af køproblemer.

Af L. PRINTZ*)

Artiklen er inddelt i to afsnit, hvor første afsnit indeholder et forsøg på at karakterisere arbejdsindholdet i forbindelse med løsning af operationsanalytiske problemer, her specielt køproblemer, medens andet afsnit omfatter en behandling af et specielt køproblem.

ARBEJDSINDHOLD

Arbejdsindholdet i forbindelse med løsning af operationsanalytiske problemer vil kunne tænkes karakteriseret ved opdeling i følgende otte arbejdsfaser:

1. Klarlæggelse af problemstilling
2. Fastlæggelse af systemets struktur
3. Fastlæggelse af systemets tilstandsmæssige indhold
4. Fastlæggelse af de funktionelle egenskaber ved systemet som ønskes bestemt
5. Valg af modeller samt fastlæggelse af parametre
6. Beregning af systemets relevante funktionelle egenskaber
7. Design af system
8. Drift og vedligeholdelse af system.

1. Klarlæggelse af problemstilling

Behovet for anvendelse af operationsanalyse vil kunne erkendes på mange forskellige måder og i forbindelse med såvel drift som konstruktion af systemer.

*) Cand. merc., amanuensis ved Handelshøjskolen i Århus.

Om løsning af køproblemer.

Af L. PRINTZ*)

Artiklen er inddelt i to afsnit, hvor første afsnit indeholder et forsøg på at karakterisere arbejdsindholdet i forbindelse med løsning af operationsanalytiske problemer, her specielt køproblemer, medens andet afsnit omfatter en behandling af et specielt køproblem.

ARBEJDSINDHOLD

Arbejdsindholdet i forbindelse med løsning af operationsanalytiske problemer vil kunne tænkes karakteriseret ved opdeling i følgende otte arbejdsfaser:

1. Klarlæggelse af problemstilling
2. Fastlæggelse af systemets struktur
3. Fastlæggelse af systemets tilstandsmæssige indhold
4. Fastlæggelse af de funktionelle egenskaber ved systemet som ønskes bestemt
5. Valg af modeller samt fastlæggelse af parametre
6. Beregning af systemets relevante funktionelle egenskaber
7. Design af system
8. Drift og vedligeholdelse af system.

1. Klarlæggelse af problemstilling

Behovet for anvendelse af operationsanalyse vil kunne erkendes på mange forskellige måder og i forbindelse med såvel drift som konstruktion af systemer.

*) Cand. merc., amanuensis ved Handelshøjskolen i Århus.

Med udgangspunkt i systemets fysiske indhold omfatter arbejdsfasen en afgrænsning og præcisering af den aktuelle problemstilling set i relation til virksomhedens (systemets) samlede aktivitet.

2. *Fastlæggelse af systemets struktur*

På grundlag af den i arbejdsfase 1 klarlagte problemstilling fastlægges det aktuelle systems struktur gennem en grafisk afbildning (strukturdiagram). Den valgte beskrivelsesmetode vil være afhængig af problemets art, systemets fysiske indhold samt den eller de personer, der forestår beskrivelsen.

Set i relation til arbejdsfase 1 indeholder arbejdsfasen gennem valg af specificationsgrad en yderligere afgrænsning af problemstillingen.

3. *Fastlæggelse af systemets tilstandsmæssige indhold*

Arbejdsfasen indeholder en fastlæggelse af de tilstande, som det ud fra et funktionelt synspunkt findes relevant at skelne mellem.

Set i relation til problemstillingen må valget af specificationsgrad her ses i nøje sammenhæng med mulighederne for at påvirke systemets funktionelle indhold.

De valgte tilstande samt relationerne mellem disse bør af praktiske grunde opstilles i grafisk form (tilstandsdiagram).

4. *Fastlæggelse af de funktionelle egenskaber ved systemet som ønskes bestemt*

Med udgangspunkt i resultaterne af de foregående arbejdsfaser fastlægges de funktionelle egenskaber ved systemet, som det findes relevant at bestemme gennem operationsanalysen.

Som eksempler på sådanne egenskaber skal for køproblemet vedkommende nævnes det gennemsnitlige antal kunder i systemet, det gennemsnitlige antal kunder i køen, den gennemsnitlige ventetid i systemet, sandsynligheden for et givet antal kunder i systemet m. v.

Da de funktionelle egenskaber skal danne direkte grundlag for den senere systemkonstruktion, er det meget vigtigt, at denne arbejdsfase udføres omhyggeligt og på initiativ af den eller de personer, som senere forestår systemkonstruktionen.

Af praktiske grunde bør de valgte egenskaber opstilles i punktform under anvendelse af en entydig beskrivelsesform.

5. *Valg af modeller samt fastlæggelse af parametre*

I denne arbejdsfase bestemmes systemets relevante parametre gennem opstilling og afprøvning af hypoteser. Dette gælder således konstatering og karakteristik af fordelinger, udregning af overgangssandsyn-

ligheder m. v. Det er vigtigt, at de konstaterede parametre suppleres med en oversigt over de forudsætninger, hvorunder de gælder.

I de tilfælde, hvor ovennævnte karakteristik må baseres på observationer, vil arbejdsfasen i sig selv give anledning til gennemførelse af en række selvstændige arbejdsfaser, hvis nærmere indhold ikke skal behandles her.

6. *Beregning af systemets relevante funktionelle egenskaber*

Med udgangspunkt i systemets karakteristik foretages der gennem denne arbejdsfase en beregning af de relevante funktionelle egenskaber. For at kunne gennemføre disse beregninger vil det normalt være nødvendigt at anvende matematisk-statistisk symbolik og tankegang, ligesom anvendelsen af regnemaskiner vil være af stor værdi ved løsning af større beregningsopgaver.

I de tilfælde, hvor systemet er identisk eller tilnærmelsesvis identisk med allerede opstillede og gennemregnede modeller, vil beregningsarbejdet blive erstattet af en fremdraging og fortolkning af sådanne modeller.

Såfremt problemstillingen indeholder en stillingtagen til systemets strukturering, vil der endvidere kunne være tale om opstilling af optimeringsmodeller, i hvilke systemets alternative indhold tilføres et økonomisk vurderingsgrundlag.

7. *Design af system*

Resultaterne af arbejdsfase 6 vil direkte kunne danne grundlag for nykonstruktion eller ændring af det aktuelle system.

Af praktiske grunde bør det valgte system beskrives og karakteriseres i en form og specifikationsgrad, der er i nøje overensstemmelse med den i de foregående arbejdsfaser anvendte.

8. *Drift og vedligeholdelse af system*

Der skal her blot fremhæves nødvendigheden af, at systemet under driften gøres til genstand for en løbende kontrol af de funktionelle egenskaber, således at eventuelle utilsigtede ændringer eller bristede forudsætninger hurtigst muligt konstateres og eventuelt giver anledning til feed back til arbejdsfase 1.

Til slut skal det anføres, at ovennævnte arbejdsfaseopdeling vil kunne danne grundlag for en hensigtsmæssig arbejdsdeling mellem virksomhedens ansvarlige ledelse og operationsanalytikerens.

Arbejdsfaserne 1, 2, 3, 4, 7 og 8 må således naturligt henhøre under den ansvarlige ledelse, medens arbejdsfaserne 5 og 6 vil kunne vare-

tages af en operationsanalytiker enten inden for virksomheden eller uden for denne. En heldig gennemførelse af en sådan arbejdsdeling vil imidlertid være betinget af, at leder og operationsanalytiker er i stand til at kommunikere sammen. Et sådant kommunikationsgrundlag vil kunne skabes gennem udbredelse af entydige systembeskrivelsesmetoder, som således må beherskes af såvel virksomhedsleder som operationsanalytiker.

Det skal anføres, at ovennævnte kommunikationsproblem naturligvis ikke vil være til stede i de specielle tilfælde, hvor den ansvarlige ledelse og operationsanalytiker er forenet i samme person. Sådanne tilfælde vil imidlertid være meget sjældne i praksis, og det er i høj grad et spørgsmål, om de i det hele taget er ønskværdige.

KØPROBLEM

I det følgende vil der blive gennemgået et specielt køproblem. Da behandlingen først og fremmest er adresseret til operationsanalytikeren, vil der i overvejende grad blive lagt vægt på en uddybning af arbejdsfaserne 5 og 6.

Arbejdsfase 1.

Problemstillingen afgrænses på dette sted til et ekspeditionssystem, idet der ses bort fra eventuelle andre aktiviteter i en større sammenhæng.

Arbejdsfase 2.

Idet det aktuelle system er karakteriseret ved at omfatte et ekspeditionssted, en uendelig række af køpladser samt et reservoir af kundemner, der indgår i en eventuel kø efter passage af en modtagergenerator, vil systemets struktur kunne beskrives ved følgende diagram:

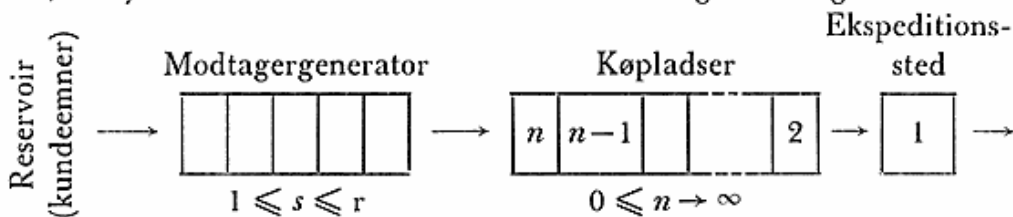


Fig. 1.

a

Det bemærkes, at der kun vil kunne befinde sig én kunde ad gangen i modtagergeneratoren, og at der på grund af reservoiret altid vil være en sådan kunde.

Arbejdsfase 3.

Det findes i den aktuelle situation relevant at karakterisere systemets tilstandsmuligheder ud fra henholdsvis antal kunder i ekspeditionssystem + køsystem og den ankomne kundes placering i generatoren.

Lader vi generatoren indeholde ialt r faser, medens ekspeditionssted og køsystem tilsammen indeholder et uendeligt antal pladser, vil de aktuelle tilstandsmuligheder fremgå af diagrammet i fig 2.

I ovennævnte tilstandsdiagram angiver eksempelvis notationen 1.0 (første række – første søjle), at systemet indtager en tilstand, der er karakteriseret ved, at der er 1 kunde i modtagergeneratorens første fase samtidig med, at der ingen kunder er i ekspeditionssystem og køsystem, medens eksempelvis notationen $r.2$ (tredie række – sidste søjle) angiver en tilstand, hvor den ankomne kunde befinder sig i den r 'te fase samtidig med, at der er 2 kunder i køsystem og ekspeditionssted tilsammen.

Vi ser således, at rækkerne i diagrammet repræsenterer antallet af kunder i køsystem og ekspeditionssystem, medens søjlerne repræsenterer den ankomne kundes placering i modtagergeneratoren.

Af diagrammet fremgår det desuden, at en ændring af systemet fra eksempelvis tilstand 1.0 kun vil kunne foregå til tilstand 2.0 svarende til den ankomne kundes overgang fra fase 1 til fase 2 i modtagergeneratoren.

En overgang fra tilstand $r.0$ til 1.1 markerer på tilsvarende måde, at en kunde overgår fra generatorens sidste fase til ekspeditionssystemet, medens en overgang fra f. eks. tilstand 2.1 til 2.0 markerer, at en kunde bliver færdigekspederet, medens den ankomne kunde befinder sig i den 2. fase.

På lignende måde vil samtlige tilstandsovergange i diagrammet kunne fortolkes. Man vil i den forbindelse bemærke, at tilstandene er specificeret på en sådan måde, at der kun vil kunne foregå én hændelse ad gangen. Der vil således ikke kunne blive tale om, at f. eks. en kunde bliver færdigekspederet samtidig med, at kunden i modtagergeneratoren rykker en fase frem. Såfremt dette var tilfældet, ville der være behov for en pil mellem f. eks. tilstand 4.1 og tilstand 5.0.

Set i relation til tiden vil denne adskillelse mellem relevante hændelser i systemet kunne opnås i tistrækkeligt omfang ved en minimering af observationstidsrum¹⁾.

¹⁾ Se artikel i dette nummer: Ole Nielsen: En metode til beskrivelse af strukturen i specielle systemer.

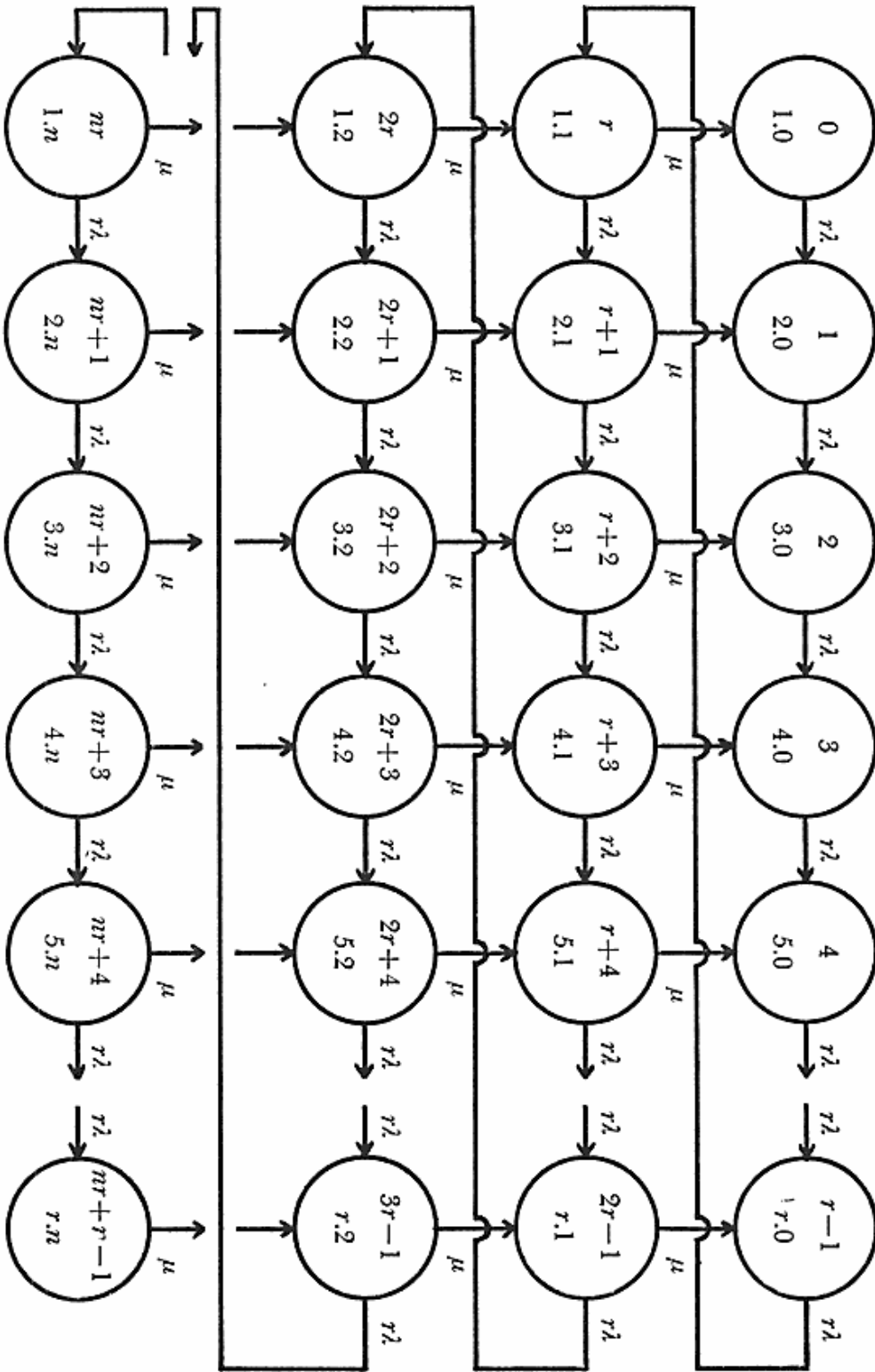


Fig. 2.

Af beregningsmæssige årsager (se senere under arbejdsfase 6) er det fundet hensigtsmæssigt at karakterisere systemets tilstandsmuligheder gennem en fortløbende indicering af de aktuelle tilstande gående fra 0 til $nr+r-1$ (se fig. 2).

Ved denne fremgangsmåde bevares karakteristikkens specificationsgrad samtidig med, at den tidligere anførte dobbeltindicering bliver erstattet af en enkeltindicering.

Det enkelte index karakteriserer herefter systemets tilstand ved det antal faser i modtagergeneratoren, som kunderne i ekspeditionssystem + køsystem + generator har passeret (gennemløbet).

Antallet af kunder i det egentlige system (kø- og ekspeditionssystem) er i denne notation givet med det hele multiplum af r , idet diagrammets enkelte rækker fortsat repræsenterer dette antal.

Arbejdsfase 4.

Med udgangspunkt i problemstillingen er det fundet relevant at undersøge følgende funktionelle egenskaber ved systemet:

1. S_0 = sandsynligheden for at der ingen kunder er i kø- og ekspeditionssystem tilsammen.
2. S_n = sandsynligheden for at der er n kunder i kø- og ekspeditionssystem tilsammen.
3. L = det gennemsnitlige antal kunder i systemet.
4. L_q = det gennemsnitlige antal kunder i køen.
5. A_n = sandsynligheden for at en ankommen kunde finder n kunder i systemet.

Arbejdsfase 5.

Det forudsættes, at en nærmere analyse har vist, at det aktuelle system omfattes af følgende relevante egenskaber:

1. Ekspeditionstiden pr. kunde er eksponentielt fordelt med parameteren μ .
2. Tilgangen til selve systemet foregår fra et udtømmeligt reservoir via en r -faset modtagergenerator. Der vil altid være 1 kunde i modtagergeneratoren, idet der straks rykker en ny kunde ind i generatorens første fase, når en kunde har forladt den r 'te fase for overgang i systemet. Passagetiden (den tid det tager at passere en fase) er eksponentielt fordelt med parameteren $r\lambda$.

Under forudsætning af at systemet kan opnå og er i statistisk ligevægt, vil sammenhængen mellem de enkelte tilstandsmuligheder kunne udtrykkes ved intensiteter²⁾, svarende til de under punkterne 1 og 2 anførte parametre μ og $r\lambda$.

Intensiteterne er herefter påført tilstandsdiagrammet i fig. 2.

Arbejdsfase 6.

Som udgangspunkt for en beregning af systemets funktionelle egenskaber vil vi lade P_j udtrykke sandsynligheden for, at systemet indtager den j 'te tilstand, hvor j i henhold til fig. 2 og arbejdsfase 3 vil kunne antage værdierne 0, 1, 2, 3, . . . $nr+r-2$, $nr+r-1$.

Med udgangspunkt i fig. 2 vil vi herefter kunne opstille følgende ligningssystem til beregning af systemets ligevægtssandsynligheder, idet vi i den statistiske ligevægtssituation har, at sandsynligheden for *overgang til* en given tilstand (evt. samling af tilstande) er lig med sandsynligheden for *overgang fra* den pågældende tilstand.

$$\begin{array}{llll}
 r\lambda \cdot P_0 & = \mu P_r & n = 0 & \text{(Overgang fra og til tilstand 0)} \\
 r\lambda \cdot P_1 & = r\lambda P_0 + \mu P_{r+1} & (& - & - & - & - & 1) \\
 r\lambda \cdot P_2 & = r\lambda P_1 + \mu P_{r+2} & (& - & - & - & - & 2) \\
 & \cdot & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & & \\
 r\lambda \cdot P_{r-2} & = r\lambda P_{r-3} + \mu P_{2r-2} & (& - & - & - & - & r-2) \\
 r\lambda \cdot P_{r-1} & = r\lambda P_{r-2} + \mu P_{2r-1} & (& - & - & - & - & r-1) \\
 (\mu+r\lambda) \cdot P_r & = r\lambda P_{r-1} + \mu P_{2r} & n > 0 & (& - & - & - & r) \\
 (\mu+r\lambda) \cdot P_{r+1} & = r\lambda P_r + \mu P_{2r+1} & & (& - & - & - & r+1) \\
 & \cdot & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & & \\
 & \cdot & & & & & & \\
 (\mu+r\lambda) \cdot P_{nr+s} & = r\lambda P_{nr+s-1} + \mu P_{nr+r+s} & & (& - & - & - & nr+s)
 \end{array}$$

Af ovennævnte ligninger har vi generelt, idet $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \text{trafiktilbud}$ indføres

$$(1) \quad r\rho P_j = r\rho P_{j-1} + P_{r+j} \quad n = 0 \quad r-1 \geq j \geq 1$$

$$(2) \quad (1+r\rho) P_j = r\rho P_{j-1} + P_{r+j} \quad n > 0 \quad j \geq r$$

²⁾ Se artikel i dette nummer: Ole Nielsen: En metode til beskrivelse af strukturen i specielle systemer.

Af fig. 2 har vi direkte sandsynligheden for, at der er n kunder i kø- og ekspeditionssystem som

$$(3) \quad S_n = \sum_{j=nr}^{nr+r-1} P_j$$

Ved addition af ligevægtsligningerne for $j = 0$ til $j = r-1$ får vi

$$r\lambda P_{r-1} = \mu \sum_{j=r}^{2r-1} P_j = \mu \cdot S_1 \text{ eller}$$

$$(4) \quad S_1 = r\varrho \cdot P_{r-1}$$

Ved addition af ligningerne for $j = nr$ til $j = nr+r-1$ får vi

$$\mu \sum_{j=nr}^{nr+r-1} P_j + r\lambda P_{nr+r-1} = r\lambda P_{nr-1} + \mu \sum_{j=nr+r}^{nr+2r-1} P_j \text{ og ved indsættelse af (3)}$$

$$S_n + r\varrho P_{nr+r-1} = S_{n+1} + r\varrho P_{nr-1}$$

Ved indsættelse i denne ligning for $n = 1, 2, 3, \dots, n-1$ og successiv akkumulation fås

$$S_1 + r\varrho P_{nr-1} = S_n + r\varrho P_{r-1}$$

og ved indsættelse af (4)

$$(5) \quad S_n = r\varrho \cdot P_{nr-1}$$

Vi forestiller os nu en størrelse x , hvis eksistens er givet med det konkrete system, med den egenskab, at

$$(6) \quad P_j = a \cdot x^j \quad j \geq r-1$$

Da j er et stadigt stigende heltal i tidligere anførte område, har vi umiddelbart $x \geq 0$.

Vi har tillige, at $x \neq 0$, da der ellers ikke ville kunne forekomme kunder i systemet.

Endelig har vi $x < 1$, da sandsynligheden på grund af konstant a ellers ville vokse over alle grænser.

Ved indsættelse af (6) i (2) har vi

$$(1+r\varrho)ax^j = r\varrho ax^{j-1} + ax^{j+r} \quad \text{eller}$$

$$(1+r\varrho)x = r\varrho + x^{r+1} \quad \text{og}$$

$$(7) \quad r\varrho = x \frac{x^r + 1}{x-1}$$

Ved indsættelse af (6) i (5) har vi umiddelbart

$$(8) \quad S_n = r\varrho ax^{nr-1}$$

Da summen af samtlige tilstandssandsynligheder er 1 har vi endvidere

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r\varrho \frac{a}{x} (x^r)^n = 1, \quad \text{der kan omskrives til}$$

$$1 - S_0 = r\varrho \frac{a}{x} x^r \frac{1}{1-x^r}, \quad \text{og ved indsættelse af (7) giver}$$

$$(9) \quad a = (1 - S_0) \frac{1-x}{x^r}$$

Ved multiplikation med $j+1$ og samtidig summation af ligevægtsligningerne på side 144 for $j=0$ til $j=r-1$ fås

$$r \cdot r\lambda P_{r-1} = \sum_{j=0}^{r-2} r\lambda P_j + \mu \sum_{j=0}^{r-1} (j+1) P_{j+r}, \quad \text{der ved division med } r\mu \text{ og}$$

indsættelse af (6) giver

$$r\varrho ax^{r-1} + \varrho ax^{r-1} = \varrho S_0 + \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} (j+1) ax^{j+r}$$

$$(10) \quad ax^{r-1}(r+1) = S_0 + \frac{ax^r}{r\varrho} \sum_{j=0}^{r-1} (j+1) x^j$$

$$\text{Af identiteten } F(x) = \sum_{j=0}^{r-1} x^{j+1} = x \frac{1-x^r}{1-x} \text{ fås}$$

$$F'(x) = \sum_{j=0}^{r-1} (j+1) x^j = \frac{(1-x)[1-(r+1)x^r] + x - x^{r+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-x^r - rx^r(1-x)}{(1-x)^2}$$

Ved indsættelse af dette udtryk i (10) får vi

$$ax^{r-1}(r+1) = S_0 + \frac{ax^r}{r\varrho} \left[\frac{1-x^r}{(1-x)^r} - r \frac{x^r}{1-x} \right], \text{ der videre ved indsættelse}$$

af (9) giver

$$(1-S_0) \frac{1-x}{x} (r+1) = S_0 + (1-S_0) \frac{1-x}{r\varrho} \left[\frac{1-x^r}{(1+x)^2} - r \frac{x^r}{1-x} \right];$$

og videre

$$(r+1)(1-x) = \frac{S_0}{1-S_0} x + 1 - \frac{x^{r+1}}{\varrho};$$

Ved anvendelse af (7) fås

$$(11) \quad \boxed{S_0 = 1 - \varrho}$$

Ved indsættelse af (9) i (8) fås på lignende måde

$$S_n = r\varrho(1-S_0) \frac{1-x}{x^r} \cdot x^{nr-1} \text{ og ved indsættelse af (11)}$$

$$S_n = r\varrho(1-1+\varrho) \frac{1-x}{x^r} x^{nr-1}$$

$$(12) \quad \boxed{S_n = \varrho(1-x^r)(x^r)^{n-1}}$$

Det gennemsnitlige antal kunder i kø- og ekspeditionssystem (L) vil umiddelbart kunne udtrykkes som

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot S_n, \text{ der ved indsættelse af (12) giver}$$

$$(13) \quad L = \varrho(1-x^r) \sum_{n=1}^{\infty} n(x^r)^{n-1}$$

Af identiteten $G(x^r) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^r)^n = \frac{x^r}{1-x^r}$ fås

$$G'(x^r) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x^r)^{n-1} = \frac{(1-x^2) \cdot 1 + x^r}{(1-x^r)^2} = \frac{1}{(1-x^r)}, \text{ der ved indsættelse i}$$

(13) giver

$$(14) \quad \boxed{L = \frac{\varrho}{1-x^r}}$$

På lignende måde vil det gennemsnitlige antal kunder i køsystemet (L_q) umiddelbart kunne udtrykkes som

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) S_n = \sum_{n=1}^{\infty} n S_n - \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\rho}{1-x^r} - \rho$$

$$(15) \quad \boxed{L_q = \rho \frac{x^r}{1-x^r}}$$

Af fig. 2 fremgår det umiddelbart, at sandsynligheden for at en ankommen kunde finder n kunder i systemet (A_n) kan udtrykkes som

$\frac{A_n}{r} P_{nr-1}$, der ved indsættelse af (6) giver

$$A_n = r a x^{nr-1} = r (1-S_0) \frac{1-x}{x^r} x^{nr-1} = r \rho \frac{1-x}{x^2} x^{nr-1}$$

$$(16) \quad \boxed{A_n = (1-x^r) x^{nr}}$$

Som det fremgår af det ovenstående, har vi herefter gennem udtrykkene (12), (15) og (16) bestemt de funktionelle egenskaber ved det aktuelle system, som er fundet relevant i arbejdsfase 4.

Arbejdsfase 7 og 8.

Som tidligere anført er der i det aktuelle tilfælde først og fremmest lagt vægt på en behandling af indholdet i arbejdsfaserne 5 og 6. Der skal derfor på dette sted blot henvises til den generelle behandling i artiklens første afsnit.

Litteraturanvisning:

- Svend Fredens: *Køteori*, Akademisk Boghandel.
- Philip M. Morse: *Queues, Inventories and Maintenance*.
- Ole Nielsen og Louis Printz: *Markoff-kæder*.

På lignende måde vil det gennemsnitlige antal kunder i køsystemet (L_q) umiddelbart kunne udtrykkes som

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) S_n = \sum_{n=1}^{\infty} n S_n - \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\rho}{1-x^r} - \rho$$

$$(15) \quad \boxed{L_q = \rho \frac{x^r}{1-x^r}}$$

Af fig. 2 fremgår det umiddelbart, at sandsynligheden for at en ankommen kunde finder n kunder i systemet (A_n) kan udtrykkes som

$\frac{A_n}{r} P_{nr-1}$, der ved indsættelse af (6) giver

$$A_n = r a x^{nr-1} = r (1-S_0) \frac{1-x}{x^r} x^{nr-1} = r \rho \frac{1-x}{x^2} x^{nr-1}$$

$$(16) \quad \boxed{A_n = (1-x^r) x^{nr}}$$

Som det fremgår af det ovenstående, har vi herefter gennem udtrykkene (12), (15) og (16) bestemt de funktionelle egenskaber ved det aktuelle system, som er fundet relevant i arbejdsfase 4.

Arbejdsfase 7 og 8.

Som tidligere anført er der i det aktuelle tilfælde først og fremmest lagt vægt på en behandling af indholdet i arbejdsfaserne 5 og 6. Der skal derfor på dette sted blot henvises til den generelle behandling i artiklens første afsnit.

Litteraturanvisning:

- Svend Fredens: *Køteori*, Akademisk Boghandel.
- Philip M. Morse: *Queues, Inventories and Maintenance*.
- Ole Nielsen og Louis Printz: *Markoff-kæder*.